Afghanistan Digital Library

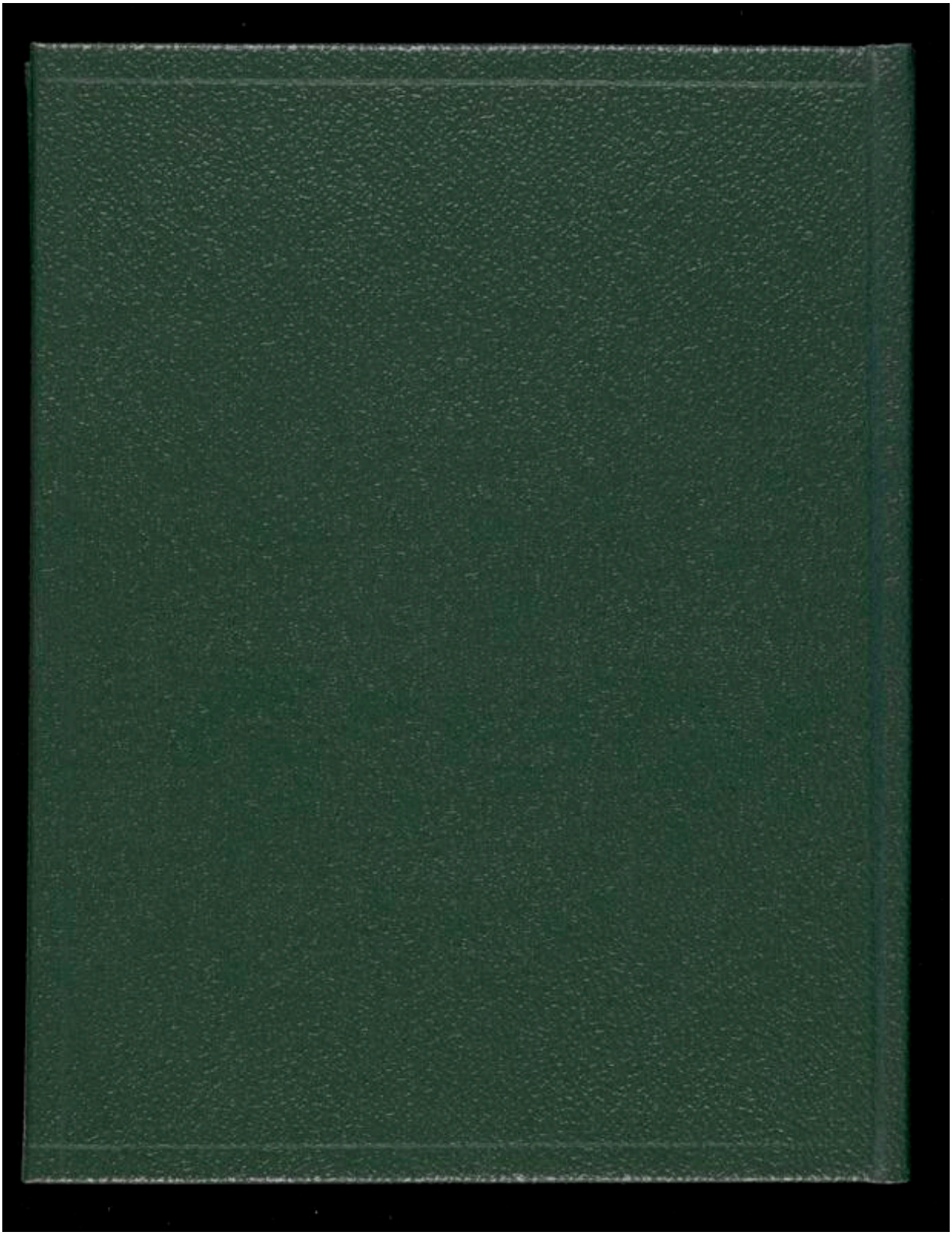
adl0258

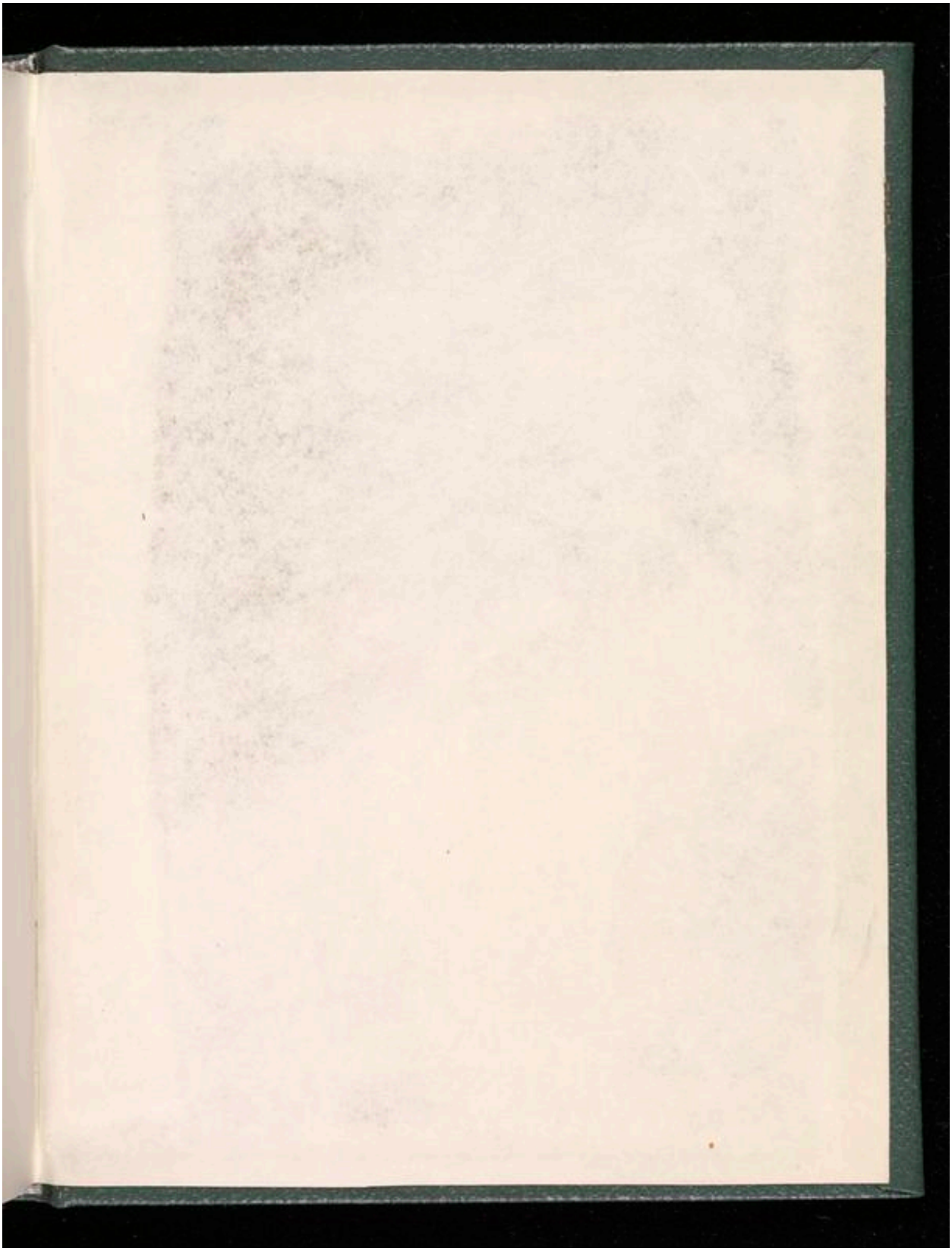
http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682

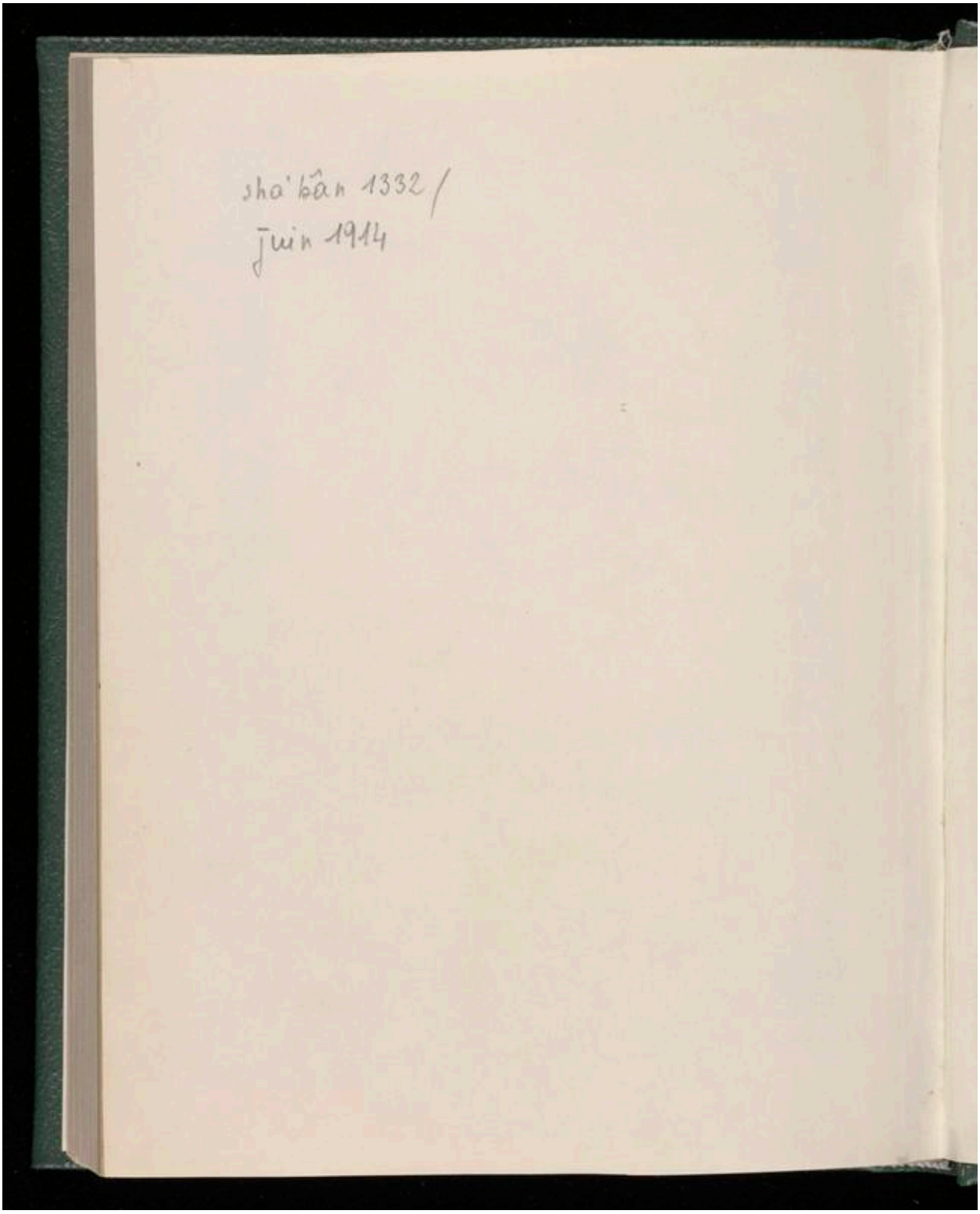
This is a PDF version of an item in New York University's Afghanistan Digital Library (http://afghanistandl.nyu.edu/). For more information about this item, copy and paste the "handle" URL above into a web browser. When referring to or citing this item please use the "handle" URL and not this document or the URL from which you downloaded it.

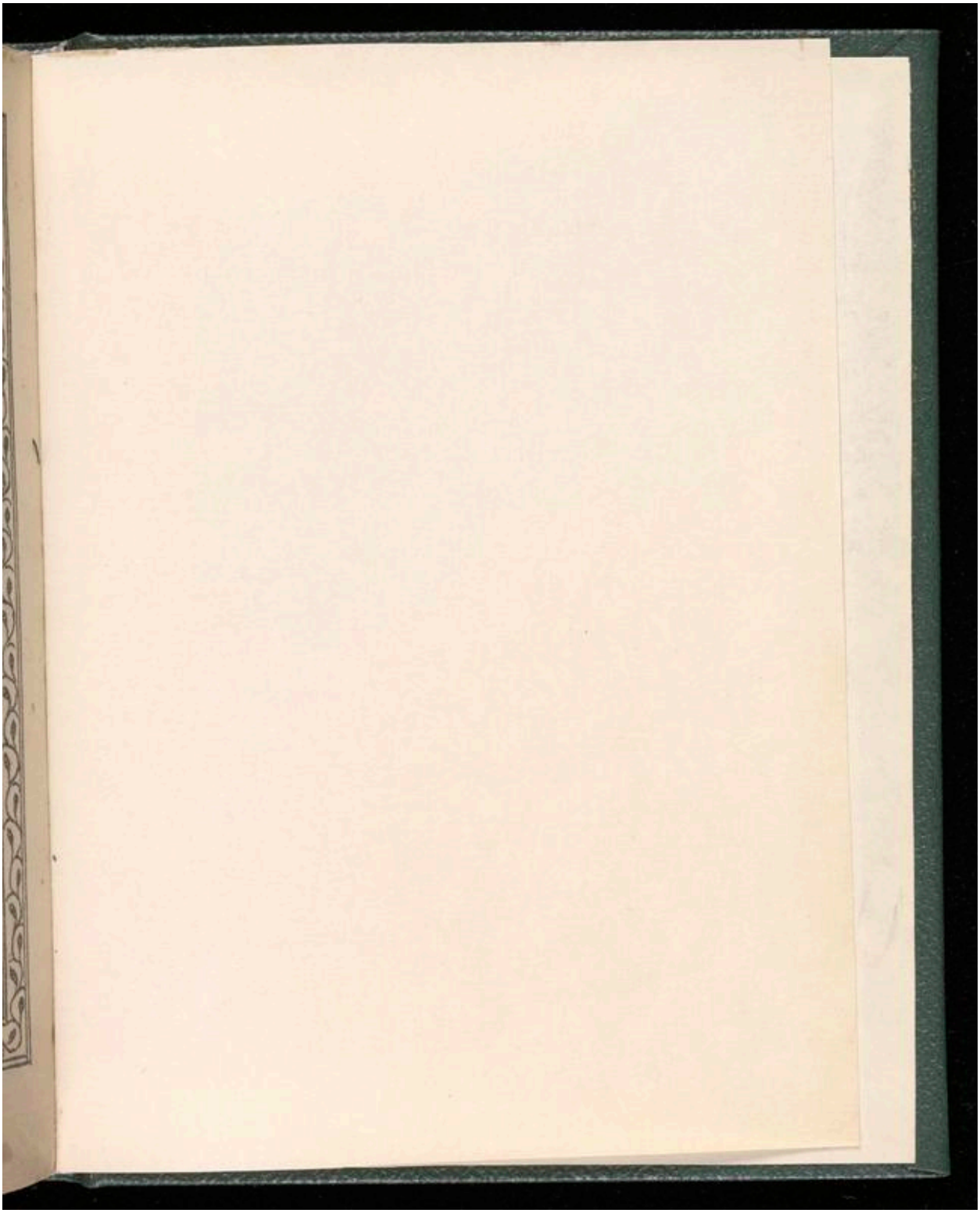
All works presented on New York University's Afghanistan Digital Library website are, unless otherwise indicated, in the public domain. The images available on this website may be freely reproduced, distributed and transmitted by anyone for any purpose, commercial or non-commercial.

NYU Libraries, Digital Library Technical Services, dlts@nyu.edu






sha'bân 1332 /
juin 1914



http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 5 of 308

سلسلهٔ مؤلفات مدرسهٔ مبارکهٔ حبیبیهٔ دار السلطنهٔ کابل

کتاب حساب مقابله

حصهٔ اول

بامر واراده سنیهٔ اعلیحضرت سراج الملة والدین و نظارت جلیلهٔ حضرت معین السلطنه صاحب افخم باجازهٔ انجمن معارف برای تعلیم درجهٔ رشدیهٔ مدرسهٔ حبیبیه و باقی مدارس دولت مقرر شده است

در مطبع دار السلطنهٔ کابل در سنهٔ ۱۳۳۲ بار اول طبع گشته

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 6 of 308

بسم الله الرحمن الرحیم

چون از میامن وجود مسعود اعلیحضرت سپهر یار منیر پرور رهنمای آئین
سراج الملة والدین امیر حبیب الله خان پادشاه خود مختار دولت
علیه مستقله افغانستان اجرای مکاتب عدیده ونشر معارف یونافیونا
در ترقی وامر تعلیم وتربیت عمومی در تعالیست ازانرو امر تالیف
وترجمه کتب فنیه که اساس اذاعت علوم وبنیاد شیوع معارف میباشد
نیز لازم بوده اینست که از علم جبر ومقابله که رکن اکمل وفرد افضل
حکمت ریاضی میباشد وتکمیل علوم حسابیه واخذ فوائد کلیه بدون
تحصیل وتکمیل آن متصور نیست مسائل ضروریه از کتابهای
متفرقه جدیده ترجمه وانتخاب وباتفاق اعضای هیئت تالیفیه

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 7 of 308

ترتیب یافته برای تعلیم اولاد وطن مقدس بزبان فارسی ساده
تحریر گشت وبحمایت حضرت شهزاده کامگار بلند اقبال جناب
سردار عنایت الله خان معین السلطنه صاحب افخم که نظارت
معارف عمومیهٔ دولت علیهٔ افغانیه یکی از وظائف مهمهٔ ذات
عالی شانست بچاپ رسیده باجازهٔ انجمن معارف برای تعلیم درجهٔ
رشدیه مدرسه حبیبیه وباقی مکاتب دولت مقرر شده است

مقدمه

۱- طریق مقایسهٔ اشیا و اظهار آن بواسطهٔ اعداد
تشریح این امر در چند امثله عام فهم کرده خواهد شد-

ا اگر بخواهیم که طول یک پارچه کالا را معلوم کنیم مدعا ما بشرطی
حاصل میشود که دریافته بتوانیم که در طول این کالا یک طول خورد تر
مثلاً یک گز چند مرتبه شمولیت دارد-

ب اگر بخواهیم که دوری کابل و غزنین را معلوم کنیم مدعا ما باین شرط
حاصل میشود که دریافته بتوانیم که درین مسافت یک مسافت خورد تر
مثلاً یک میل چند مرتبه شمولیت دارد-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 8 of 308

ج اگر بخواهیم که مقدار یک رقم روپیه را معلوم کنیم مدعا ما باین شرط حاصل
میشود که دریافته بتوانیم که درین مقدار روپیه یک مقدار خورد تر مثلاً یکروپیه
چند مرتبه شمولیت دارد

د اگر بخواهیم که وزن یک مقدار برنج را معلوم کنیم مدعا ما باین شرط حاصل
میشود که دریافته بتوانیم که درین وزن برنج یک وزن خورد تر مثلاً یکچهارم یک
چند مرتبه شمولیت دارد

ازامثله فوق ظاهر است که هرگاه بخواهیم که مقیاس چیزیرا معلوم کنیم مدعا ما
باین شرط حاصل میشود که ما این امر را دریافته بتوانیم که شے مذکور چند
مرتبه بیک شے خورد تر (که همجنس خود آنست) شامل میباشد این
شے خورد تر مذکور را واحد قیاسی میگویند و آن عدد را که تعداد مراتب
شمولیت این واحد قیاسی را درهمان شے ظاهر میکند اندازه عددی
آن شے میگویند - مثلاً در مثال اول واحد قیاسی طول یک گز است
و در مثال دوم واحد قیاسی مسافت یک میل است - و در مثال
سوم واحد قیاسی نقد یک روپیه است - و در مثال چهارم واحد قیاسی
وزن یک چهار یک است - پس اگر برای ما معلوم باشد که طول آن

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 9 of 308

پارہ کالا ۱۰ گز است - یا دوری کابل و غزنین ۶۷ میل است - یا آن مبلغ ۵۰۰ روپیہ است - یا وزن برنج ۲۵ سیر است - درینصورتها عدد ۱۰ اندازہ عددی طول آن کالا میباشد و ۶۷ اندازہ عددی دوری کابل و غزنین و ۵۰۰ اندازہ عددی مبلغ مذکور و ۲۵ اندازہ عددی وزن برنج

تنبیہ - وقتیکہ اندازہ عددی شے مخصوصی بواسطہ اعداد مختلفہ دریافت نمودہ میشود از اصل شے مذکور نیز بواسطہ اعداد مختلفہ تعبیر میشود - مثلاً اگر واحد قیاسی طول یک فت باشد از طول چیزیکہ ۱۰ فت باشد بعدد ۱۰ تعبیر خواہد شد - لیکن اگر واحد قیاسی طول بقدر ۲ فت باشد از ہمان طول ۱۰ فت بعدد ۵ تعبیر خواہد شد

مثال ۱ اگر واحد قیاسی طول یک فت باشد معلوم کنید کہ اندازہ عددی ۵ گز و ۲ فت چقدر خواہد بود

۵ گز و ۲ فت مساوی ۱۷ فت میباشد و چون این ۵ گز و ۲ فت بر واحد قیاسی طول (یعنی یک فت) ۱۷ مرتبہ شمولیت دارد - بنابرین اندازہ عددی مطلوب آن ۱۷ میباشد -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 10 of 308

مثال - ۲ اگر از یک و نیم دقیقه بعدد ۳۰ تعبیر شود معلوم کنید که واحد قیاسی وقت چقدر میباشد

یک و نیم دقیقه مساوی ۹۰ ثانیه میباشد

چون ۳۰ اندازهٔ عددی ۹۰ ثانیه میباشد لهذا واضح است که واحد قیاسی وقت در ۹۰ ثانیه ۳۰ مرتبه شمولیت دارد -

بنابرین واحد قیاسی وقت $\frac{1}{30}$ حصه ۹۰ ثانیه یعنی ۳ ثانیه است

امثله (۱)

(۱) اگر واحد قیاسی وزن یک سیر باشد اندازهٔ عددی اخروار و من و ۴ سیر چقدر خواهد بود

(۲) اگر واحد قیاسی وزن ۵ سیر باشد اندازه عددی همان وزن چقدر خواهد بود

(۳) اگر از مسافت ۳۰۰ میل بعدد ۲۵ تعبیر شود پس معلوم کنید که واحد قیاسی مسافت چقدر خواهد بود

(۴) اگر از سیمین مسافت بعدد ۴۰ تعبیر شود معلوم کنید که واحد قیاسی چقدر خواهد بود

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 11 of 308

(۵) اگر از مبلغ ۴۰۰ روپیه بعدد ۱۶ تعبیر شود معلوم کنید که از مبلغ ۲۲۵ روپیه
بکدام عدد تعبیر خواهد شد؟

(۶) اگر از یک طول ۸ فت و ۴ انچ بعدد ۲۵ تعبیر شود معلوم کنید که از ۴ فت
بکدام عدد تعبیر خواهد شد؟

(۷) معلوم کنید که واحد قیاسی وقت چقدر باشد که عدد ۳ از دو ساعت و
۱۵ دقیقه تعبیر کند؟

(۸) اگر واحد قیاسی وقت ۱۵ ثانیه باشد معلوم کنید که از کدام وقت بعدد
۶۰ تعبیر خواهد شد؟

(۹) اگر واحد قیاسی وزن $\frac{1}{16}$ پوند باشد معلوم کنید که کدام عدد از $\frac{1}{2}$ ۱۲ مند دو
تعبیر خواهد کرد؟

(۱۰) اگر ۴ مربع فت واحد قیاسی مساحت باشد معلوم کنید که کدام عدد
از مساحت ۹ مربع انچ و کدام عدد از مساحت ۹ مربع گز تعبیر خواهد کرد

(۱۱) اگر از یک مساحت ۱۲۵ مربع فت بعدد $8\frac{1}{3}$ تعبیر شود معلوم کنید
که در سه چند واحد قیاسی مساحت چند مربع گز شمولیت دارد

۱۲ اگر از ۵ روپیه و ۱۰ اشاهی و ۲ پیسه بعدد ۲۲ تعبیر شود معلوم کنید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 12 of 308

واحد قیاسی نقد چقدر است؟

(۱۳) اگر ۷ روپیه و ۸ شاهی واحد قیاسی نقد باشد معلوم کنید که اندازهٔ عددی ۱۵۳ روپیه و ۴ شاهی چقدر خواهد بود؟

(۱۴) اگر ۲ روپیه و ۱۳ آنه و ۷ پائی واحد قیاسی نقد باشد معلوم کنید که اندازهٔ عددی ۲۵ روپیه و ۱۰ آنه و ۳ پائی چقدر خواهد بود؟

(۱۵) از ۲۰ روپیه ۱۰ آنه بعدد $5\frac{1}{2}$ تعبیر شده است پس معلوم کنید که اگر واحد قیاسی سه چند باشد اندازهٔ عددی ۴۵ روپیه چقدر خواهد بود؟

(۱۶) عدد ۸۴ اندازهٔ عددی ۳۹ گز و ۲ فٹ میباشد پس معلوم کنید که اگر واحد قیاسی طول $\frac{3}{12}$ این واحد قیاسی باشد کدام عدد از ۵۷ گز تعبیر خواهد کرد؟

(۱۷) از ۲۶ روز و ۱۰ ساعت و ۲۶ دقیقه بعدد ۱۲۰ تعبیر شده است پس معلوم کنید که اگر واحد قیاسی وقت ۴۷ دقیقه و ۱۳ ثانیه نسبت باین واحد قیاسی کمتر باشد کدام عدد از ۳۶۶ تعبیر خواهد کرد؟

(۱۸) اگر در سوال هفدهم واحد قیاسی دوم نسبت به واحد قیاسی اول ۶ ساعت و ۵۴ دقیقه و ۴۷ ثانیه زیاده تر باشد جواب چقدر خواهد بود

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 13 of 308

۲ معانی مختلفهٔ لفظِ مقدار

(ا) هر شے که بواسطه اعداد ازان تعبیر شده میتواند مقدار است مثلاً وقت یا وزن یا روپیه یا مسافت وغیره از هریک ازانها به اعداد تعبیر شده میتواند (چنانکه در قاعدهٔ اندکور گشت) هریک مقدار میباشد-

(ب) لفظ مقدار در عدد صحیح وکسر یکسان استعمال میاید-

(ج) از یک جمله جبریه نیز بعض اوقات بلفظ مقدار تعبیر میشود- (مگر درین کتاب محض جمله جبریه را استعمال خواهیم نمود)

(این مطلب در موضع مناسب بتفصیل مذکور خواهد شد)

۳- جبر و مقابله

علم جبر و مقابله هم مانند علم حساب علم اعداد است- فرق محض اینقدر است که در جبر و مقابله بالعموم بواسطه حروف و علامات معینه از اعداد بحث میشود- بنابرین هرگاه مقادیر در علم جبر و مقابله مذکور گردد مقصود ازانها محض قیمت عددی آن مقادیر میباشد-

۴- اشارات جبریه

حروفیکه برای تعبیر اعداد و نیز علاماتیکه برای اظهار عمل جمع و تفریق و ضرب

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 14 of 308

وتقسیم وغیره استعمال میشوند ازهمگی بنام اشارات جبریه تعبیر میکنند
فرق محض اینقدر است که حروف اشارات مقادیر میباشند

باب اول
تشریح اشارات

۵- اشاره جمع

این علامت + را اشارت جمع میگویند و تلفظ آن بلفظ جمع یا زائد میباشد
و هرگاه این علامت جمع مابین چند عدد نوشته شود مفهوم آن این میباشد
که عدد یکه ماقبل آن این علامت نوشته شده است بآن مقدار که
پیش از علامت مذکور است جمع شود - مثلاً ا + ب (که تلفظ آن ا
جمع ب میباشد) این را ظاهر میکند که از عدد یکه بحرف ب تعبیر شده است
باعدد یکه ازان بحرف ا تعبیر گشته جمع گردد - بنابرین اگر ا ۵ را و ب
۳ را ظاهر کند ا + ب از ۸ تعبیر خواهد کرد و باز ا + ب + ج ظاهر میکند
که از عدد یکه بحرف ب تعبیر شده است با آن عدد یکه بحرف ا ازان
تعبیر شده است جمع شود و باز با این مجموع آن عدد را که بحرف ج ازان
تعبیر شده است جمع شود مثلاً اگر ارشارات ا و ب و ج علی الترتیب

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 15 of 308

۵و۳و۲ را ظاهر کنند ا + ب + ج مجموع آنها را یعنی ۱۰ را ظاهر خواهد کرد

۶- اشارت تفریق

تلفظ این علامت - بلفظ تفریق یا ناقص میباشد و هرگاه مابین دو عدد این علامت نوشته شود مفهوم اینست که آن عدد را که پیش ازان این علامت نوشته شده است ازان مقداریکه ماقبل علامت مذکور باشد تفریق کرده شود - مثلاً ا - ب (که تلفظ آن ا تفریق ب است) ظاهر میکند که آن عدد را که تعبیر ازان بحرف ب شده است ازان عدد یکه تعبیر ازان بحرف ا شده تفریق شود - بنابرین اگر ا را ۸ تعبیر کند و ب را ۳ پس ا - ب را ۵ تعبیر خواهد کرد - باز ا - ب - ج ظاهر میکند که عدد یکه تعبیر ازان بحرف ب شده است از عدد یکه بحرف ا ازان تعبیر شده است تفریق شود بعد ازان از حاصل تفریق مذکور آن عدد را که تعبیر ازان بحرف ج شده است تفریق شود - مثلاً اگر ا و ب و ج علی الترتیب ۸ و ۳ و ۱ را ظاهر کنند ا - ب - ج از ۴ تعبیر خواهد کرد

تنبیه - هرگاه چند مقادیر با شارات زائد و ناقص ربط داده شوند ابتدای عمل از طرف دست راست میشود -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 16 of 308

۷- اشارت زائد ناقص یا جمع تفریق

هرگاه این علامت ذیل ± (که بلفظ آن زائد ناقص میباشد) قبل از عددے نوشته شود مفهوم آن اینست که آن عدد را که بعد ازین علامت نوشته شده است با هر چیزیکه قبل از انست جمع شود یا ازان چیز تفریق شود - مثلاً اگر ا از ۷ و ب از ۲ تعبیر کنند ا ± ب از ۹ یا ۵ تعبیر خواهد کرد

۸- اشارت تفاوت

هرگاه این علامت ذیل ∓ مابین دو عدد نوشته شود مفهوم آن اینست که عدد خورد از کلان تفریق شود - مثلاً اگر ا از ۵ و ب از ۸ تعبیر کنند ∓ ب از ۳ تعبیر خواهد کرد -

۹- اشارت ضرب

هرگاه این علامت ذیل × (که بلفظ آن بلفظ ضرب میباشد) مابین دو عدد نوشته شود مفهوم این میباشد که آن هر دو یک با دیگر ضرب شود - مثلاً ا × ب (که بلفظ آن ا ضرب ب باشد) ظاهر میکند که آن عدد را که بحرف ب ازان تعبیر شده است دران عدد یکه تعبیر ازان به ا شده است ضرب شود - بنابرین اگر ا ۵ را و ب ۳ را ظاهر کنند

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 17 of 308

پس مفهوم ا ب آنیست که عدد ۳ پنج مرتبه گرفته شده است یعنی مراد
از ا ب ۵ ا میباشد

اشارت ضرب مابین آن دو عدد که تعبیر از انها بدو حرف شده باشد
اکثریه محذوف میباشد - و نیز مابین آن عدد که از اول بواسطه رقم و از
دوم بواسطه حرف تعبیر شود محذوف میباشد - مثلا ا ب برجاے
ا × ب و ۴ ا برجاے ۴ × ا نوشته میشود

تنبیه دلیل این امر که ۸۳ برجاے ۳ × ۸۰ استعمال نمیشود
این است که پیش ازین در حساب ۸۳ مساوی ۸۰ + ۳ قرار داده شده است
بعض اوقات برجاے اشارت ضرب محض یک نقطه نوشته میشود
مثلا ا . ب ا ب را ظاهر میکند لیکن استعمال نقطه درین ارقام نمیشود

۱۰ - اشارت تقسیم

هرگاه این علامت ذیل ÷ (که تلفظ آن بلفظ تقسیم میباشد) مابین دو عدد
نوشته شود مفهوم آن آنیست که عدد یکه بطرف راست این علامت است
بر عدد طرف چپ تقسیم شود - مثلا ا ÷ ب (که تلفظ آن ا تقسیم ب
میباشد) ظاهر میکند که آن عدد را که بحرف ا از ان تعبیر شده است

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 18 of 308

بران عدد یکه بحرف ب ازان تعبیر شده است تقسیم شود - بنابرین اگر ا
از ۶ تعبیر کند و ب از ۳ پس مفهوم ا ÷ ب ۲ میباشد و همچنین ا
÷ ب ÷ ج ظاهر میکند که عدد یکه بحرف ا ازان تعبیر شده است بر عدد یکه
به ب تعبیر شده است تقسیم شود و این خارج قسمت باز بران عدد یکه
بحرف ج ازان تعبیر شده است تقسیم شود

تنبیه هرگاه در چند مقادیر بواسطهٔ اشارت ضرب و تقسیم مربوط
گردند ابتدائے عمل از طرف راست میشود

۱۱ - جملهٔ جبریه وحد

چند اشارات و ارقام و حروف که یکجا باهم مربوط گردند بنام جملهٔ جبریه
مسمی میشوند

[اشارات طرز عمل را ظاهر میکنند]

ان حصص یک جملهٔ جبریه را که بواسطه اشارت + یا - مربوط گردند
حدود آن جمله میگویند - مثلاً ۵ ا + و ب ÷ ج × د - ۸ ج × ف
÷ ک یک جملهٔ جبریه است و حدود آن ۵ ا و و ب ÷ ج × د و ۸ ج
× ف ÷ ک میباشند

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 19 of 308

جملهای جبریه دو قسم دارند بسیط و مرکب

هرگاه حصص یک جملهٔ جبریه بواسطهٔ اشارات + یا − ربط نیابند آنرا جملهٔ بسیط میگویند مثلاً ۳ا ب جملهٔ بسیط است و این را ذو حدود احد نیز میگویند جملهٔ مرکب آنست که دو یا زیاده حدود داشته باشد و نیز اگر دو حد مانند ۲ا + ۵ ب ج داشته باشد آنرا ذو حدین میگویند و اگر ۳ حد داشته باشد مانند ا + ب ج + د ع ف ک آنرا ذو حدود ثلاثه میگویند و اگر زیاده از ۳ حد داشته باشد آنرا ذو حدود کثیره میگویند

۱۲ - اشارت مساوات

هرگاه این علامت ذیل = (که بلفظ آن بلفظ مساوی میباشد) مابین دو جمله نوشته شود مفهوم آن اینست که هر دو متساوی میباشند مثلاً ب + ج = ا (که بلفظ آن بالفاظ ب زائد ج مساوی ا میباشد) ظاهر میکند که عدد یکه بحرف ب + ج ازان تعبیر شده است مساویست باعدد ا

مسئله

تنبیه (۱) مابین ا ÷ ب ج و ا ÷ ب ج تمیز بکنید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 20 of 308

مفہوم مثال اول اینست کہ ا بر ب تقسیم شدہ و خارج قسمت در ج ضرب شدہ است - و مفہوم مثال دوم اینست کہ ا بر ب ج تقسیم شدہ است یعنے ہرگاہ علامت ضرب درین مقادیرے محذوف شود آن مقادیر حکم مقدار واحد دارند -

(۲) ہرگاہ معلوم کردن قیمت عددی یک جملہ جبریہ مطلوب باشد اولاً عمل ضرب و تقسیم را بواسطۂ قواعد قاعدہ ۱۰ بکنید - و بعد ازان عمل جمع و تفریق را بواسطہ قاعدۂ ۶ بانجام برسانید - مثلاً اگر قیمت عددی جملہ ا ب ج ÷ د × ی + ف × ک مطلوب باشد لازم است کہ اولاً قیمت سہ حد یعنی ا × ب × ج ÷ د × ی و ف × ک جدا جدا معلوم شود و بعد ازان حد دوم را از حد اول تفریق نمودہ حاصل تفریق با حد سوم جمع شود

تشریح اصول فوق در امثلہ فوق خواہد شد :-

مثال ۱ + اگر ا = ۲ و ب = ۳ و ج = ۵ باشد قیمت عددی ۵ ا + ۸ ب + ۷ ج را معلوم کنید

۵ ا = ۵ × ا = ۵ × ۲ = ۱۰

۸ ب = ۸ × ب = ۸ × ۳ = ۲۴

۷ ج = ۷ × ج = ۷ × ۵ = ۳۵

بنابرین ۵ ا + ۸ ب + ۷ ج = ۱۰ + ۲۴ + ۳۵

= ۳۵ + ۳۴

= ۶۹

مثال - ۲ اگر ا = ۸ ب = ۵ ج = ۲ باشد قیمت ۶ ا - ۵ ب + ۴ ج را معلوم کنید

۶ ا = ۶ × ا = ۶ × ۸ = ۴۸

۵ ب = ۵ × ب = ۵ × ۵ = ۲۵

۴ ج = ۴ × ج = ۴ × ۲ = ۸

بنابرین ۶ ا - ۵ ب + ج = ۴۸ - ۲۵ + ۸

= ۲۳ + ۸ = ۳۱

مثال ۳ - اگر م = ۳ ن = ۷ ط = ۹ و د = ۴ باشد قیمت عددی ۷ م ÷ ۲ ن × ۸ ط ÷ ۳ د را معلوم کنید وچون ابتدا عمل از طرف راست میشود لهذا طریق عمل حسب ذیل خواهد بود

۷ م را بر ۲ ن تقسیم کنید واین خارج قسمت را در ۸ ط ضرب کنید واین حاصل ضرب را بر ۳ د تقسیم کنید چون (۱) ۷ م ÷ ۲ ن = $\frac{۷ م}{۲ ن}$ - $\frac{۳ × ۷}{۲ × ۷}$ = $\frac{۳}{۲}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 22 of 308

(۲) $۹ \times ۴ \times ۳ = ۹ \times ۸ \times \frac{۳}{۴} = ۶ ۸ \times \frac{۳}{۴}$

(۳) $۳ \times ۴ \times ۹ \div ۳ د = \frac{۹ \times ۴ \times ۳}{۴ \times ۳} = ۹$

بنابرین قیمت مطلوب = ۹ میباشد -

مثال ۴ اگر ا = ۱ وب = ۲ وج = ۳ ود = ۶ وی = ۵

وف = ۰ باشد قیمت عددی جمله ذیل را معلوم کنید

ا ب ج - د ÷ ب × ا + د ی ف + ب ÷ ا × ج - د ÷ ب ج

این جمله ۵ حد دارد و حل آنها در ذیل مندرج است -

(۱) ا ب ج = ا × ب × ج = ۱ × ۲ × ۳ = ۶

(۲) د ÷ ب × ا = ۶ ÷ ۲ × ۱ = ۱ × ۳ = ۳

(۳) د ی ف = د × ی × ف = ۶ × ۵ × ۰ = ۰

(۴) ب ÷ ا × ج = ۲ ÷ ۱ × ۳ = ۳ × ۲ = ۶

(۵) د ÷ ب ج = $\frac{د}{ب ج} = \frac{۶}{۳ \times ۲} = ۱$

بنابرین قیمت مطلوب = ۶ - ۳ + ۰ + ۳ - ۱ = ۳ + ۶ - ۱ = ۸ میباشد

مثاله (۲)

اگر ا = ۲ وب = ۴ وج = ۸ باشد قیمت عددی جمله ذیل را معلوم کنید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 23 of 308

(۱) ا + ب × ج (۲) ج - ا × ب (۳) ج ÷ ب × ا (۴) ج ÷ ب ا

(۵) ج ÷ ۳ × ا (۶) ج ÷ ۳ ا (۷) ج - ب ÷ ا (۸) ا + ج ÷ ب

(۹) ۳ج - ۴ب + ۲ا (۱۰) ج - ب ÷ ا + ج ÷ ب (۱۱) ج ÷ ب ÷ ۲ × ا

(۱۲) ج ÷ ب ÷ ۲ ا (۱۳) ۵ج ÷ ۲ب (۱۴) ۵ × ج ÷ ۲ × ب

(۱۵) ۴ا ب ج ÷ ۴ × ا + ب ÷ ۲ ا (۱۶) ۸۰ ÷ ب × ج ا + ۸۰ ÷ ب ج × ا

(۱۷) ۶۴ ÷ ج × ب × ا - ۶۴ ÷ ج ب ا

(۱۸) ۳ ب ج ÷ ۱۶ ا + ۵ج ÷ ۱۶ × ا - ج ÷ ۲ ب × ب ÷ ا × ۴

(۱۹) ۱۰ ا ج ÷ ا ب × ۲ + ۳۲ ب ÷ ۲ ا ج + ۱۵ ا ج ÷ ۳ ب × ج ÷ ۵

(۲۰) ۴۸ ج ÷ ب ÷ ا × ۶ ÷ ۴ ب - ۳ ج ÷ ۲ ب ÷ ۴ × ۳ ÷ ا × ۸

+ ۶۰ ا ÷ ج ÷ ۲ × ب ÷ ۳ × ۵

اگر م = ۲ و ن = ۳ و ط = ۴ و و = ۰ و ر = ۷ و س = ۱۰ باشد

قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید۔

(۲۱) ۸م - ۳ط ÷ م ن + و × ۳ ر + ۵ س ÷ ۲ × ط

(۲۲) س × ۶ ÷ ۵م × ۸ط ÷ ۱۶ ن (۲۳) ۲۴ ÷ ۳ط × ۴ س ÷ ۵ ر × ۱۴م

(۲۴) م ن ر + ۵ و س - ۳ س ÷ م ÷ ۵ ن + ۴ ر ÷ ۳ ط × ۶م

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 24 of 308

(۲۵) ۳ × ر ÷ ۵ × س ÷ ۷ × ط − ۸ ر س ÷ م ÷ ۳ × ن ÷ ۷ ط + ۵ م ÷ ۲ ر × ۷

۳ - مضروبات یا اجزاے ضربی

اگر دو عدد یا زیادہ در یکدیگر ضرب شود یا بصورت ضرب نوشتہ شود عدد یرا کہ از ضرب آنہا حاصل میشود حاصل ضرب میگویند - و ہر یکے ازین اعداد ضرب شدہ را مضروب آن حاصل ضرب مذکور میگویند مثلاً حاصل ضرب ۳ و ۵ و ۷ = ۱۰۵ است و مضروبات ۱۰۵ ۳ و ۵ و ۷ میباشند

ہمچنین ۳ و ا و ب و لا مضروبات ۳ ا ب لا میباشند زیراکہ ۳ ا ب لا = ۳ × ا × ب × لا

۴ - امثال

عدد یکہ بصورت رقم یا بصورت حرف در ابتداے جملہ جبریہ بطور مضروب فیہ نوشتہ شود آنرا امثال آن مقدار میگویند مثلاً در ۵ ا ب ج ۵ امثال ا ب ج میباشد و ۵ ا امثال ب ج و ۵ ا ب امثال ج

تنبیہ ہرگاہ قبل از مقدار جبریہ امثال نباشد عدد ۱ مقدر شمردہ میشود مثلاً مفہوم ا یک ا است

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 25 of 308

۱۵ قوت و قوت نما

اگر مقدارے فی نفسہ چند مرتبہ ضرب شود حاصل ضرب یک قوت خاص آن مقدار میباشد مثلاً ۱×۱ و ۱×۱×۱ و ۱×۱×۱×۱ و وغیرہ ہمگی قوتہاے ۱ میباشند

۱×۱ را قوت دوم یا مربع ۱ میگویند و کتابت آن ۱ میباشد ۱×۱×۱ را قوت سوم یا مکعب ۱ میگویند و کتابت آن ۱ میباشد ۱×۱×۱×۱ را قوت چہارم میگویند و کتابت آن ۱ میباشد ۱×۱×۱×۱ .... و غیرہ اجزاراتان قوت نون ۱ میگویند و کتابت آن ۱ میباشد

آن رقم یا حرف کہ بر سر یک مقدار بطرف دست چپ برای تعبیر قوت آن نوشتہ میشود قوت نماے قوت مذکور میباشد۔ مثلاً ۲ و ۳ و ۵ و علی الترتیب قوت نماہاے ۱ و ۱ و ۱ و ۱ ہستند

تنبیہ لفظ ۱ مربع است و تلفظ ۱ مکعب و تلفظ ۱ بقوت چہارم یا چہار است و ہمچنین تلفظ ۱ نون میباشد۔ و خود مقدار ۱ را قوت اول ۱ میگویند۔ بنابرین مفہوم ۱ فی الحقیقت ۱ میباشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 26 of 308

امثلہ

مثال ۱ اگر ا = ۳ باشد پس قیمت عددی اُ - ۵ ا را معلوم کنید

اُ = ا × ا × ا × ا × ا

= ۳ × ۳ × ۳ × ۳ × ۳

= ۲۴۳

و ۱۵ ا = ۵ × ا

= ۵ × ۳

= ۱۵

بنابرین جملہ مفروضہ = ۲۴۳ - ۱۵ = ۲۲۸

مثال ۲ اگر ا = ۴ باشد پس قیمت عددی ۲ اُ - ۵ آ را معلوم کنید

۲ اُ = ۲ × ا × ا × ا × ا × ا

= ۲ × ۴ × ۴ × ۴ × ۴ × ۴

= ۲۰۴۸

و ۵ آ = ۵ × ا × ا

= ۵ × ۴ × ۴

= ۸۰

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 27 of 308

بنابرین جملہ مفروضہ = ۸ - ۲۰۴۸ = ۸۰ = ۱۹۶۸

مثال ۳ اگر ا = ۲ وب = ۳ وج = ۴ ود = ۵ باشد

پس قیمت عددی $\frac{\text{ا}^{۳}\text{ب}^{۲}\text{د}}{\text{ج}^{۲}}$ را معلوم کنید :-

جملہ مذکور = $\frac{\text{ا}\times\text{ا}\times\text{ا}\times\text{ا}\times\text{ا}\times\text{ب}\times\text{ب}\times\text{د}}{\text{ج}\times\text{ج}}$

$= \frac{۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۳\times۳\times۵}{۴\times۴}$

$= ۲\times۳\times۳\times۳\times۵ = ۲۷۰$

امثلہ (۳)

اگر ا = ۲ وب = ۳ وج = ۴ ودم = ۶ وون = ۷ وولا = ۸

وی = ۱۲ باشد قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۱) ۳ ا^{۳} (۲) ۷ لا^{۲} ÷ ی

(۳) ۲ ا^{۲} - ۷ م^{۲} (۴) ۸ ب^{۲} ج - ا ب^{۲} لا

(۵) ۵ ج^{۵} ÷ ۳ لا^{۳} (۶) ۷ ا^{۲} ب^{۲} ی ÷ م^{۳} ن

(۷) لا^{۳} ب ج^{۲} (۸) وج^{۲} لا^{۲} ی^{۲} ÷ ۸ ا^{۲} ب^{۲} م^{۲} - ب ی^{۲} ÷ ا

(۹) ۲ ا^{۲} ی ÷ لا^{۲} ی^{۲} (۱۰) ۳ ج^{۲} ا^{۲} ی^{۲} ÷ لا^{۲} ب^{۲}

(۱۱) اگر لا = ۸ باشد پس قیمت عددی ۴۰ + ۶۶ لا^{۲} - ۲۱ لا + لا^{۶} - ۶۵ لا^{۲} را معلوم کنید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 28 of 308

(۱۲) اگر لا = ۷۵، باشد پس قیمت عددی ۸لا۲ + ۶لا۲ + ۱۱لا + ۱۳لا + ۲۹ را معلوم کنید

(۱۳) اگر م = ۴ باشد پس قیمت عددی ۳۵م۳ − ۴م۲ + ۷م + ۱۵م − ۳۴م۲ − ۳ را معلوم کنید۔

(۱۴) اگر ن = ۶، ۲ باشد پس قیمت عددی ۲۵ن۳ − ۲۷ + ۲۰ن + ۶۸ن۲ − ۹۹ن۳ را معلوم کنید

(۱۵) اگر ی = ۴، ۳ باشد پس قیمت عددی ۵۰ی۲ − ۱۵ی۳ + ۳۵ی − ۶۳ی۲ − ۱۹ را معلوم کنید۔

(۱۶) اگر ک = ۵، ۱۷۳ باشد پس قیمت عددی ۶۴ک۵ − ۵۵ک۴ + ۳۲ک۳ − ۱۲۱ک۲ + ۶۴ک − ۴ک۰ + ۷۹ را معلوم کنید

قیمت ا۲ + ب۲ + ج۲ − ۳ ا ب ج را در صورتہائے ذیل معلوم کنید:۔

(۱۷) چون ا = ۲۴ و ب = ۲۷ و ج = ۲۹

(۱۸) چون ا = ۶۲۵، ۳ و ب = ۴۷۶۲۵ و ج = ۵، ۶۲۵

(۱۹) چون ا = ۴۴ ۳/۴ و ب = ۵۱ ۳/۴ و ج = ۵۸ ۳/۴

(۲۰) چون ا = ۱۶۵۹ و ب = ۱۶۶۷ و ج = ۱۶۷۴

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 29 of 308

۱۶- جذرها

جذر یک مقدار آن مقدار میباشد که مربع آن مساوی آن باشد و ازین جذر را بعلامت $\sqrt{}$ یا محض بعلامت $ر$ تعبیر کرده میشود پس بدین طریق $۲ = \sqrt{۴}$ زیرا که $۲^۲ = ۴$ میباشد-

جذر مکعب یک مقدار آن مقدار میباشد که مکعب آن مساوی آن باشد و ازین جذر مکعب بعلامت $\sqrt[۳]{}$ یا $ر^۳$ تعبیر کرده میشود پس بدین طریق $۲ = \sqrt[۳]{۸}$ زیرا که $۲^۳ = ۸$ میباشد

و همین طریق جذر مرتبه نون یک مقدار آن مقدار میباشد که قوت نون آن مساوی آن باشد و ازین جذر مرتبه نون بعلامت $\sqrt[ن]{}$ یا $ر^ن$ تعبیر کرده میشود- بدین طریق $۲ = \sqrt[۵]{۳۲}$ زیرا که $۲^۵ = ۳۲$ و $۳ = \sqrt[۴]{۸۱}$ زیرا که $۳^۴ = ۸۱$ و علی هذا القیاس

علامت ذیل $\sqrt{\quad}$ را اشارت جذر میگویند

۱۷- خطوط قوسی یا (وحدانی)

جمله علامات ذیل را $( )$ و $\{ \}$ و $[ ]$ خطوط قوسی میگویند و هر یک ازانها نام جداگانه دارد چنانچه علامت اول را قوس خورد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 30 of 308

ودوم راقوس میانه یا معترضه وسوم راقوس کلان گفته میشود -
هرگاه جملهٔ جبریه درمین خطوط قوسی محدود باشد آن جمله حکم مقدار واحد دارد
مثلاً مفهوم (ا + ب) لا اینست که عدد لا در عدد ا + ب ضرب شود
برخلاف آن مفهوم ا + ب لا اینست که لا در ب ضرب شود
واین حاصل ضرب با ا جمع شود -
بنابرین جمله د + (ا + ب) لا ذوحدین است که دوحد آن دو (ا + ب) لا
میباشند وبرهمین منوال ج - {د + (ا + ب) لا} ذوحدین است
که دوحد آن ج و {د + (ا + ب) لا} میباشند برخلاف این اگر خطوط
قوسی محذوف شوند ج - د + ا + ب لا ذوحدود کثیره میگردد
وحدود آن ج و د و ا و ب لا خواهند بود بعض اوقات برجای
اینکه جملهٔ جبریه درخطوط قوسی محدود شود یک خط عرضی باین شکل —
که حکم خطوط قوسی دارد برکل آن جملهٔ مذکوره رسم میشود - مثلاً در مفهوم
ا - ب — ج و ا - (ب - ج) هیچ تفاوت نیست
تنبیه - مابین ا + ب — و ا (ا + ب) و ا + ب چه فرق
موجود است - مفهوم هریک از دو جملهٔ اول اینست که جذر آن عدد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 31 of 308

گرفته شود که تعبیر ازان به ۱ + ب شده است - برخلاف آن مراد جمله سوم ایست که ب با جذر ا جمع شود - و برهمین منوال ما ب و ما ا ب یک مفهوم دارند یعنی مفهوم آنها جذر حاصل ضرب ا و ب است برخلاف آن ما ا ب این مفهوم دارد که ب در جذر ا ضرب شود -

امثله

مثال - اگر ا = ۲ و ب = ۴ و ج = ۹ باشد پس قیمت عددی جملهای ذیل را معلوم کنید

ا ج ب + ا ب + ۵ و ا ج ب + ا (ب + ۵) و ۲ ا ب + ۳ ا

(۱) ا ج ب + ا ب + ۵ = ۴ × ۹ ا + ۴ ا + ۵ = ۴ × ۳ + ۲ + ۵

= ۱۲ + ۲ + ۵ = ۱۹

(۲) ا ج ب + ا (ب + ۵) = ۴ × ۹ ا + (۴ + ۵) ا

= ۳۶ ا + ۹ ا

= ۴ + ۶ = ۹

(۳) ۲ ا ب + ۳ ا = ۲ × ۴ ا + ۳ ا

= ۲ × ۲ + ۸ ا

= ۴ + ۲

= ۶

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 32 of 308

مثال ۲ + اگر ا = ۳ و ب = ۵ و ج = ۸ و د = ۱۲ و ی = ۲۰ باشد
پس فرق مابین قیمت عددی {ا ج + ب² − ا (ی − د)} و {ا ج
+ ب² − ا (ی − د)} معلوم کنید۔

جملۂ اول = ۳ × {۸ + ۵² − ۳ × (۲۰ − ۱۲)}

= ۳ × {۸ + ۲۵ − ۸ × ۳}

= ۳ × {۸ + ۲۵ − ۲۴}

= ۳ × ۹ = ۲۷

جملۂ دوم = ۳ × {۸ + (۵ − ۳)² × (۲۰ − ۱۲)}

= ۳ × {۸ + ۴ × ۲۲}

= ۳ × {۸ + ۱۷۶}

= ۳ × ۱۸۴ = ۵۵۲

بنابرین فرق مطلوب = ۵۵۲ − ۲۷ = ۵۲۵

مثال ۳ ۔ گرم = ۱۰ اون = ۸ وط = ۲ وق = ۱۲ وں = ۱۵ اباشد پس فرق
مابین قیمت عددی {ں رم − ۳ ق − ن (طق − م)} ÷ ط} × (ں − م − ط)
و قیمت عددی {ں رم − ۲ ق − ن (طق − م)} ÷ ط} × ں − م − ط را

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 33 of 308

دریافت کنید۔

جملہ اول = {۱۵×۱۰-۲×۱۲-۸×(۲×۱۲-۱۰)}÷۲}×(۱۵-۱۰-۲)

= {۱۵۰-۲۴-۸×۱۴}÷۲}×۳

= {۱۲۶-۱۱۲}÷}×۳

= ۳×{۲÷۱۴}

= ۳×۷

= ۲۱

وجملہ دوم = {۱۵×۱۰-۲×(۱۲-۸)(۲×۱۲-۱۰)}÷۲}×۱۵-(۱۰-۲)

= {۱۵۰-۲×۴×۱۴}÷۲}×۱۵-۸

= {۱۵۰-۱۱۲}÷۲}×۱۵-۸

= ۱۵×{۲÷۳۸}-۸

= ۱۹×۱۵-۸ = ۲۸۵-۸ = ۲۷۷

بنابرین فرق مطلوب = ۲۷۷-۲۱ = ۲۵۶

مسئلہ (۴)

اگر ا = ۵ و ب = ۲ و ج = ا و د = ۴ و ی = ۹ و ف = ۰ و م = ۷ و ن = ۳

و ط = ۸ باشد قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 34 of 308

(۱) $\overline{\text{تاب دط}}$ (۲) $\overline{\text{تاط د}}$ (۳) $\overline{\text{تاط ن}}$

(۴) $\overline{\text{۶ تا(ی ن}^{۲})}$ (۵) $\overline{\text{۴ تا۲ د}}$ (۶) ۴

(۷) $\overline{\text{۲ تاب ط}^{۲}}$ (۸) $\overline{\text{۲ تا۲ ط}^{۲}}$ (۹) $\overline{\text{ا + ب تای}}$

(۱۰) $\overline{\text{ا + ب تای}}$ (۱۱) $\overline{\text{۳ تاج + ط}}$ (۱۲) $\overline{\text{۳ تاج + ط}}$

(۱۳) $\overline{\text{۳ تا(ج + ط)}}$ (۱۴) $\overline{\text{۳ تا۸(ن + ۳ط)}}$ (۱۵) $\overline{\text{۳ تا۸(ن + ۳ط)}}$

(۱۶) $\overline{\text{ف تام + ی}}$ (۱۷) $\overline{\text{ف تام + ی}}$ (۱۸) $\overline{\text{۳ ی − (۲ د − ب)}}$

(۱۹) $-۲(د - ب)$ (۲۰) $۳(ی - ۲د) - ب$ (۲۱) $(۳ی - ۲)د - ب$

(۲۲) $\overline{(۳ی - ۲)د - ب}$ (۲۳) $۳\{ی - (۲د - ب)\}$

(۲۴) $۳(ی - ۲)(د - ب)$ (۲۵) $۷ط - (ن^{۲} - ب^{۲})$

(۲۶) $(۷ط - ن)^{۲} - ب^{۲}$ (۲۷) $۷ط - (ن^{۲} - ب^{۲})$

(۲۸) $۷(ط - ن)^{۲} - ب^{۲}$ (۲۹) $\{۷ط - (ن^{۲} - ب)\}^{۲}$

(۳۰) $\overline{\text{تاط + ۳ج + ۴د}}(ج + ن)^{۲}$ (۳۱) $\overline{\text{تاط + ۳ج + ۴د}}(ج + ن)^{۲}$

(۳۲) $\overline{\text{تاط + ۳ج + ۴د}}(ج + ن)^{۲}$ (۳۳) $\overline{\text{تاط}} + (۳ج + ۴د)(ج + ن)^{۲}$

$+ ۳\{(ج + ۴)د ج + ن^{۲}\}$

شد

اگر لا = ۲ وی = ۱ وع = ۴ وا = ۶ ود = ۸ وج = ۵ ون = ۹ وط =

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 35 of 308

قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید:-

(۳۵) ا (لا + ی)^{۲} (ا - ج - ع)^{۳}

(۳۶) ۴{ن - ۱ (د - ا + ط)} ۴ ۴{ن - ا (د - ل) + ط}

(۳۷) ۵{ج + لا + ی (ن = د - ع)} ۵{(ج + لا + ی) ن - د - ع}

(۳۸) [لا + ی]^{۲} {ا ط - ع (ج - ا - لا)} [لا + ی]^{۲} {(ا ط - ع) ج - ل} لا

۱۸- حدود متشابہہ وغیر متشابہہ

ہرگاہ چند حدود در ہیچ تفاوت نداشتہ باشند یا محض در امثال تفاوت داشتہ باشند آنہا را حدود متشابہہ میگویند مثلاً ۳ ا لا^{ی} و ۵ ا لا^{ی} حدود متشابہہ میباشند- و ۳ ا لا^{ی} و ۵ ا لا^{ی} حدود غیر متشابہہ و ہمین منوال ا ب ج و ۵ ا لا ب دو ۷ ا ب^{۲} و ج^{۲} دلا ہمگی جملہائے بسیط یا حدود غیر متشابہہ میباشند-

۱۹- مفہوم خاص اشارت و اشارات متحدہ و مختلفہ

اشارت اکثر محض برائے تعبیر + یا - استعمال میشود- مثلاً اگر سوال شود کہ اشارت این حد چیست در جواب آن زائد یا ناقص گفتہ خواہد شد یعنی ہر یک از اشارات زائد و ناقص کہ قبل ازان حد باشد در جواب

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 36 of 308

گفته میشود ونیز دو اشارت وقتی متحد گفته میشوند که هر دو زائد یا هر دو
ناقص باشند ورنه اشارات مختلفه گفته میشوند مثلاً در جمله ا الف + ب لا
ج ی + د - ف اشارات حد سوم و پنجم ونیز حد و اول و دوم و چهارم
متحد میباشند - وبرخلاف این اشارات حد و دوم و سوم ونیز حد و
چهارم و پنجم مختلف میباشند -

۲۰ - درجه حاصل ضرب

هرگاه یک حرف خاص ن بار در حدے مضروب گردد آن حد را
بلحاظ آن حرف حد درجه ن میگویند - مثلاً حد ه ا ب ج بلحاظ حرف ا
حد درجه پنجم میباشد وبلحاظ حرف ب حد درجه دوم وبلحاظ حرف ج حد
درجه اول - باز درجه یک حد بلحاظ چند حرف یا همه حروفیکه در آن حد
مندرج باشند آنقدر میباشند که مساوی مجموع قوت نماهاے حروف
مذکوره شود مثلاً ه ا ب ج بلحاظ ا و ب حد درجه هفتم میباشد وبلحاظ
ا و ب و ج حد درجه هشتم - ونیز اگر در جمله مرکبه درجات حدود مختلف باشند
پس درجه جمله مذکوره مساوی درجه آن حد شمار کرده میشود که نسبت بهمه
حدود باقی مانده درجه آن زیاده تر باشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 37 of 308

۲۱- جملهٔ متجانس

هرگاه در جملهٔ جبریه درجهٔ هر حد یکسان باشد آن جمله را جملهٔ متجانس میگویند مثلاً ۵ آ ب - ۷ آ ب ج + ۸ ب ج جملهٔ متجانس میباشد چرا که هر حد این جمله حد درجه چهارم است

(تنبیه امثال در درجه حد شمار کرده نمیشود)

۲۲- اشارات عظم و اصغر ﴿ و ﴾

هرگاه یکی ازین دو علامت ﴿ و ﴾ مابین دو مقدار نوشته شود مفهوم آن اینست که مقدار طرف باین زاویه کلانتر از مقدار داخل زاویه خوردتر است مثلاً مفهوم ا + ب ﴿ ج + د اینست که ج + د از ا + ب زیاده تر و ا + ب از ج + د خوردتر است

این علامت ذیل ∴ بطور مخفف لفظ چونکه استعمال میشود -

و این علامت ذیل ∵ بطور مخفف لفظ بنابران استعمال میشود

باب دوم

مقادیر مثبت و مقادیر منفی

۲۳- مفهوم علامت مثبت و منفی

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 38 of 308

در علم حساب علامات مثبت و منفی در ذات اعداد شمولیت ندارند بلکه
حکم یک عامل جداگانه را دارند یعنی هرگاه این علامات با عدد نوشته
میشوند پس در انصورت ان تعلق و ربط را ظاهر میکنند که عدد مذکور با اعداد
دیگر داشته باشد - مثلاً ۹ + ۷ = ۱۶ و ۹ - ۷ = لیکن تنها + ۷ و - ۷
هیچ مفهوم ندارد - لاکن در علم جبر و مقابله این علامات برای اظهار
این دو مفهوم استعمال میشوند یعنی اول اینکه حکم عامل را دارند دوم
اینکه در ذات عدد بطور صفت هم شمولیت دارند -
مثلاً فرض کنید که + ۷ یک چیز را در یک صورت خاص ظاهر میکند
پس - ۷ همان چیز را در صورتیکه نقیض صورت اوّل باشد ظاهر خواهد
کرد - مثلاً اگر + ۷ نفع هفت روپیه را ظاهر کند پس - ۷ از نقصان
هفت روپیه تعبیر خواهد کرد یا اگر نه + ۷ نقصان هفت روپیه تعبیر کند
- ۷ نفع همانقدر روپیه را ظاهر خواهد کرد - علاوه بران ظاهر است
که اگر از دو مقدار متساوی باشارات مختلفه یکجا تعبیر شود آنها یکدیگر را
محو خواهند کرد و حاصل آنها صفر خواهد بود و ظاهر است که این
صفر بصورت معدوم شدن معمول های مذکور پیدا میشود -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 39 of 308

مثلاً فرض کنید که یک شخص او لا نفع هفت روپیه را حاصل میکند و بعد
ازان نقصان هفت روپیه را پس ظاهر است که شخص مذکور بحالت
اصلی خود مانده است نه سود کرده است و نه زیان لهذا این امر را
بواسطه مساوات ذیل ۷ - ۷ = ۰ ظاهر میکند - ولیکن در علم جبر و مقابله
علاوه برین همین مفهوم معانی دیگر نیز دارد - مثلاً فرض کنید که یک
شخص اولا نفع هفت روپیه را حاصل کرده است و بعد ازان نقصان
۹ روپیه پس در علم جبر و مقابله حالت آنشخص بلحاظ نفع و نقصان روپیه
۷ - ۹ یا ۷ - ۷ - ۲ یا ۰ - ۲ یا - ۲ خواهد بود و ظاهر است که مفهوم - ۲
بواسطه مفهوم وسیع مقادیر منفی چنانکه در فوق ذکر آمده فهمیده میتوانیم
و فی الفور گفته میتوانیم که آنشخص نقصان دو روپیه کرده است

۲۴ - چند امثله دیگر در باب مسئله فوق

و برهمین منوال بسیار نظائر دیگر خود بخود در ذهن طالب العلم پیدا خواهد شد
مثلاً فرض کنید که از سطح زمین بر کوه بالا میشویم و باعتبار بلندی این فاصله
بلندی را مثبت تعبیر میکنیم پس برعکس آن اگر ما در یک چاه یا کان درایم
ظاهر است که این مسافت که درون چاه مذکور یا کان مذکور است منفی

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 40 of 308

خواہد بود - وہمچنین فرض کنید کہ کابل را مبدأ قرار دادہ سوی مشرق تا ۱۰ میل میرویم واین ۱۰ میل را مثبت میگوئیم پس اگر از کابل سوی مغرب مسافت ۱۰ میل راطی کنیم این ۱۰ میل موخر الذکر منفی خواہد بود - وعلی ہذا القیاس

۲۵ - تخصیص مقادیر مثبت ومنفی

از بیان فوق ظاہر است کہ اعداد یا حروف کہ پیش انہا اشارت + باشد یا ہیچ علامت نباشد مقادیر مثبت را ظاہر میکنند وبرخلاف آن اعداد یا حروف کہ پیش آن اشارت - باشد مقادیر منفی را تعبیر میکنند مثلاً ہریکے از ۴ و ۶ و ا و + ب مقدار مثبت میباشد - وہریکے از - ۴ و - ۶ و - ا و - ب و - ج مقدار منفی میباشد -

تنبیہ ۱ - قیمت مطلق یک عدد آن مقدار است کہ بغیر لحاظ خاصیت مثبت ومنفی عدد مذکور گرفتہ شود مثلاً قیمت + ۴ و - ۴ یکسان است یعنی ۴ است

تنبیہ ۲ - طالب العلم را باید کہ مفہوم فقرہائے ذیل را بغور ذہن نشین خود نماید -

(۱) "نفع - ۲۰ روپیہ" (۲) "ارتفاع - ۸ انچ" (۳) "مسافت - ۵ میل بطرف شمال

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 41 of 308

وعلے ہذا القیاس۔ مفہوم فقرہ اول "نقصان ۲۰ روپیہ" است
ومفہوم فقرہ دوم "عمق ۸ انچ" است ومفہوم فقرہ سوم "مسافت
۵ میل بطرف جنوب" است

مسئلہ (۵)

(۱) اگر واحد قیاسی نقد ۲ روپیہ باشد معلوم کنید کہ "نفع ۱ = — ۵۰"
چہ معنی دارد؟

(۲) اگر از نقصان ۶۰ روپیہ بواسطۂ عدد ۶۰ تعبیر کردہ شود معلوم کنید کہ
از نفع ۷۰ روپیہ بکدام عدد تعبیر خواہد شد؟

(۳) اگر از آمدنی ۸۰ روپیہ بعدد ۲۰ تعبیر کردہ شود معلوم کنید کہ از قرض ۱۰۰
روپیہ بکدام عدد تعبیر خواہد شد؟

(۴) اگر از قرض ۲۰۰ روپیہ بعدد ۲۵ تعبیر کردہ شود معلوم کنید کہ از آمدنی
۸۰۰ روپیہ بکدام عدد تعبیر خواہد شد؟

(۵) اگر از مسافت ۹۰ میل بجانب شمال بعدد ۸ تعبیر کردہ شود معلوم
کنید کہ از مسافت ۱۵۰ میل بجانب جنوب بکدام عدد تعبیر خواہد شد

(۶) اگر سطح یک دریا در یکروز ۸ انچ بالا شود و روز دوم ۶ انچ فرو رود بانہ

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 42 of 308

روز سوم ۱۰ انچ بالا پس معلوم کنید که اگر ازین کمی و بیشی بلفظ "بالا" تعبیر کرده شود و واحد قیاسی طول ۲ انچ باشد پس تعبیر ازین کمی و بیشی سه روز مذکور بکدام عدد خواهد شد؟

(۷) یک شخص سال اول نفع ۳۰ روپیه حاصل کرد و سال دوم نقصان ۲۰ روپیه و سال سوم نقصان ۴۰ روپیه لاکن سال چهارم باز نفع ۶۰ روپیه حاصل کرد پس معلوم کنید که اگر ۲ روپیه واحد قیاسی نقد باشد از نفع هر سال مذکور چگونه تعبیر کرده خواهد شد؟

(۸) در سوال هفتم معلوم کنید که از نقصان آنشخص چگونه تعبیر کرده خواهد شد؟

باب سوم

جمع

۲۶- تعریف

هرگاه دو یا زیاده مقادیر یکجا کرده شود حاصل آنها را مجموع و یا حاصل جمع میگویند و طریق دریافت نمودن این مجموع را جمع

تنبیه- چون مقادیر منفی در علم حساب هیچ معنی ندارند بنابرین ظاهر است که جمع جبر و مقابله از جمع حساب تفاوت دارد لهذا هرگاه

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 43 of 308

لفظ جمع در جبر و مقابله استعمال شود لازم نیست که کل مقادیر جمع شده مقادیر مثبت باشند

۲۷- حاصل جمع یک مقدار مثبت یا مقدار مثبت دیگر

ب ا و ا ب

فرض کنید که ب ب یک سرک است و مسافتهائیکه از مبدأ او بطرف راست میباشند مثبت و مسافتهائیکه بطرف چپ میباشند منفی شمار کرده میشوند و نیز فرض کنید که و و ا و ب سه نقطه بران سرک واقع هستند و و ا ۲ میل و ا ب سه میل است پس اگر یک میل واحد قیاسی مسافت باشد و مقام ا و ب مطابق شکل فوق مسافت و ا + ۲ میل و ا ب + ۳ میل خواهد بود - پس اگر یک شخص از و روانه شده تا ا در یک ساعت و از ا تا ب در یک ساعت دیگر برسد ظاهر است که آن شخص در دو ساعت مذکور مسافت و ب یعنی + ۵ میل را طی کرده است - پس چونکه (مسافت طی شده ساعت اول) + (مسافت طی شده ساعت دوم) = (مسافت طی شده در دو ساعت مذکور میباشد) لهذا (+ ۲) + (+ ۳) = ۵ میباشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 44 of 308

بنابرین علی العموم (+ا) + (+ب) = + (ا + ب) یا اختصاراً (ا) + (ب) = ا + ب پس ہرگاہ دو مقدار مثبت جمع کردہ شوند مجموع آنہا یک مقدار مثبت میباشد کہ قیمت مطلق آن برابر مجموع قیمت ہای مطلق مقادیر مذکور میباشد

۲۸- حاصل جمع یک مقدار منفی با مقدار منفی دیگر

فرض کنید کہ در شکل فوق وا = ۲ میل و اَب = ۳ میل است و اینکہ اَ طرف چپ وا است و ب طرف چپ اَ چنانکہ در شکل ظاہر است پس وا را - ۲ و اَب را - ۳ تعبیر خواہد کرد

پس اگر یک شخص ا رو روانہ شدہ بہ اَ در یک ساعت و از اَ تا ب در یک ساعت دیگر برسد ظاہر است کہ آنشخص در دو ساعت مذکور مسافت وب یعنے - ۵ میل را طی کردہ است؟

پس چونکہ (مسافت طی شدہ ساعت اول) + (مسافت طی شدہ ساعت دوم) = (مسافت طی شدہ در دو ساعت مذکور میباشد)

لہذا (-۲) + (-۳) = - ۵ پس علی العموم (-ا) + (-ب) = - (ا + ب) لہذا ہرگاہ دو مقدار منفی جمع کردہ شود مجموع آنہا مقدار منفی میباشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 45 of 308

وقیمت مطلق آن برابر مجموع قیمت ہاے مطلق مقادیر مجموعۂ مذکورہ بالا خواہد بود۔

مثال ۱ مجموع ۱ و ب ج و آ ب را معلوم کنید ا = ۲ و ب = ۳ و ج = ۵

پس ا ب ج = ۲ × ۳ × ۵ = ۱۵

و آ ب = ۲² × ۳ = ۱۲

بنابرین (-ا) + (-ب ج) + (-آ ب) = (-۲) + (-۱۵) + (-۱۲)

= -(۲ + ۱۵ + ۱۲) = -۲۹

مثال ۲۔ اگر ا = ۳ و ب = -۲ و ج = ۴ و د = ۵ و ف = -۶ و ک = -۸

باشد قیمت جملۂ ذیل را معلوم کنید:-

(-۳ ج) + (-آ د) + (ب + ف + ک)

ب + ف + ک = (-۲) + (-۶) + (-۸) = -(۲ + ۶ + ۸) = -۱۶

نیز ۳ ج = ۱۲

و آ د = ۳² × ۵ = ۲۷ × ۵ = ۱۳۵

لہذا جملۂ مفروضہ = (-۱۲) + (-۱۳۵) + (-۱۶) = -(۱۲ + ۱۳۵ + ۱۶)

= -۱۶۳

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 46 of 308

مسئلہ (۶)

(۱) مجموع -۳ و -۷ و -۱۲ را معلوم کنید

(۲) مجموع ا و $-ب$ و $-۵ج$ را معلوم کنید ا $= -۵$ و ب $= ۳$ و ج $= ۲$

(۳) مجموع -۵ و ا و ب را معلوم کنید ا $= -۶$ و ب $= -۲۰$

و نیز این مجموع را با -۱۰ جمع کنید

(۴) مجموع $-ا + (ب + ج)$ را معلوم کنید ا $= ۵$ و ب $= -۸$ و ج $= -۶$

(۵) قیمت جملہ ذیل را معلوم کنید $(-آب) + (-بج) + \{-(آ - ب)\}$

چون ا $= ۴$ و ب $= ۲$ و ج $= ۱$ باشد

(۶) مجموع $-۳آب$ و دوی و $-۲۰ج$ و $(د + ی)$ را معلوم کنید

ا $=$ ا و ب $= ۲$ و ج $= ۳$ و د $= -۴$ و ی $= -۵$

(۷) مجموع ارقام ذیل را معلوم کنید :-

$-آ(ب - ج)$ و $-ب(ج - ا)$ و $-ج(ب - ا)$

چون ا $= ۲$ و ب $= ۵$ و ج $= ۴$

(۸) قیمت جملہ ذیل را معلوم کنید :-

$\{-(لا - ی)\} + \{-(لا - ی)\} + \{-(لا - ی)\}$ چون لا $= ۵$ و ی $= ۲$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 47 of 308

(۹) مجموع جملہاے ذیل را معلوم کنید:-

$-لا^{ی}(ی-ع)$ و $-ی^{ی}(ع-لا)$ و $ع^{ی}(ی-لا)$

چون لا = ۳ و ی = ۶ و ع = ۵

(۱۰) مجموع جملہاے ذیل را معلوم کنید

$-\{آ^{ی} \div ب^{ی} - ج^{ی}\}$ و $-\{آ^{ی} \div (ب^{ی} - ج^{ی})\}$ و $-\{آ^{ی} - ب^{ی} \times ج^{ی}\}$ و

$-\{(آ^{ی} - ب^{ی}) \times ج^{ی}\}$ چون ا = ۶۰ و ب = ۴ و ج = ۲

۲۹- حاصل جمع مقدار منفی و مقدار مثبت

در شکل فقرہ ۲۷ فرض کنید کہ یک شخص از ورودانہ شدہ در ساعت اول تا ب میرود و در ساعت دوم از ب تا ا پس مسافتیکہ در ساعت اول طی شدہ +۵ میل میباشد و مسافتیکہ در ساعت دوم طی شدہ -۳ میل میباشد بنابرین در اختتام ساعت دوم آن مسافت را کہ از مقام و طی شدہ از (+۵) + (-۳) تعبیر خواہد کرد۔ لیکن آنشخص در اختتام دو ساعت از ورودبمسافت واے یعنے ۲ میل میرسد لہذا (+۵) + (-۳) = +(۵-۳)

باز اگر آنشخص از ورودانہ شدہ در ساعت اول تا ب برود و در ساعت دوم از ب تا ا۔ پس مسافتیکہ در ساعت اول طی شد +۵ میل میباشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 48 of 308

ومسافتیکه در ساعت دوم طی شده - ۷ میل لهذا مسافت آنشخص ازو
در اختتام ۲ ساعت (+۵) + (-۷) خواهد بود لیکن ظاهر است که در
اختتام دو ساعت آنشخص ازو بمسافت واقع یعنی -۲ میل میرسد
لهذا (+۵) + (-۷) = -۲ = -(۷-۵)
پس علی العموم (+ا) + (-ب) = +(ا-ب) یا -(ب-ا)
بقرار نقصان وزیادت ب نسبت به ا
پس اگر یک مقدار مثبت با یک مقدار منفی جمع شود علامت حاصل
جمع مثبت یا منفی میباشد بقرار این امر که قیمت مطلق مقدار منفی از
قیمت مطلق مقدار مثبت کم یا زیاده باشد و قیمت مطلق حاصل جمع
دائما مساوی فرق قیمت های مطلق مقادیر مجموعه میباشد
نتیجه ا - چونکه ا + (-ب) = -(ب-ا) بشرطیکه ب از ا
کلان باشد بنابرین اگر ا = ۰ باشد + (-ب) = -ب خواهد بود
یعنی مفهوم جمع کردن مقدار منفی اینست که قیمت مطلق آن تفریق شود
و برعکس آن مفهوم تفریق مقدار مثبت اینست که همان مقدار منفی که
که مقدار مطلق آن مساوی مقدار مثبت مذکور است جمع شود -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 49 of 308

تنبیه - بنابرین دریافت نمودن قیمت (ا - ب) وقتیکه ب
از ا زیاده باشد آسان خواهد بود چراکه ا - ب همیشه مساوی ا + (- ب)
میباشد واگر ب از ا زیاده باشد این جمله ثانی مساوی - (ب - ا) میشود
لهذا ۳ - ۸ = ۳ + (- ۸) = - (۸ - ۳) = - ۵

نتیجه ۲ از نتیجه اول ظاهر است که مجموع چند مقدار باین طریق ظاهر
کرده میشود که آنها یکے بعد از دیگر با اشارات مختلفه علے الترتیب
نوشته شود - مثلاً ا - ب + ج - د مساوی ا + (- ب) + ج + (- د)
میباشد

مثال - اقیمت ا - ۳ ب + ۲ ج - ۷ د را معلوم کنید
اگر ا = ۲ و ب = ۴ و ج = ۳ و د = ۱

ا - ۳ ب + ۲ ج - ۷ د = ا + (- ۳ ب) + ۲ ج + (- ۷ د)

= ۲ + (- ۱۲) + ۶ + (- ۷)

= - ۱۰ + ۶ + (- ۷)

= - ۴ + (- ۷)

= - ۱۱

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 50 of 308

مثال ۲- قیمت $أ^{۲}ب - بج^{۲} + ج^{۲}د - د^{۲}ا - بج^{۲}$ را معلوم کنید

اگر ا = ۱ و ب = ۲ و ج = ۳ و د = ۴

جملهٔ مفروضه $= (۱^{۲} \times ۲) - (۲^{۲} \times ۳) + (۳^{۲} \times ۴) - (۴^{۲} \times ۱) - (۳^{۲} \times ۲)$

$= ۲ - ۱۲ + ۳۶ - ۱۶ - ۱۸$

$= -۱۰ + ۳۶ - ۱۶ - ۱۸$

$= ۲۶ - ۱۶ - ۱۸$

$= ۱۰ - ۱۸$

$= -۸$

امثله (۷)

(۱) مجموع ۷ و -۴ را معلوم کنید (۲) مجموع ۸ و -۱۳ را معلوم کنید

(۳) قیمت ب - ج + د را معلوم کنید اگر ب = ۱۳ و ج = ۵ و د = ۸

(۴) مجموع ۳ ا و - ۵ ب و ج و د و ۴ ی را معلوم کنید

اگر ا = ۲ و ب = ۳ و ج = ۴ و د = -۷ و ی = ۳

(۵) قیمت جملهٔ ذیل را معلوم کنید :-

۳م - ۵ن + ۶ق + ر اگر م = ۴ و ن = ۶ و ق = ۲ و ر = -۸

(۶) قیمت جملهٔ ذیل را معلوم کنید :-

۲ لأی - ۳ ی لا - ۵ لأی + لأی اگر لا = ی = ۲

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 51 of 308

(۷) مجموع جملهائے ذیل را معلوم کنید :-

$-\frac{1}{2}$ج وب $\frac{1}{2}$د و ج ب $\frac{1}{2}$و - $\frac{1}{2}$د اگر ا = ۲ و ب = ۵ و ج = ۳ و د = ۶

(۸) قیمت جملهٔ ذیل را معلوم کنید :-

$\frac{1}{2}$ - ۳ $\frac{1}{2}$ب + ۳ ا $\frac{1}{2}$ب - ب $\frac{3}{2}$ اگر ا = ۲ و ب = ۵

(۹) قیمت جملهٔ ذیل را معلوم کنید :-

م^{۴} - ۴ م^{۳}ن + ۶ م^{۲}ن^{۲} - ۴ م ن^{۳} + ن^{۴} اگر م = ۲ و ن = ۴

(۱۰) قیمت جملهٔ ذیل را معلوم کنید :-

$\frac{1}{2}$ - ۵ $\frac{1}{2}$ی + ۱۰ $\frac{1}{2}$ی^{۲} - ۱۰ $\frac{1}{2}$ی^{۳} + ۵ $\frac{1}{2}$ی^{۴} - ی^{۵} اگر $\frac{1}{2}$ = ۵ و ی = ۷

۳۰ هرگاه چند مقدار جمع شوند بهتر ترتیبیکه نوشته شوند حاصلِ آنها یکسانست

فرض کنید که یک شخص از یک مبدأ معین سوے شمال ۶ میل رأ میرود و بعد ازان پس بهمان سمت مذکور مسافت ۸ میل راسوے جنوب طی میکند پس در اختتام سفر مسافت شخص مذکور از مبدأ ۲ میل بطرف جنوب خواهد بود -

باز اگر آنشخص اولاً ۸ میل بسوے جنوب مبدأ برود و بعد ازان ۶ میل سوے

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 52 of 308

شمال برہمان سمت مذکور برود درینصورت نیز مسافت الشخص از مبدا
۲ میل بطرف جنوب خواہد بود۔

بنابرین ۶ + (−۸) = (−۸) + ۶ زیرا کہ ہریکے ازانہا مساوی ۲ میباشد
لہذا اختصاراً ۶ − ۸ = − ۸ + ۶ و علے ہذا القیاس

بنابرین علی العموم ا − ب = − ب + ا باز چونکہ ۲ − ۱۰ + ۶ = − ۸ + ۶ = − ۲
و نیز − ۱۰ + ۶ + ۲ = − ۴ + ۲ = − ۲ بنابرین ۲ − ۱۰ + ۶ = − ۱۰ + ۶ + ۲

بنابرین علی العموم ا − ب + ج = − ب + ج + ا

و برہمین منوال ا − ب + ج − د + ی − ف = ا + ج + ی − ب − د − ف

= − ب + ی − د − ف + ج + ا

۳۱ ہرگاہ جمع چند مقدار مطلوب باشد و آنہارا بچند حصہ تقسیم نمودہ
جمع کنیم مجموع حصص مذکورہ مساوی مجموع آن مقادیر خواہد بود

مثلاً ۳ − ۷ − ۸ + ۶ − ۴ = ۲ + ۴ − ۶ + ۸ − ۴ + ۶ − ۴ + ۲

= − ۱۲ + ۶ − ۴ + ۲

= − ۶ − ۴ + ۲

= − ۱۰ + ۲

= − ۸

و (۳ − ۷) + (− ۸ + ۶) + (− ۴ + ۲) = − ۴ + (− ۲) + (− ۲) = − ۸

و ۳ + (− ۷ − ۸ + ۶) + (− ۴ + ۲) = ۳ + (− ۹) + (− ۲) = − ۸

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 53 of 308

۳+(-۷-۸)+(۶-۴)+۲=۳+(-۱۵)+۲+۲=-۸

بنابرین ۳-۷-۸+۶-۴+۲

=(۳-۷)+(-۸+۶)+(-۴+۲)

=۳+(-۷-۸+۶)+(-۴+۲)

=۳+(-۷-۸)+(۶-۴)+۲ وعلی ہذا القیاس

بنابرین علی العموم جمع ا+ب ج-د+ی-ف+ک درصورتہائے ذیل نوشتہ شدہ میتواند:-

(۱) (ا+ب)+(-ج-د)+ی+(-ف+ک)

(۲) ا+(ب-ج)-د+(ی-ف+ک)

(۳) (ا+ب-ج)+(-د+ی-ف)+ک

(۴) ا+(ب-ج-د)+ی+(-ف+ک)

(۵) (ا+ب-ج)+(ی-ف+ک)

نتیجہ ا- برعکس فوق (ا+ب)+(ج-د)+ی

+(-ف+ک)=ا+ب-ج-د+ی-ف+ک

بنابرین قاعدہ ذیل مقرر است:-

برای جمع کردن دو یا زیادہ جملہا جبریہ آنہا را علی الترتیب با اشارات متعلقہ آنہا بنویسید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 54 of 308

نتیجه ۲- چونکه ا - ب + ج - د + ی - ف = ا + ج + ی
- ب - د - ف = (ا + ج + ی) + (- ب - د - ف)

بنابرین قاعده ذیل مقرر است :-

هرگاه جمع چند مقدار مطلوب باشد که بعضے از انها مثبت باشند و بعضے منفی
پس بهتر انیست که مقادیر مثبت را یک حصه و مقادیر منفی را حصه دیگر
ساخته جمع شود و مجموع این هر دو حصه معلوم کرده شود -

مثلاً ۳ - ۷ + ۸ - ۹ + ۵ - ۶ = (۳ + ۸ + ۵) + (- ۷ - ۹ - ۶)
= ۱۶ + (- ۲۲) = - ۶

مثال ۱- مختصر کنید: ۱۵ - ۳ ب + ۲ ج + ۱۴ ا + ۲ ب - ۶ ج
جمله مفروضه = ۱۵ - ۱۴ ا - ۳ ب + ۲ ب + ۲ ج - ۶ ج
= (۱۵ - ۱۴ ا) + (- ۳ ب + ۲ ب) + (۲ ج - ۶ ج)
= ا + (- ب) + (- ۵ ج)
= ا - ب - ۵ ج

مثال ۲- مختصر کنید: ۳ ا ب + ۵ ب ج - ج ا -
۱۰ ا ب - ۸ ب ج + ۹ ج ا + ۴ ا ب - ۲ ب ج + ۲ ج ا

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 55 of 308

جملہ مفروضہ = ۳ أ ب - ۱۰ أ ب + ۴ أ ب + ۵ ب ج - ۷ ب ج
- ب ج - ۶ ج ا + ۸ ج ا + ج ا

= (۳ أ ب - ۱۰ أ ب + ۴ أ ب) + (۵ ب ج - ۷ ب ج - ب ج)
+ (- ۶ ج ا + ۸ ج ا + ج ا)

= (- ۷ أ ب + ۴ أ ب) + (- ۲ ب ج - ب ج)
+ (+ ۲ ج ا + ج ا)

= (- ۳ ا ب) + (- ۳ ب ج) + (۳ ج ا)

= - ۳ أ ب - ۳ ب ج + ۳ ج ا

تنبیہ در عمل فوق این امر بغور ملاحظہ شود کہ چون جمع حدود متشابہ مطلوب باشد پس مجموع آنہا باین طریق معلوم میشود کہ امثال را جمع کرد مجموع با حروف یک جملہ نوشتہ شود۔ مثلاً ۵ ب ج - ۷ ب ج - ب ج = - ۳ ب ج زیرا کہ - ۳ مجموع امثال ۵ و - ۷ و - ۱ میباشد

مثال ۳ - حدود ذیل را جمع کنید ۳ ا - ۲ ب + ج و - ۵ د + ۶ ی - ف وقیمت عددی این مجموع را معلوم کنید چون ا = ۲ و ب = ا و ج = ۳ و د = ۴ و ی = ۷ و ف = ۵

پس (۳ ا - ۲ ب + ج) + (- ۵ د + ۶ ی - ف)

= ۳ ا - ۲ ب + ج - ۵ د + ۶ ی - ف (مجموع مطلوب)

= ۶ - ۲ + ۳ - ۲۰ + ۴۲ - ۵

= (۶ + ۳ + ۴۲) + (- ۲ - ۲۰ - ۵)

= ۵۱ + (- ۲۷)

= ۵۱ - ۲۷

= ۲۴

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 56 of 308

امثلہ (۸)

جملہائے ذیل را مختصر کنید:-

(۱) ا + ب - ج - ۲ا - ۳ب + ۴ج

(۲) ۵ا² - ۷ب² + ۸ج² + ۵ب² - ۷ج² - ۶ا²

(۳) ۸ا - اب - ۷ا + ۵ج - ۳ا + ۵اب

(۴) ۵م ن ط - ۶اب ر - ۷ج² - ۸م ن ط + ۹ج² + ۴اب ر - ۵ج²

(۵) - ۷آب - ۵ب ج² + ۱۰آب - ۳ب ج² + ۳۳ دف - آب - ب ج² - ۵دف

(۶) ۸لآی - ۵لای ع - ۱۷لآی + ۲۰لآی² - ۲لای ع - ۳۵لآی²
+ ۳لآی - ۴لای ع + ۵لآی²

(۷) - ۱۳آب ج + ۱۵اب ج² - ۲۷اب ج² - ۵آب ج + ۱۳اب ج²
- ۲۳اب ج² + ۷آب ج + ۶اب ج² + ۱۹اب ج²

(۸) ۲۰لآم ن - ۲۳م آن لا + ۱۴ن آلام - ۳۷لآم ن - ۴۷ن آلام
+ ۴۵م آن لا - ۸لآم ن + ۱۳ن آلام - ۵۱م آن لا + ۲۰ن آلام

اگر ا = ۲ ب = ۳ ج = ۴ د = ۵ ی = ۶ ف = ۷
ک = ۸ ق = ۹ م = ۱۰ ن = ۱۲ قیمت جملہائے ذیل را معلوم کنید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 57 of 308

(۹) $-ا + ۳ب + ۵ج و ۵د - ۴ی - ۶ف$

(۱۰) $۵ب - ۲ف و - ۷م - ۸ن و ۳د + ی - ۱۰ق$

(۱۱) $۳ا و - ۵ب^{۲} + ۷ج و - ۲ی + ۵م - ن و ۱۰د - ۷ق$

(۱۲) $-۲ا + ۳ب - ۴ج و - د - ۵ی + ۶ف و ۳ک - ۵ق - ۳م + ۵ن$

(۱۳) $-ا ب + ک ق و م ن - ۴ب د + ف و - ج^{۲} - ذ + م ق$

$و ۶ا ج - ۵ف + ۷ی + ا ب ج$

(۱۴) $ا^{۲} ب - ج دی و ف^{۲} م - ا ب ن - ی^{۲} د و - م ک + ۳ق^{۲} - ۳ب^{۲} د$

$و ۵ج - ۷ د م ک + ۲ ا^{۲} ق - ۳م^{۲} د$

(۱۵) $۳ب^{۲} م - ۵ق^{۲} ی - ۴م^{۲} ک - ۱۳ ا^{۲} م + ۴ک^{۲} د - ۷ ذ ج و - ۵ن ج$

$+ ۸ف م^{۲} + ۹ ذ و ۵ ک ق - ۷ م ن - ۴ ی^{۲} م + ۸ ج دق$

۳۲ - قاعدہ عمومیہ جمع جملہای مرکب

قاعدہ - جملہاے مفروضہ را زیر یکدیگر با تقسیم بنویسید کہ حدود متشابہہ در تحت حدود متشابہہ باشند پس زیر سطر اخیر یک خط عرضی بکشید و بعد ازان ہر سطر عمودی را جمع کردہ مجموع را زیر این خط عرضی بالترتیب نوشتہ پردازید امثلۂ ذیل توضیح این قاعدہ را خواہند نمود :-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 58 of 308

مثال ۱- جمع کنید: $۳ا - ۵ب + ۷ج - ۹د$ و $-۸ج + ۱۵ا$

$-۳د + ۷ب$ و $۴د + ۲ج - ا$ و $۲ب - ۳ج + ۶د$

جملهٔ اول $= ۳ا - ۵ب + ۷ج - ۹د$

جملهٔ دوم $= ۱۵ا + ۷ب - ۸ج - ۳د$

جملهٔ سوم $= -ا + ۲ج + ۴د$

جملهٔ چهارم $= ۲ب - ۳ج + ۶د$

∴ مجموع $= ۱۷ا + ۴ب - ۲ج - ۲د$

مثال ۲- قیمت عددی مجموع ذیل را معلوم کنید:

$۲۰أب^۲ - ۲۵ب^۲ج^۲ + د^۲$ و $-۲۲أب^۲ + ۱۹اب^۲ج - ۳د^۲$ و $۲أب^۲ + ۷ب^۲ج^۲ + ۴د^۲$

اگر $ا = ۹۸$ و $ب = ۳$ و $ج = ۲$ و $د = ۱۹$ باشد

جملهٔ اول $= ۲۰أب^۲ - ۲۵ب^۲ج^۲ + د^۲$

جملهٔ دوم $= -۲۲أب^۲ + ۱۹اب^۲ج - ۳د^۲$

جملهٔ سوم $= ۲أب^۲ + ۷ب^۲ج^۲ + ۲د^۲$

مجموع $= ب^۲ج^۲$

و قیمت عددی مطلوب $= ۳^۲ \times ۲^۲ = ۲۷ \times ۱۶ = ۴۳۲$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 59 of 308

مسئلہ (۹)

جمع کنید:-

(۱) $۱-۲ب+۵ج$ و $-۱۷+۳ب-۸ج$

(۲) $-۳لا+۵ی-۹$ و $۵لا-۳ی+۷$ و $-۳ی+۶$

(۳) $لا^۲+۲لا-۵$ و $۴لا^۲+۳لا-۶$ و $-۸-لا^۲+۷لا-۱۲$ و $۵لا^۲+۹$

(۴) $۱۲-۲ب+۷ج-۸د$ و $۲ج+۶د-۱۵$ و $۳ب+د-۱۰ج$

و $ج-۴ب+۱۱$ و $-۷د+۵ب$

(۵) $لا^۲+۲لای+۳ی^۲-لا+ی+۲$ و $-۵لا^۲+ی^۲+۲لا-۵$ و $-۳لای$

$-۷ی^۲+۳ی+۱۰$ و $۶لا^۲+لای-لا-۴ی+۲$

(۶) $۲لا^۲-۵لای+ی^۲$ و $۳ی^۲-۷لا^۲-۵لا+۲ی$ و $۳لای-۵+ی-۶ی^۲$

و $۳ب-۴ی+۳لا$

(۷) $۲ج+اب-بج$ و $۵اب+۳ب^۲ج-۳اب^۲ج$ و $۸-بج^۲$

و $۴اب^۲+۲اب^۲ج$ و $۳اب^۲ج+۵ب^۲ج$

(۸) $۴م^۲ن^۲-۳م^۳ن+۲م^۴ن^۳$ و $۶م^۳ن^۲-۱۰م^۲ن^۲+۵م^۳ن-۴م^۴ن^۳$ و

$۳م^۳ن^۲-۵م^۴ن^۳+۲م^۳ن^۲$ و $-۷م^۳ن^۲+م^۲ن^۲-۴م^۳ن^۲$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 60 of 308

(٩) ١٢أ٢ب لا - ٢٩ب٢ لا أ + ٣٧ لا أ٢ ب + ٣٥ أ٢ ب٢ لا أ - ٢٥ ب٢ لا أ٢ - ١٦ أ٢ ب٢ لا
- ١٨ أ ب٢ لا - ٥ لا أ٢ ب + ٢٢ أ ب٢ لا - ٢٣ لا أ٢ ب + ٣٠ أ٢ ب٢ لا - ٢٨ ب٢ لا أ٢
و - ٩ لا أ٢ ب - ١٤ أ ب٢ لا - ٦٠ أ٢ ب٢ لا + ٣٢ ب٢ لا أ٢

(١٠) - ١٥ أ ب جـ٢ + ٢٦ جـ٢ أ ب٢ - ٢٤ ب جـ٢ أ٢ + ٢٧ أ٢ ب جـ٢ و ٢٩ جـ٢ أ ب٢ - ١٥ أ ب جـ٢
+ ٢٣ أ٢ ب جـ٢ - ٨ ب جـ٢ أ٢ و ٢٩ ب جـ٢ أ٢ + ١١ أ٢ ب جـ٢ - ٩ أ ب جـ٢ - ٢٦ جـ٢ أ ب٢
و - ٣ أ ب جـ٢ - ١٠ جـ٢ أ ب٢ + ٣ ب جـ٢ أ٢ - ١٨ أ ب جـ٢

(١١) ٢٥ أ ب٢ - ٨ ب جـ٢ - ٣ جـ٢ أ + ١٩ أ ب جـ٢ و ٢٦ جـ٢ أ٢ - ١٤ أ ب جـ٢ - ١٩ أ ب٢ - ١٢ ب٢ جـ٢
و ٢٧ أ ب جـ٢ + ١٣ أ ب٢ + ٧ جـ٢ أ٢ - ٢٠ ب جـ٢ و ٢٩ ب جـ٢ - ٦ أ ب جـ٢ - ٢١ أ ب٢ - ٣ جـ٢
و ١٠ ب جـ٢ + ٣ أ ب٢ + ٤ جـ٢ أ - ٢٧ أ ب جـ٢

(١٢) ٥ أ٢ - ١٨ ب٢ - ٣ جـ٢ - ٢٥ أ ب جـ و ٣٨ جـ٢ - ٣٧ أ - ٧ أ ب جـ + ٢٩ ب٢
و ٢٦ أ ب جـ - ٧ جـ٢ + ١١ أ ب٢ + ٣ أ٢ و ١٣ أ ب٢ - ١٨ أ ب جـ + ٣٤ أ٢ + ٢١ جـ٢
و - ١٤ أ٢ + ١٢ جـ٢ + ٢١ أ ب جـ - ٣٤ ب٢

اگر أ = ٥ ب = ٤ و لا = ٨ و ی = ٧ باشد قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید

(١٣) (٣ لا + ٥ ی - ٢٠ أ + ٤٩ ب) + (١٧ أ - ٢٧ ب - ٣٣ لا)
+ (- ی + ٣ ب - ٣ أ) + (- ٢٣ ب - ٤ ی + ٧ أ + ٢٠ لا)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 61 of 308

(۱۴) (۱۰ا آ - ۲۶ لا ی ج + ۳۰ لا ب ج + ۱۷ ا ی ج) + (۳۵ لا ی ج + ۱۶ ا ی ج - ۳۰۴ آ
- ۲۸ لا ب ج) + (- ۸ ا ی ج - ۹ لا ی ج - ۷ لا ب ج) + (۵ لا ب ج - ۲۵ ا ی ج + ۲۸۹ آ)

(۱۵) (۲ آ - ۷ ب ج + ۹ لا - ۱۳ ی ج + ۵ ا ب - ۲۱ لا ی) + (۵ ی ج + ۸ ب ج + ۱۷ لا ی
- ۶ آ - ۸ ا ب - ۲۰ لا) + (۱۳ لا - ۲۰ ا ب + ۵ آ - ۱۶ لا ی - ۱۰ ا ی - ۳ ب ج)
+ (۱۳ ا ب - ۲ لا + ۳ ب ج + ۲۳ لا ی - آ + ۱۸ ا ی ج)

(۱۶) (۲۹ ا ب لا - ۳۹ ب لا ی + ۴۹ لا ی ا - ۵۹ ی ا ب) + (۲۹ ب لا ی
+ ۴۹ ی ا ب - ۱۹ ا ب لا - ۳۹ لا ی ا) + (۲ ا ب لا - ۱۲ لا ی ا + ۲۲ ب لا ی
+ ۲۴ ی ا ب) + (۳ لا ی ا + ۴ ب لا ی - ۱۳ ا ب لا - ۱۴ ی ا ب)

(۱۷) (۱۸ ا ب ج - ۴۳ ب لا + ۶۲ لا ی ج - ۲۳ ا ب لا ی) + (۳۹ ا ب لا ی + ۲۸ ب ج لا
- ۲۵ آ ب ج - ۴۲ لا ی ج) + (۱۹ ب لا + ۳۷ آ ب ج - ۲۵ ا ب لا ی + ۳۵ لا ی ج
+ (۹ ا ب لا ی - ۲۹ آ ب ج - ۵۵ لا ی ج - ۴ ب ج لا)

(۱۸) (۴۶ آ + ۳۸ ب ج - ۱۸۷ ا ب لا - ۱۰۵ ی ج) + (۴۷ ا ب لا + ۸۵ ی ج - ۵۶ آ
- ۵۸ ب ج) + (۷ ی ج + ۷۵ ب ج + ۲۳ آ + ۶۳ ا ب لا) + (- ۳۳ ب ج
+ ۸ ی ج - ۲۷ ا ب لا - ۳۹ آ) + (۲۶ آ - ۴۵ ی ج - ۲۲ ب ج + ۵۰ ا ب لا)

(۱۹) (۳۵ لا ی ج + ۲۰۷ ا ب ج - ۹۸ ب لا - ۶۲ ی آ - ۸۳ ا ب لا ی) + (۶۸ ب لا

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 62 of 308

+۱۰۲ ی ز - ۶۵ لا ی ز - ۸۷ ا ب ز + ۵۳ ا ب لا ی) + (۲۶ ا ب لا ی
- ۷۵ ا ب ز - ۲۵ ی ا + ۴۳ ب لا ز + ۵۳ لا ی ز) + (۲۸ ی ز - ۲۹ لا ی ز
۶۵ ا ب لا ی + ۴۵ ا ب ز + ۲۶ ب لا ز) + (- ۸۹ ا ب ز - ۴۳ ی ز
+ ۶۹ ا ب لا ی + ۶ لا ی ز - ۴۹ ب لا ز)

(۲۰) (۷۵ ا ب لا ز + ۲۵ ب ز لا ی - ۱۴۳ لا ی ا + ۳۷ ی ز ا ب - ۲۵۳ ا ب لا ز
+ (۶۳ لا ی ا - ۹۲ ی ز ا ب - ۶۳ ا ب لا ز + ۳۷ ا ب لا ز - ۵۸ ب ز لا ی)
+ (۲۵ ی ز ا ب + ۱۳۲ ب ز لا ی + ۸۳ ا ب لا ز + ۳۶ لا ی ا + ۹۶ ا ب لا)
+ (- ۵ ا ب لا ز - ۸۷ ا ب لا + ۲۷ ی ز ا ب - ۱۷ لا ی ا - ۵۳ ب ز لا ی
+ (۶۱ لا ی ا - ۲۰ ب ز لا ی + ۱۴۸ ا ب لا ز - ۷ ی ز ا ب - ۱۲ ا ب لا)

باب چہارم
تفریق و خطوط قوسی

۳۳ - تعریف

مفہوم تفریق یک مقدار ب از مقدار ا اینست کہ یک مقدار دیگر ج
چنین معلوم شود کہ مجموع ب و ج مساوی ا باشد و بعبارت دیگر
ج = ا - ب آنوقت میشود کہ ب + ج = ا باشد -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 63 of 308

آن مقدار راکه از یک مقدار دیگر تفریق یا منهاشود مفروق میگویند
وآن مقدار راکه ازان کدام مقدار دیگر تفریق شود مفروق منه وباقی را
فرق یا حاصل تفریق مثلاً اگر ا - ب = ج باشد ا مفروق منه است
وب مفروق وج فرق یا حاصل تفریق

۳۴- مفهوم تفریق یک مقدار مثبت همانست که مفهوم جمع آن مقدار
منفی میباشد که قیمت مطلق آن مقدار منفی مساوی قیمت مقدار
مثبت مذکوراست ونیز مفهوم تفریق یک مقدار منفی همانست
که مفهوم جمع آن مقدار مثبت میباشد که قیمت مطلق آن مقدار
مساوی قیمت مطلق مقدار منفی مذکوراست -

چونکه ۳ + ۴ = ۷ لهذا ۷ - ۳ = ۴ = ۷ + (-۳) باز چونکه ۶ + (-۲) = ۴
لهذا ۴ - ۶ = -۲ = ۴ + (-۶) لهذا دائماً ا - ب = ا + (-ب) یعنی
مفهوم تفریق یک مقدار مثبت همانست که مفهوم جمع آن مقدار منفی
میباشد که قیمت مطلق آن مقدار منفی مساوی قیمت مطلق مقدار مثبت
مذکوراست -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 64 of 308

چونکہ (-۳) + ۵ = ۲ لہذا ۲ - (-۳) = ۵ {بحکم تعریف ۳۳}

= ۳ + ۲

وبہمین طریق چون (-۶) + (-۴) = -۱۰

لہذا (-۱۰) - (-۶) = -۴ = (-۱۰) + ۶

لہذا علی العموم چونکہ (-ب) + (ا + ب) = ا بنابرین ا - (-ب)

= ا + ب یعنے مفہوم تفریق یک مقدار منفی ہمانست کہ مفہوم جمع آن مقدار مثبت میباشد کہ قیمت مطلق آن مقدار مثبت مساوی قیمت مطلق مقدار منفی مذکور است۔

تنبیہ یک مقدار ا از ب آنوقت اعظم گفتہ میشود کہ حاصل ا - ب مثبت باشد مثلاً (-۴) از (-۵) اعظم است چرا کہ (-۴) - (-۵) = -۴ + ۵ = ۱ وبرہمین منوال -۵ و -۷ و -۱۰ و -۲۰ وعلی ہذا القیاس بنابرین در سلسلۂ اعداد ذیل یعنے ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و -۱ و -۲ و -۳ و -۴ و -۵ و -۶ و -۷ و -۸ وغیرہ ہر عدد از عدد ماقبل خود صغیر است

۳۵ - تشریح اصول فوق

د ج ب ط ا

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 65 of 308

فرض کنید که راه سرکیست که از طرف مغرب بسوی مشرق میرود و اوط و ب
وج و د پنج رباط است که بران سرک وقوع دارند و نیز اط = طب = ۲۰ میل
و ب ج = ۳۰ میل و ج د = ۱۰ میل اگر یک شخص از ط روانه شده تا ج
در ۲ روز برسد پس ظاهر است که (مسافت طے شده روز اول)
+ (مسافت طے شده روز دوم) = ۵۰ میل لهذا از روے تعریف
فقره ۲۳ ز ۵۰ میل - (مسافت طے شده روز اول = مسافت
طے شده روز دوم)

(۱) اگر روز اول آنشخص از ط تا ب یعنے ۲۰ میل سوے مشرق طے کند
پس روز دوم آنشخص از ب تا ج یعنے ۳۰ میل هم سوے مشرق طے خواهد کرد

(۲) اگر روز اول آنشخص از ط تا ا یعنے ۲۰ میل سوے مغرب طے کند
پس روز دوم لازم است که آنشخص از ا تا ج یعنے ۵۰ میل سوے مشرق
طے بکند -

(۳) باز اگر روز اول آنشخص از ط تا د یعنے ۶۰ میل سوے مشرق طے بکند
پس روز دوم لازم است که آن شخص از د تا ج یعنے ۱۰ میل سوے
مغرب طے بکند -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 66 of 308

پس اگر یک میل واحد قیاسی مسافت باشد از امثله فوق نتایج ذیل اخذ شده میتوانند:-

۵۰ - ۲۰ = ۳۰

۵۰ - (-۲۰) = ۷۰

۵۰ - ۶۰ = -۱۰

مثال ۱- قیمت ا - ب + ج را اگر ا = ۵ و ب = -۲ و ج = -۳ باشد معلوم کنید-

ا - ب + ج = ۵ - (-۲) + (-۳)

= ۵ + ۲ - ۳ = ۴

مثال ۲- قیمت -ا - (-ب) + ج را اگر ا = -۲ و ب = -۳ و ج = -۴ باشد معلوم کنید :-

جملهٔ مفروضه = -ا + ب + ج

= -(-۲) + (-۳) + (-۴)

= ۲ - ۳ - ۴

= -۵

امثله (۱۰)

اگر ا = ۳ و ب = -۵ و ج = -۶ و د = -۸ باشد قیمت عددی جملهای ذیل را معلوم کنید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 67 of 308

(۱) - ا + ب - ج + د (۲) ا - ب + ج - د

(۳) ج - د - (- ب) - ا (۴) ج - (- د) + ب - ا

(۵) - (- ا) + ب - (- ج) - د اگرم = - ۴۷ ون = ۵۰ ولا = - ۱۵۴

وی = - ۲۳۴ باشد قیمت عددی جملهاے ذیل را معلوم کنید

(۶) ن - م - (- لا) + ی (۷) - (- م) + ی - (- ن) - لا

(۸) - (- لا) + م - ی - (- ن) (۹) - (- ی) - م - لا - (- ن)

(۱۰) - (- ن) - ی - (- لا) - م

۳۶ دلیل این امر که ا - (ب + ج) = ا - ب - ج و ا - (ب - ج) = ا - ب + ج

چونکه (ب + ج) + (ا - ب - ج) = ا

∴ از روے تعریف فقره ۳۳ ا - (ب + ج) = ا - ب - ج

باز چونکه (ب - ج) + (ا - ب + ج) = ا

∴ ا - (ب - ج) = ا - ب + ج ※

※ هرگاه ا و ب و ج همه مقادیر مثبت باشند و ا > ب و ب < ج باشد پس دلیل ذیل را در اکثر کتب جبر و مقابله نوشته اند

اگر ب از ا تفریق شود باقی ا - ب میباشد لیکن در اینصورت از او زیاده از مطلوب تفریق کردیم چرا که مدعاے ما این نیست که ب را تفریق کنیم بلکه آن مقدار را که از ب بقدر ج کمتر است از ا تفریق میکنیم بنابرین لازمست که باقی مذکور را ج جمع شود - لهذا ا - (ب - ج) = ا - ب + ج

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 68 of 308

نتیجہ پس بحکم فقرۂ فوق برائے تفریق یک جملۂ جبریہ از جملۂ دیگر قاعدۂ ذیل اخذ شدہ است :-

قاعدہ - علامت ہر حد مفروق را از مثبت بمنفی و از منفی بمثبت تبدیل نمودہ بعد ازان این ہمہ حدود را علے الترتیب با علامات تبدیل یافتہ بعد از مفروق منہ بنویسید مثلاً اگر ۲ا + ۳ب - ۵ج از ا - ۲ب + ج تفریق شود باقی = ا - ۲ب + ج - ۲ا - ۳ب + ۵ج

= - ا - ۵ب + ۶ج خواہد بود

مثال ۱ ۳ا + ۲ب - ۵ج را از ۲ا + ب - ۸ج تفریق کنید

باقی مطلوب = ۲ا + ب - ۸ج + ۳ا - ۲ب + ۵ج

= (۲ا + ۳ا) + (ب - ۲ب) + (- ۸ج + ۵ج)

= ۵ا + (- ب) + (- ۳ج)

= ۵ا - ب - ۳ج

مثال ۲ ۲ا² + ۳اب - ۵ب² را از - ۳ا² + ۲اب - ۴ب² تفریق کنید

باقی مطلوب = - ۳ا² + ۲اب - ۴ب² - ۲ا² - ۳اب + ۵ب²

= (- ۳ا² - ۲ا²) + (۲اب - ۳اب) + (- ۴ب² + ۵ب²)

= - ۵ا² - اب + ب²

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 69 of 308

امثلہ (۱۱)

تفریق کنید

(۱) ا - ب + ج را از ۲ا + ۳ب - ج

(۲) ۲ا - ۵ب + ۴ج را از - ا - ۲ب + ۸ج

(۳) - لا + ی - ۶ را از ۲لا + ۳ی - ۴ع

(۴) - ۳م² + ۲مں + ۵ را از - ۵م² - مں + ۴

(۵) لا² - ۲ی² + ۳ع² را از ۳لا² - ی² + ۲ع²

(۶) ۳ا لا - ۴لا ی + ۵ی² را از ۲ا لا + لا ی - ۶ی²

(۷) - ۳ا² - ۲ا ب - ۷ب² را از ا² - ۵ا ب - ۸ب²

(۸) - ۲ب ج + ۶ج² - ۸لا ی را از ۵ب ج - ج² + ۲لا ی

(۹) ۲لا³ - ۴لا² + ۷لا + ۵ را از لا³ - ۳لا² + ۶لا + ۷

(۱۰) لا³ + ۲لا ی - ۳لا ی² + ۶لا ی² - ی³ را از ۲لا³ - ۲لا ی - ۳لا ی² + ۴لا ی² - ی³

(۱۱) ۳م³ - ۷م² ں + ۸م ں² - ۱۳ں³ را از ۲م³ - ۱۳م² ں + ۱۵م ں² - ۳۷ں³

(۱۲) ۸ط³ - ۷ط² ق + ۱۰ط ق² - ۱۳ط ق³ + ۵ق⁴ را از ۵ط³ - ۱۲ط² ق
+ ۷ط ق² - ۲۳ط ق³ + ۳ق⁴

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 70 of 308

(١٣) $-٧لا^{٣}+٦لا^{٢}ی-٨لا^{٢}ی^{٢}-١٢لا ی^{٢}+٩ی^{٣}$ را از $٣لا^{٣}-٥لا^{٢}ی$
$+٢لا ی^{٢}-٧لا^{٢}ی+٦ی^{٣}$

(١٤) $٣م^{٣}ن لا-١٠ن^{٣}لام+١٤لا م^{٢}ن-٢٠م^{٢}ن لا-٢٧ن^{٢}لا م^{٢}$ را از
$٥م^{٣}ن لا-١٧ن^{٣}لام+٢٦لا م^{٢}ن-١٣م^{٢}ن لا-١٩ن^{٢}لا م^{٢}$

(١٥) $٣٧لا^{٦}-٢٨لا^{٥}ی+٤٣لا^{٤}ی^{٢}-٥٤لا^{٣}ی^{٣}-٦٧لا^{٢}ی^{٤}+٨٤لا ی^{٥}-٩٢ی^{٦}$ را
از $٤٨لا^{٦}-٣١لا^{٥}ی-٧لا^{٤}ی^{٢}-٣٩لا^{٣}ی^{٣}-٤١لا^{٢}ی^{٤}+٦٥لا ی^{٥}-٣٥ی^{٦}$

٣٧- قاعدہ عمومیہ برای تفریق یک جملہ مرکب از جملہ دیگر

اولاً مفروق را زیر مفروق منہ بنویسید باین طریق کہ حدود متشابہہ زیر
حدود متشابہہ باشند ثانیاً زیر مفروق مذکور یک خط عرضی بکشید
وبعد ازان اشارت ہر حد مفروق را تبدیل دادہ آن حدود را جمع کنید

مثال ١- $٢لا^{٣}+لا^{٢}ی-ی^{٣}$ را از $لا^{٣}-٢لا^{٢}ی-٣ی^{٣}$ تفریق کنید

مفروق منہ $=لا^{٣}-٢لا^{٢}ی+٣ی^{٣}$

مفروق $=\pm٢لا^{٣}\mp٣لا^{٢}ی\pm ی^{٣}$

∴ حاصل تفریق $=٣لا^{٣}-٥لا^{٢}ی+٤ی^{٣}$

مثال ٢- $٢أ^{٣}-٣أ^{٢}ب+٥أ-ی^{٣}$ را از $٣أ^{٣}+٢ی^{٣}-٧أ$ تفریق کنید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 71 of 308

مفروق منہ = ۳لا + ۲ی - ۷ا

مفروق = ۵لا - ی + ا - ۳ب

∴ حاصل تفریق = - ۲لا + ۳ی - ۸ا + ۳ب

مشقہ (۱۲)

تفریق کنید

(۱) ۳ا - ۴ب + ۵ج را از ۲ا + ۳ب - ۵ج

(۲) - ۳م + ۵ن - ۷س را از ۷م - ۲ن + ۵س

(۳) - لا + لای - ی را از ۲لا - ۳لای + ۴ی

(۴) لا - ۲لا + ۵لا + ۶ را از ۲لا + ۳لا - ۳لا + ۵

(۵) ا - ۵اب + ۲ب + ۷ب ج را از ۲ا - ۳اب + ۳ب ج

(۶) - ۵لا + ۶لای - ۴لای + ۷ی را از ۳لا - ۲لای + ۸لای - ۵ی

(۷) - ۲ + ۳لا - ۵لا + ۷لا را از ۴ - ۶لا - ۷لا - ۹لا

(۸) لا - ۷لا + ۹ را از ۳لا - ۲لا - ۸لا + ۷

(۹) - ۵لا + ۲لا - لا - ۶لا + ۹لا + ۸ را از لا - ۶لا - ۴لا + ۵

(۱۰) ۲لا - ۳لای + ۷لای - ۸ی + ا - ۳اب را از لا - ۴لای - ۸لای + ۵لا

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 72 of 308

(١١) ٣لای ع - ٢لآی - ٧لآی ع + ٢لآی ر از ١٢لآی - ٥لآی + ٨لای ع - ٩لآی ع

(١٢) ٢ب ج - ٣ج + ا ج + ٥ا - ٤ب - ٧ا ب ر از ٢ا - ٣ب + ٥ج - ٦ا ب + ٧ب ج - ٨ا ج

(١٣) - ٥لا - ٣لآ + ١٢ + ٢لای - ٧ی + ٤ی ر از ٢لآ - ٣لای + ٥ی - ٦لا - ٨ی + ٩

(١٤) - ٥ا + ٢ا + ٤ب - ٧ا ب - ٢ا ب - ٧ب + ٥ا ب ر از ا - ٣ا ب + ٥ا ب - ٩ب + ٣ا - ٢ا ب + ب

(١٥) - ٢ی ع ب ج + ٤ی ع ب ج - ٢لآ - ٩ی ع ب ج + ٣ا لآ ر از ٣لآ - ٥ا لآ + ٦ی ع ب ج - ٧ی ع ب ج + ٨ی ع ب ج

(١٦) ١٩لآ ع ی - ٥لآ ی ع + ٢٧ + ١١لای ع - ١٢لآ ی ع - ١٩لای ع ر از ٢٥ - ١٦لآ ی ع + ٢١لآ ع ی - ٦لآ ی ع + ٨لای ع

(١٧) ٤٣لآ ی ع - ٢٣لآ ی ع + ٢٥لآ ی ع - ٦٦لآ ی ع + ٢٦لآ ی ع + ٣٥لآ ی ع ر از ٢٩لآ ی ع - ٣٧لآ ی ع + ٤٥لآ ی ع - ٦٧لآ ی ع + ٨٩لآ ی ع - ٤٥لآ ی ع

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 73 of 308

(١٨) $+٢٩لأ^{٣}ى^{٣}ع^{٣}+٧٥لأ^{٢}ى^{٢}ع^{٢}+١٣لأى^{٣}ع^{٣}+٣٥لأ^{٣}ى^{٣}ع^{٣}-٩٤لأ^{٢}ى^{٢}ع^{٢}$
$-٨٦لأى^{٣}ع^{٣}$ را از $٤١لأ^{٣}ى^{٣}ع^{٣}-٨٧لأى^{٣}ع^{٣}-٢٨لأ^{٣}ى^{٣}ع^{٣}+٩٣لأ^{٣}ى^{٣}ع^{٣}$
$-٥٥لأ^{٢}ى^{٢}ع^{٢}-٧٥لأ^{٢}ى^{٢}ع^{٢}$

(١٩) معلوم کنید که با $٣لأ-٥لاى+٦ى^{٢}+٧ى ع$ چقدر جمع شود که حاصل جمع مساوی $-لأ-ى^{٢}-ى ع$ باشد؟

(٢٠) معلوم کنید که با $-٥لأ+١٣لأى^{٢}-أب لا+٥ب لاى^{٢}+٧لاى أب$ چقدر جمع شود که حاصل جمع مساوی $لأ+لأى^{٢}+أب لا-٢ب لاى^{٢}$ $-٢لاى أب$ باشد؟

(٢١) معلوم کنید که با $٥لأ^{٢}-٦لأى+٧لأى^{٢}-٨لاى^{٢}-١٩اى$ چقدر جمع شود که حاصل جمع مساوی $٣لأ^{٢}+٥لأى^{٢}-١٢اى^{٢}$ باشد؟

(٢٢) معلوم کنید که با $-٥لأ^{٢}-٣لأى-٦لأى^{٢}+١٧لأى^{٣}+١٣لاى^{٢}$ $-٢١ى^{٣}$ چقدر جمع شود که حاصل جمع مساوی $-٧لأ^{٢}-٤لأى^{٣}+١٣لأى^{٣}$ $+٢٩ى^{٣}$ باشد؟

(٢٣) معلوم کنید که از $٣أ^{٢}+١٥اب-٦ب^{٢}$ چقدر تفریق شود که باقی $أ^{٢}+٢ب^{٢}$ باشد؟

(٢٤) معلوم کنید که از $٥لأ^{٢}-٦لاى+٤ى^{٢}-١٠اى+١٥-٨لا$ چقدر تفریق شود

که باقی لآ + ۲لای + ۳ی² + ۴لا + ۵ی + ۶ باشد؟

(۲۵) معلوم کنید که از ۳آ² - ۴آب + ۵اب² - ۸ ب³ چقدر تفریق شود
که باقی آ² - ۲اب² + ۷ ب³ باشد؟

(۲۶) معلوم کنید که از - ۸لآی + ۴لآی² - ۱۱لای² + ۱۲لآ - ۱۳ی + ۲۷
چقدر تفریق شود که باقی ۴لآی - ۳لآی² - ۱۱لای² + ۲۰لآ - ۳۰ی
+ ۵۶ باشد؟

(۲۷) معلوم کنید که ۳آ² - ۷اب - ۸ب² ج + ۹ ب³ از کدام جمله تفریق شود
که باقی ۲آ² + ۳اب + ۳ب² ج + ۲ ب³ بماند؟

(۲۸) معلوم کنید که - ۳لآ + ۵ی² - ۷لای + ۸لا - ۹ از کدام جمله تفریق شود
که باقی لآ - ۸ی² + ۲لای - ۱۱لا + ۷ بماند؟

(۲۹) معلوم کنید که - ۷آ² - ۸ب² ج - ۱۳اج² + ۳ ب³ از کدام جمله تفریق شود
که باقی ۴آ² - ۳ب² ج + ۷اج² - ۸ ب³ بماند؟

(۳۰) معلوم کنید که ۲۱لآ - ۳۷لای² + ۴۲ی² - ۸لآ + ۱۹لای - ۳۹
از کدام جمله تفریق شود که باقی - ۲۵لآ + ۵لای² - ۷۸ی² + ۷لآ
- ۴۳لای + ۲۴ بماند؟

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 75 of 308

۳۸ رفع خطوط قوسی

قواعد رفع خطوط قوسی در ذیل مندرج میباشند :-

(۱) اگر چند حد مابین خطوط قوسی محدود باشند و پیش آن اشاره + باشد خطوط قوسی مذکور بدون تغیر اشارات حدود داخله آن رفع میشود

(۲) اگر چند حد مابین خطوط قوسی محدود باشند و پیش آن اشارت - باشد خطوط قوسی مذکور باین شرط رفع میشود که اشارت هر حد داخل خطوط قوسی از جمع بتفریق و از تفریق بجمع تبدیل شود - و دلیل قواعد مذکور ظاهر است چرا که هرگاه یک جملهٔ داخل خطوط قوسی باشد و پیش ازان اشارت + باشد مفهوم اینست که جملهٔ مذکور جمع شود و همچنین اگر پیش ازان اشارت - باشد پس مفهوم اینست که آن جمله تفریق شود

مثلاً ا - ب + (ج - د + ی) = ا - ب + ج - د + ی

و نیز ا - ب - (ج - د + ی) = ا - ب - ج + د - ی

و برعکس آن

(۱) چند حد را در خطوط قوسی که پیش ازان اشارت + باشد محدود کرده میتوانیم

(۲) و چند حد را در خطوط قوسی که پیش ازان اشارت - باشد نیز محدود کرده میتوانیم

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 76 of 308

بشرط اینکه اشارت هر حد را از جمع بتفریق و از تفریق بجمع تبدیل نموده
در اینچنین خطوط قوسی بنویسیم

مثلاً ا - ب + ج - د + ی - ف = ا - ب - (ج + د - ی + ف)

تنبیه اکثر اوقات قسمے از خطوط قوسی در خطوط قوسی دیگر واقع میشوند
مثلاً در جملهٔ ذیل ۲ ا - [۳ ب - {۴ ج - (۵ د - ۶ ی)}] پس
مفهوم اینچنین خطوط قوسی اینست که جملهٔ داخلهٔ { } از ۳ ب تفریق شود
و باقی از ۲ ا تفریق شود و نیز جملهٔ داخلهٔ { } اینطور دریافت نموده
میشود که جملهٔ داخلهٔ ( ) از ۴ ج تفریق شود

وقتیکه اختصار جمله مانند جملهٔ سابقه مطلوب باشد برائے مبتدی بہتر
اینست که ابتدائے عمل را از خطوط قوسی خورد بنماید

مثال ۱ - مختصر کنید: ا - {ب - (ج - د)}

ا - {ب - (ج - د)} = ا - {ب - ج + د}

= ا - ب + ج - د

مثال ۲ - مختصر کنید: ا - [ب - {ج - (د - ط)}] - ف

ا - [ب - {ج - (د - ط)}] - ف = ا - [ب - {ج - د + ط}] - ف

= ا - [ب - ج + د - ط - ف]

= ا - ب + ج - د + ط + ف

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 77 of 308

مثال ۳ مختصر کنید: $ا+[-ب-\{ج-(د-ط-\overline{ف})-ک\}-ع]$

جملہ مفروضہ $= ا+[-ب-\{ج-(د-ط+ف)-ک\}-ع]$

$= ا+[-ب-\{ج-د+ط-ف-ک\}-ع]$

$= ا+[-ب-ج+د-ط+ف+ک-ع]$

$= ا-ب-ج+د-ط+ف+ک-ع$

مثال ۴ مختصر کنید: $۲ا-[۳ا+\{۴ب-(۲ا-ب)+۵ا\}-۷ب]$

جملہ مفروضہ $= ۲ا-[۳ا+\{۴ب-۲ا+ب+۵ا\}-۷ب]$

$= ۲ا-[۳ا+۴ب-۲ا+ب+۵ا-۷ب]$

$= ۲ا-۳ا-۴ب+۲ا-ب-۵ا+۷ب$

$= -۴ا+۲ب$

مثال ۵ $ا-[-ب-\{ج-(د-ط-\overline{ف})\}]$ را مختصر کنید

باین طریق کہ اول [ ] وبعد ازان { } وبعد ازان ( ) رفع شود

جملہ مفروضہ $= ا+ب+\{ج-(د-ط-\overline{ف})\}$

$= ا+ب+ج-(د-ط-\overline{ف})$

$= ا+ب+ج-د+ط-\overline{ف}$

$= ا+ب+ج-د+ط-ف$

تنبیہ جملہ داخلہ ( ) بر دو حد مشتمل میباشد یعنی ب - ب و
- {ج - (د - ط - ف)} بنابرین وقتیکہ این خطوط قوسی کہ پیش ازان
اشارت - است رفع شود باقی ب + {ج - (د - ط - ف)} میماند
وہمین عمل در باقی خطوط قوسی جاری میباشد
این امر بغور ملاحظہ شود کہ در یک وقت یک قسم خطوط قوسی رفع میشود

مثال ۶ مختصر کنید :-

{ا - {ب - (ج - د)} - {۱۲ ا - {۳ ب + (۲ ج - ۴ د)}}}

ا - {ب - (ج - د)} = ا - {ب - ج + د}

= ا - ب + ج - د

و {۱۲ ا - {۳ ب + (۲ ج - ۴ د)}} = ۱۲ - {۳ ب + ۲ ج - ۴ د}

= ۱۲ - ۳ ب - ۲ ج + ۴ د

لہذا جملہ مفروضہ = (ا - ب + ج - د) - (۱۲ - ۳ ب - ۲ ج + ۴ د)

= ا - ب + ج - د - ۱۲ + ۳ ب + ۲ ج - ۴ د

= - ۱۱ + ۲ ب + ۳ ج - ۵ د

مثال ۷ از جملہ ا + ب - ج + د - ط - ف سہ حد اول و سہ حد اخیر را
داخل خطوط قوسی جداگانہ بنمائید و پیش ازانہا اشارت - بنویسید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 79 of 308

بعدازان دو حد اخیر ہر یکے از خطوط قوسی فوق را داخل خطوطِ قوسی دیگر کہ پیش از ہر یکے ازانہا اشارت باشد بنمائید۔ مثلاً

$$ا+ب-ج+د-ط-ف=-\{-ا-ب+ج\}-\{-د+ط+ف\}$$

$$=-\{-ا-(ب-ج)\}-\{-د-(-ط-ف)\}$$

مسئلہ (۱۳)

جملہائے ذیل را مختصر کنید:-

(۱) $۲ا-۳ب-(۴ا-۶ب)+(-۱۲ا+۵ب)$

(۲) $لا+(-ی+۴لا)-(-۲لا+۳ی)$

(۳) $-(۵لا-ی)+(-۱۳لا+ی)-(۲ی-۶لا)$

(۴) $۱۳-\{۱۶ا-(۲ب-ا)\}$ (۵) $-ا-\{۲ب-(۱۶ا+۴۰ب)\}$

(۶) $۱۲ا+\{۵ب-۷ب-۱۳ا\}$ (۷) $۳-\{۵-(۶-۷-۹)\}$

(۸) $-۲-[-۳-\{-۴-(-۵-۶)\}]$

(۹) $-ا-[-۳ب-\{-۲ا-(-ا-۴ب)\}]$

(۱۰) $ا-[۲ب-\{۳ج-(ا-۲ب-۳ج)\}]$

(۱۱) $۳لا-[۵ی-\{۱۰ع-(۵لا-۱۰ی-۳ع)\}]$

(۱۲) $-ا-[-ب-\{-ج-(-ا-ب-ج)\}]$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 80 of 308

جملہائے ذیل را مختصر کنید باین طریق کہ اولاً خطوط قوسی خارجی و بعد
ازاں خطوط قوسی داخلی را رفع کنید۔

(۱۳) ۲لا−[۵ی−{۹لا−(۱۰ی−۴لا)}]

(۱۴) −۵ا−[۳ب−{۶ا−(۵ب−۷ا)}]

(۱۵) −۷م−[۳ن−{۸م−(۴ن−۱۰م)}]

(۱۶) −۲ا−[−۴ب−{−۶ج−(−۸ا−−۱۰ب−۱۲ج)}]

(۱۷) −۳لا−[−۵ی−{−۷ع−(−۹لا−−۱۱ی−۱۳ع)}]

(۱۸) −۲لا−[−۴ی−{−۶ع−(−۳لا−−۵ی−۷ع)}]

(۱۹) −لا−[−۳ی+{−۵ع−(−۲لا+−۴ی−۶ع)}]

(۲۰) −۲ا+[−۵ب−{−۸ج+(−۳ا−−۶ب+۹ج)}]

(۲۱) −لا+[−۵ی−{−۹ع+(−۳لا−−۷ی+۱۱ع)}]

مختصر کنید:−

(۲۲) {۲ا−(۳ب−۵ج)}−[ا−{۲ب−(ج−۴ا)}]−ج

(۲۳) [لا−{ی−(ع−لا)}−(ی−ع)]−[ع−{لا−(ی−ع)}]

(۲۴) {۲ا−(ب−ج)}−{۳ب−(۲ا−ج)}−[−۲ا+(ج−۴ب)]

−[−۳ب−(۲ا−۴ج)+{ج−(۲ب−۳ا)}]−[−۵ج+(۶ا−۷ب)]

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 81 of 308

درجملهٔ ا - ب - ج + د - م + ن - لا + ی - ع :-

(۲۵) حدّ دوم وسوم وچهارم را درخطوطِ قوسی که قبل ازان اشارتِ - باشد بنویسید وحدّ پنجم وششم وهفتم را درخطوطِ قوسی دیگر که قبل ازان اشارتِ + باشد بنویسید

(۲۶) همه حدود را که بعد از حدّ اول میباشند درخطوطِ قوسی که قبل ازان اشارتِ - باشد بنویسید وچهار حدّ اخیر را داخلِ این خطوطِ قوسی را داخلِ خطوطِ قوسی دیگر که قبل ازان اشارتِ + باشد بنویسید

(۲۷) پنج حدّ اول را داخلِ خطوطِ قوسی که قبل ازان هیچ اشارت نباشد بنویسید وچهار حدّ اخیر را درخطوطِ قوسی دیگر که قبل ازان اشارتِ - باشد بنویسید وبعد ازان حدّ اخیر هر دو خطوطِ قوسی را داخلِ اینچنین خطوطِ قوسی بنمایند که قبل ازانها اشارتِ + باشد

(۲۸) از حدّ اول ابتدا نموده سه سه حدود را در اینچنین خطوطِ قوسی که قبل ازانها اشارتِ - باشد بنویسید وبعد ازان دو حدّ اخیر این خطوطِ قوسی را در اینچنین خطوطِ قوسی محدود کنید که پیش ازانها اشارتِ - باشد

باب پنجم

ضرب

۳۹ - تعریف

مفهوم ضرب یکعدد اینست که تکرارِ یکعدد بقدرِ آحادِ عددِ دیگر نموده شود

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 82 of 308

مثلاً ۴ = ۱+۱+۱+۱

لہٰذا ۴×لا یا ۴لا = لا+لا+لا+لا

و پنجنین ۴×۵ = ۵+۵+۵+۵ = ۲۰

و ۳×۶ = ۶+۶+۶ = ۱۸

و ۵×۳ = ۳+۳+۳+۳+۳ = ۱۵ ..... (ا)

و نیز ۳×(-۵) = (-۵)+(-۵)+(-۵) = -۱۵

و ۴×(-۳) = (-۳)+(-۳)+(-۳)+(-۳) = -۱۲

و ۵×(-۴) = (-۴)+(-۴)+(-۴)+(-۴)+(-۴) = -۲۰ ..... (ب)

باز چون -۴ = -۱-۱-۱-۱

لہٰذا (-۴)×لا = -لا-لا-لا-لا

و پنجنین (-۴)×۵ = -۵-۵-۵-۵ = -۲۰

و (-۳)×۶ = -۶-۶-۶ = -۱۸

و (-۵)×۳ = -۳-۳-۳-۳-۳ = -۱۵ ..... (ج)

و نیز (-۳)+(-۵) = -(-۵)-(-۵)-(-۵)

= ۵+۵+۵ = ۱۵

و (-۴)×(-۳) = -(-۳)-(-۳)-(-۳)-(-۳)

= ۳+۳+۳+۳ = ۱۲

و (-۵)×(-۴) = -(-۴)-(-۴)-(-۴)-(-۴)-(-۴)

= ۴+۴+۴+۴+۴ = ۲۰ ..... (د)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 83 of 308

اگر ا در ب ضرب شود ا را مضروب میگویند و ب را مضروب فیه
و حاصل را حاصل ضرب

امثله (۱۴)

بقرار تعریف فقره ۳۹ حاصل ضرب ارقام ذیل را دریافت کنید:-

(۱) حاصل ضرب ۶ در ۵ (۲) حاصل ضرب ۷ در ۴
(۳) حاصل ضرب ۱۲ در ۳ (۴) حاصل ضرب -۸ در ۴
(۵) حاصل ضرب -۹ در ۵ (۶) حاصل ضرب -۱۳ در ۶
(۷) حاصل ضرب ۸ در -۳ (۸) حاصل ضرب ۱۴ در -۵
(۹) حاصل ضرب ۱۵ در -۳ (۱۰) حاصل ضرب -۹ در -۴
(۱۱) حاصل ضرب -۱۲ در -۵ (۱۲) حاصل ضرب -۱۶ در -۴

۴۰ قاعدهٔ اشارات

از فقره ۳۹ ظاهر است که اگر ا و ب دو عدد صحیح باشند

$(+ا) \times (+ب) = +(اب)$
$(+ا) \times (-ب) = -(اب)$
$(-ا) \times (+ب) = -(اب)$
$(-ا) \times (-ب) = +(اب)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 84 of 308

پس اگر دو عدد صحیح و متحد الاشاره در یکدیگر ضرب شوند حاصل ضرب مثبت خواهد بود
و نیز اگر دو عدد صحیح و مختلف الاشاره در یکدیگر ضرب شوند حاصل ضرب منفی خواهد بود
و همین قاعده در ضرب کسور نیز جاری میباشد مثلاً چون $-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$
یعنی چون $-\frac{2}{3}$ بدو دفعه تفریق حصه سوم یک واحد حاصل میشود لهذا
حاصل ضرب لا در $-\frac{2}{3}$ بدو دفعه تفریق حصه سوم لا حاصل خواهد شد
بنابرین $(-\frac{2}{3})\times لا = -\frac{لا}{3}-\frac{لا}{3}=-\frac{2لا}{3}$
همچنین $(-\frac{2}{3})\times\frac{4}{5}=-\frac{4}{15}-\frac{4}{15}=-\frac{8}{15}$
و $(-\frac{2}{3})\times(-\frac{4}{5})=-(-\frac{4}{15})-(-\frac{4}{15})$
$=+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{8}{15}$ و علی هذا القیاس
پس قاعده اشارات بطور وضاحت حسب ذیل خواهد بود:-
اگر اشارات مضروب و مضروب فیه متحد باشند حاصل ضرب مثبت خواهد بود
و اگر اشارات مضروب و مضروب فیه مختلف باشند حاصل منفی خواهد بود-
نتیجه چونکه $(-لا)\times(-لا)=لا^2$ و نیز $(+لا)\times(+لا)=لا^2$
لهذا $\sqrt{لا^2}=\pm لا$ پس ظاهر است که هر جمله جبریه دو جذر مربع دارد که قیمت
مطلق انها باهم مساوی و اشارات آنها مختلف میباشند-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 85 of 308

مثال جملہ ذیل را مختصر کنید: $(أ ب - ج د)(ج^2 - د^2)$

اگر $أ = -2$ و $ب = -3$ و $ج = -4$ و $د = 5$ باشد

چونکہ $أ ب = (-2)^2 \times (-3) = 4 \times (-3) = -12$

و $ج د = (-4) \times 5 =$

$\therefore أ ب - ج د = -12 - (-20) = -13 + 20 = 8 \ldots\ldots (أ)$

و نیز چون $ج = (-4)^2 = 16$

و $د^2 = (5)^2 = 25$

$\therefore ج^2 - د^2 = 16 - 25 = -9 \ldots\ldots (ب)$

پس بموجب (أ) و (ب) $(أ ب - ج د)(ج^2 - د^2) = 8 \times (-9) = -72$

مسئلہ (۱۵)

قیمت عددی جملہ ہائے ذیل را معلوم کنید:-

(۱) $أ ب - ج د$ اگر $أ = -2$ و $ب = -3$ و $ج = -8$ و $د = 6$

(۲) $(أ^2 - ب^2) ج$ اگر $أ = -5$ و $ب = -6$ و $ج = -9$

(۳) $أ ب ج + ب^2 ج - ج^2 د$ اگر $أ = 3$ و $ب = -5$ و $ج = -7$ و $د = -4$

(۴) $(-أ) ب^2 - ج د + ب (ج^2)$ اگر $أ = 5$ و $ب = -7$ و $ج = 4$ و $د = -3$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 86 of 308

(۵) $\{أ^2+(-ب)^2-(-ج)\}$ $(ب ج-ا د)$ اگر $ا=-۳$ و $ب=۴$ و $ج=۶$ و $د=-۹$

(۶) $أ^2(ب-ج)+ب^2(ج-ا)+ج^2(ا-ب)$ اگر $ا=-۲$ و $ب=-۵$ و $ج=-۷$

(۷) $لا^2(ی-ع)+ی^2(ع-لا)+ع^2(لا-ی)$ اگر $لا=-۳$ و $ی=۸$ و $ع=-۵$

(۸) $ط^2(ق-ر)+ق^2(ر-ط)+ر^2(ط-ق)$ اگر $ط=-۳$ و $ق=-۵$ و $ر=-۷$

(۹) $أ^2+ب^2+ج^2-۳ ا ب ج$ اگر $ا=-۱۲$ و $ب=-۱۳$ و $ج=-۱۵$

(۱۰) ثابت کنید کہ $(ا+ب)^5=أ^5+۵ أ^4 ب+۱۰ أ^3 ب^2+۱۰ أ^2 ب^3+۵ ا ب^4+ب^5$

اگر $ا=-۵$ و $ب=۳$

۴۱ اثبات این امر کہ $ا \times ب = ب \times ا$ است

(۱) فرض کنید کہ $ا$ و $ب$ ہر دو مثبت میباشند

پس $ا$ $ا$ $ب$ را در یک خط عرضی بنویسید و اینقسم سطور را بقدر $آحاد$ $ا$ باین طریق بنویسید کہ $آحاد$ علی الترتیب در یک سطر عمودی واقع باشند

| | | |

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 87 of 308

پس ظاہر است کہ اگر عمل بقرار فوق نمودہ شود مفہوم آن ہمانست کہ آحاد را
در خطوط عرضی ب نوشتہ شود پس ہمگی احاد را کہ بطریق فوق نوشتہ شدند شمار کنند
چون تعداد ہمہ سطور عرضی ا است و در ہر سطر ب احاد است
لہذا کل تعداد احاد = (تعداد احاد در سطر عرضی اول) + (تعداد احاد در سطر
عرضی دوم) + (تعداد احاد در سطر عرضی سوم) + ...
(تعداد احاد در سطر عرضی اخیر) کہ بالف ازان تعبیر شدہ است = ب
+ ب + ب .... تا ا = ا × ب (۱)
و نیز چون تعداد ہمہ قطار ہای عمودی ب است و در ہر قطار ا احاد ہستند
لہذا کل تعداد احاد = (احاد در سطر عمودی اول) + (احاد در سطر عمودی دوم)
+ (احاد در سطر عمودی سوم) ..... + (احاد در سطر عمودی اخیر)
کہ بہ ب ازان تعبیر شدہ است = ا + ا + ا + ... تا ب = ب ا (۲)
بنابرین از (۱) و (۲) چنین اخذ میکنیم کہ ا × ب = ب × ا (ا)
یعنی ب دفعہ ا = ا دفعہ ب و ہمچنین در کسور نیز قاعدہ مذکورہ جاری میباشد
نتیجہ ا در قضیہ ۴ ثابت شدہ است کہ لا × (-ی) = -(لای) و (-ی)
× لا = -(ی لا) لیکن چون لای = ی لا ∴ لا × (-ی) = (-ی) × لا (ب)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 88 of 308

نتیجه ۲ در فقره ۴۰ ثابت شده است که (-لا) × (-ی) = +لای و (-ی) × (-لا) = +ی لا لیکن چون لای = ی لا ∴ (-لا) × (-ی) = (-ی) × (-لا) (ج)

پس از (ا) و (ب) و (ج) ثابت گردید که برای هر قسم قیمتهای ا و ب، ا × ب = ب × ا

مسئلهٔ (۱۶)

ثابت کنید که

(۱) ۴ × ۵ = ۵ × ۴ (۲) ۶ = ۳ × ۲

(۳) ۷ × ۵ = ۵ × ۷ (۴) ۴ × ۸ = ۸ × ۴

(۵) ۹ × ۵ = ۵ × ۹

۴۲ اثبات این امر که (ا ب) × ج = ا (ب ج) یا = ب × (ا ج)

ب عدد احاد ج را که هر یک در خط قوسی باشد در سطر عرضی بنویسید و اعداد دیگر را باین طریق بنویسید که هر یک از خطوط قوسی زیر خط قوسی دیگر علی الترتیب در یک سطر عمودی واقع باشند۔

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 89 of 308

[ج] [ج] [ج] [ج] . . . الی ب
[ج] [ج] [ج] [ج] . . . الی ب
[ج] [ج] [ج] [ج] . . . الی ب
. . . . . .
. . . . . تا ا

پس ظاہر است کہ در عمل فوق اگر بر جاے ج ب نوشتہ شود و یا بر جاے ا ب یا ج باشد در ہر سہ صورت مفہوم عمل تغییر نمیابد

پس چون کل تعداد خطوط قوسی ا × ب میباشد و نیز چون در ہر یک از خطوط قوسی ج احاد میباشند بنابرین کل تعداد احاد = (اب) × ج . . . . . (ا)

باز چون در یک سطر عرضی ب خطوط قوسی است و در ہر یک از خطوط قوسی ج احاد ہستند بنابرین تعداد احاد در یک سطر عرضی ب ج میباشد و نیز چون کل تعداد سطور عرضی ا ہست بنابرین کل تعداد احاد = ا × (ب ج) میباشد . . . . . (ب)

باز چون در یک سطر عمودی ا خطوط قوسی است و در ہر یک از

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 90 of 308

خطوط قوسی ج احاد است بنابرین تعداد احاد در یک سطر عمودی
ا ج میباشد و نیز چون کل تعداد سطور عمودی ب است بنابرین
کل تعداد احاد = ب × (ا ج) میباشد ..... (ج)
لہذا از (ا) و (ب) و (ج) نتیجہ ذیل اخذ میشود:
(ا ب) × ج = ا × (ب ج) = ب × (ا ج)

نتیجہ از فقرہ ۴۱ و ۴۲ ظاہر است کہ ا ب ج = ب ج ا = ج ا ب
پس نتیجہ اینست کہ بہر ترتیب کہ مضروبات یکعدد نوشتہ شود در حاصل
ضرب ہیچ تفاوت نمیشود

تنبیہ اگرچہ ترتیب مضروبات بر حاصل ضرب ہیچ اثر ندارد
لیکن بہتر اینست کہ مضروبات بترتیب حروف تہجی علی الترتیب نوشتہ شود
مثلاً بہتر است کہ ج × د × ز × ب × آ را بصورت آ ب ج د ز نوشتہ شود

۴۳ اثبات این امر کہ ا^م × ا^ن = ا^{م+ن} اگر م و ن اعداد
صحیح و مثبت باشند

چون ا^۱ = ا ا
و ا^۲ = ا ا ا

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 91 of 308

$\therefore \text{ا}^{2} \times \text{ا}^{3} = (\text{ا}\,\text{ا}) \times (\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا})$

$= \text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}$ [فقرہ ۴۲

$= \text{ا}^{5} = \text{ا}^{2+3}$

ونیز چون $\text{ا}^{4} = \text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}$

و $\text{ا}^{7} = \text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}$

$\therefore \text{ا}^{4} \times \text{ا}^{7} = (\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}) \times (\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا})$

$= \text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}$ [فقرہ ۴۲

$= \text{ا}^{11} = \text{ا}^{4+7}$

وبالعموم $\text{ا}^{م} = \text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,.\,.\,.\,.\,.$ تام

و $\text{ا}^{ن} = \text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,.\,.\,.\,.\,.$ تان

$\therefore \text{ا}^{م} \times \text{ا}^{ن} = (\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,.\,.\,.\,.$ تام$) \times (\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,.\,.\,.\,.$ تان$)$

$= \text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,\text{ا}\,.\,.\,.\,.\,.$ تا $(م+ن)$

$= \text{ا}^{م+ن}$

نتیجہ ۱ $\text{ا}^{م} \times \text{ا}^{ن} \times \text{ا}^{ط} = \text{ا}^{م+ن+ط}$ اگر م ون و ط ہر یک عدد صحیح و مثبت باشند

وچون $\text{ا}^{م} \times \text{ا}^{ن} = \text{ا}^{م+ن}$ $\therefore \text{ا}^{م} \times \text{ا}^{ن} \times \text{ا}^{ط} = \text{ا}^{م+ن} \times \text{ا}^{ط} = (\text{ا}^{م+ن})^{ط+ن+ط}$

نتیجہ ۲ $(\text{ا}^{م})^{ن} = \text{ا}^{من}$ اگر م ون ہر دو عدد صحیح و مثبت باشند

زیرا کہ $(\text{ا}^{م})^{ن} = \text{ا}^{م} \times \text{ا}^{م} \times \text{ا}^{م} \times .\,.\,.\,.\,.$ تان

$= \text{ا}^{م+م+م+}$

$= \text{ا}^{من}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 92 of 308

۴۴ تطبیقات فقرات سابقہ

مثال ۱ ثابت کنید کہ $(-اب)^{۲} = آب^{۲}$

$(-اب)^{۲} = (-اب)(-اب)$

$= (اب)(اب)$ [فقرہ ۴۰]

$= ا \times ب \times ا \times ب$ [فقرہ ۴۲]

$= ا \times ا \times ب \times ب$ [نتیجہ فقرہ ۴۲]

$= (ا ا) \times (ب ب)$ [فقرہ ۴۲]

$= آ ب^{۲}$ [فقرہ ۴۳]

مثال ۲ ضرب کنید: $-۵ آ ب^{۲}$ را در $۴ أ ب^{۲}(-۵ آ ب^{۲})$

$\times (۴ أ ب^{۲}) = -\{(۵ آ ب^{۲}) \times (۴ أ ب^{۲})\}$ [فقرہ ۴۰]

$= -\{۵ آ ب^{۲} \times ۴ \times أ ب^{۲}\}$ [فقرہ ۴۲]

$= -\{۵ \times ۴ \times آ \times أ \times ب^{۲} \times ب^{۲}\}$ [نتیجہ فقرہ ۴۲]

$= -\{۲۰ \times (آ أ) \times (ب^{۲} ب^{۲})\}$ [فقرہ ۴۲]

$= -۲۰ آ ب^{۴}$

مثال ۳ جملہائے ذیل را مختصر کنید:-

$(-۲ لا^{۲} ی^{۲} ع) \times (۴ لا^{۲} ی^{۲} ع^{۲}) \times (-۶ لا ی^{۲} ع^{۲})$

$(-۲ لا^{۲} ی^{۲} ع) \times (۴ لا^{۲} ی^{۲} ع^{۲}) = -\{(۲ لا^{۲} ی^{۲} ع) \times (۴ لا^{۲} ی^{۲} ع^{۲})\}$

$= -\{۲ \times لا^{۲} \times ی^{۲} \times ع \times ۴ \times لا^{۲} \times ی^{۲} \times ع^{۲}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 93 of 308

$= -\{٢ \times ٤ \times لا^{٥} \times لا \times ى^{٣} \times ى \times ع^{٦} \times ع\}$

$= -\{٨ \times (لا^{٥} \times لا) \times (ى^{٣} \times ى) \times (ع^{٦} \times ع)\}$

$= -٨ لا^{٦} ى^{٤} ع^{٧}$

بنابرین جملہ مفروضہ $= (-٨ لا^{٦} ى^{٤} ع^{٧}) \times (-٦ لا ى^{٣} ع^{٣})$

$= (٨ لا^{٦} ى^{٤} ع^{٧}) \times (٦ لا ى^{٣} ع^{٣})$

$= ٨ \times لا \times ى^{٤} ع^{٧} \times ٦ \times لا \times ى^{٣} \times ع^{٣}$

$= ٨ \times ٦ \times لا \times لا \times ى^{٤} \times ى^{٣} \times ع^{٧} \times ع^{٣}$

$= ٤٨ (لا لا) \times (ى^{٤} ى^{٣}) \times (ع^{٧} ع^{٣})$

$= ٤٨ لا^{٢} ى^{٧} ع^{١٠}$

امثلہ (١٧)

ثابت کیجئے کہ :-

(١) $(-ا)(-ا)(٣ب) = -٣ ا ب$ (٢) $(٢ ا)(-٤ ب) = -٨ ا ب$

(٣) $(-٣ ا)(-٦ ا^{٢}) = ١٨ ا^{٣}$ (٤) $(-٤ ب)(-٥ ا) = ٢٠ ا ب$

(٥) $(-٢ ج)(-١٣ ا ب) = ٢٦ ا ب ج$ (٦) $١٠ \times ٣٥ = ١٤ \times ٢٥$

(٧) $١٥ \times ٧٥ = ٣٥ \times ٥$ (٨) $(-ا)^{٣} = -ا^{٣}$

(٩) $(ا ب)^{٢} = ا^{٢} ب^{٢}$ (١٠) $(-ا ب)^{٢} = -ا^{٢} ب^{٢}$

(١١) $(-ا^{٣} ب^{٢})^{٢} = ا^{٦} ب^{٤}$ (١٢) $(-لا^{٥})^{٣} = -لا^{١٥}$

(١٣) $(-لا ى)^{٥} = -لا^{٥} ى^{٥}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 94 of 308

ضرب کنید :-

(۱۴) ۶ لأی راد در -۷ لأی² (۱۵) -۳ لأی² راد در ۸ لأی³

(۱۶) -۵ لأی² راد در -۸ لأی³ (۱۷) -۱۲ لأی² ع راد در ۱۳ لأی ع²

(۱۸) -۱۴ لأی³ ع راد در -۱۰ لأی ع²

مختصر کنید :-

(۱۹) (-۳ أب) × (۴ أب²) × (-۲ أب²)

(۲۰) (-۲ أ) × (-۷ أب²) × (-۵ أ³ ب³)

(۲۱) (-۶ لأی² ع) × (۲ ع لأی³) × (-۴ ی² ع² لا)

(۲۲) (-۳ لأی) × (۴ ع ی لا) × (-لأ ع³ ی²) × (۲ ع لای)

۴۵ حاصل ضرب جملہائے مفرد دائماً بقرار فقرات سابقہ معلوم میشود لیکن در حل اکثر سوالات متعلق چنان ضرورت می افتد کہ عمل ضرب در ذہن کردہ شود - لہذا برائے افادہ و مشق طلبہ چند مثال در باب اینچنین عمل ذہنی در ذیل مندرج گشتہ :-

مثال ۱ حاصل ضرب ۳ لأ و -۵ لای بنویسید

۳ لأ² × (-۵ لای) = -۱۵ لأ³ ی

مثال ۲ حاصل ضرب -۵ أب و -۸ أب² را بنویسید

(-۵ أب) × (-۸ أب²) = ۴۰ أ² ب³

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 95 of 308

امثلہ (۱۸)

حاصل ضرب جملہائے ذیل را بنویسید :-

(۱) -۲لا۲ در ۵لا۲ (۲) ۵أ۲ب در -۴ا ب۲

(۳) -۳م۲ن۵ در -۷ن۲م۵ (۴) ۳لا۲ی۵ در -۶لا ی۲ع

(۵) -أ۲ب۲ در -۳أ ب۲ (۶) ۵م ن۲ ۰ -۸م۲ن

(۷) -۱۰الا ی۲ع در -۵لا ی۲ع (۸) ۶۴ در -۶لا ی۲ع

(۹) -۶لا ی۲ع۲ در ۸لا ی۲ع (۱۰) -۵أ۲ب ج۲ در -۵أ ب۲ج۲

(۱۱) ۳لا ی۲ع در -۸لا ی۲ع (۱۲) -۴ا ب لا ی در +۸أ۲لا ب ی۲ع

(۱۳) -۷أ ب۲ع۲ در -۵ا ب ع (۱۴) ۵أ۲لا ی در -۱۲لا ی۲أ

(۱۵) -۱۴الا ی۲ در -۵لا ی۲ع (۱۶) ۲ا ب ج۲ در -۹أ ب۲ج

(۱۷) -۷أ۲لا ی در -۹لا ی۲أ (۱۸) -۸لا ی۲ع۲ در -۲۰ی ع۲لا

(۱۹) -۱۳أ۲ ب۲ ج۲ در -۵ ب ج۲أ

(۲۰) -۷أ۲لا ی۲ع در -۱۶ع۲لا ی۲

۴۶ اثبات این امر کہ ا(ب+ج) = ا ب + ا ج

اگر اعداد صحیح و مثبت باشد و قیمت عددی ب و ج معین نباشد

ا(ب+ج) = (ب+ج)+(ب+ج)+(ب+ج) ..... تا ا

= (ب+ب+ب ... تا ا)(ج+ج+ج) ..... تا ا

= ا ب + ا ج ..... (۱)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 96 of 308

اگر ا عدد صحیح و منفی باشد مثلاً ا = - لا باشد

پس (- لا)(ب + ج) = - [لا (ب + ج)]

= - (لاب + لاج)

= - لاب - لاج

= (- لا) ب + (- لا) ج

پس ثابت شد ہر قیمت منفی ا لازم است کہ ا (ب + ج) = اب + اج

نتیجہ ۱ برعکس فوق اب + اج = ا (ب + ج)

و ہمچنین لای آ + لای ب = لای (آ + ب)

نتیجہ ۲ چون ب - ج = ب + (- ج)

∴ ا (ب - ج) = ا [ب + (- ج)]

= اب + ا (- ج)

= اب - اج

و برعکس آن اب - اج = ا (ب - ج)

لہذا ۲ ا لا - ۲ ا ی = ۲ ا (لا - ی)

نتیجہ ۳ ا (ب + ج + د) = ا {ب + (ج + د)}

= اب + ا (ج + د) = اب + اج + اد

و ہمچنین ا (ب + ج + د + ط + ہ + ف . . . . .)

= اب + اج + اد + اط + ا ہ . . . . . .

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 97 of 308

پس ہر گاہ یک جملۂ مرکب در یک جملۂ مفرد ضرب شود حاصل ضرب آنہا مساوی مجموع آن حدود میباشد کہ از حاصل ضرب ہر حد جملۂ مرکب مذکور در حد جملۂ مفرد مذکور پیدا میشوند۔

ورعکس آن ا(ب + ج + د + ط ....) = اب + اج + اد + اط ....

مثال ۱ ۲اب - ۳ب² را در ۵اب ضرب کنید۔

۵اب (۲اب - ۳ب²) = ۵اب {۲اب + (-۳ب²)}

= ۵اب × ۲اب + ۵اب × (-۳ب²)

= ۱۰آب² - ۱۵اب³

مثال ۲ ۲لا³ - ۳لا² + ۵لا - ۶ را در - ۶لا + ۴ ضرب کنید۔

(-۶لا) (لا³ - ۳لا² + ۵لا - ۶لا + ۴)

= (-۶لا) {لا³ + (-۳لا²) + ۵لا + (-۶لا) + ۴}

= (-۶لا)لا³ + (-۶لا)(-۳لا²) + (-۶لا)(۵لا) + (-۶لا)(-۶لا) + (-۶لا)(۴)

= -۶لا⁴ + ۱۸لا³ - ۳۰لا² + ۳۶لا - ۲۴لا

تنبیہ مبتدی را باید کہ حل امثلہ را بطریق فوق بنماید لیکن چون قدری استعمال بنماید پس اختصار عمل لازم است چنانکہ از امثلۂ ذیل ظاہر خواہد شد

مثال ۳ حاصل ضرب - ۴آ² + ۵آب - ۶آب² - ۸اب³ + ۹ب⁴ را در - ۳آب² بدست آرید۔

- ۴آ² + ۵آب - ۶آب² - ۸اب³ + ۹ب⁴
- ۳آب²

۱۲آ⁴ب² - ۱۵آ³ب³ + ۱۸آ²ب⁴ + ۲۴آب⁵ - ۲۷آب⁶

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 98 of 308

مثال ۴ مختصر کنید:- $۲لا(۳لا-۲)+۲لا(۲لا+۳)-(لا+۳)۶$

چون $۲لا(۳لا-۲)=۶لا^۲-۴لا$

و $۲لا(۳لا+۳)=۴لا^۲+۶لا$

و $۶(لا-۳)=۶لا-۱۸$

∴ جملہ مفروضہ $=(۶لا^۲-۴لا)+(۴لا^۲+۶لا)-(۶لا-۱۸)$

$=۶لا^۲-۴لا^۲+۴لا^۲+۶لا-۶لا+۱۸$

$=۶لا^۲+۱۸$

مثال ۵ جملہ ہائے ذیل را مختصر کنید: $۳ا(۳ا-۵)-۳ا$

بر جائے $(۳ا-۵)$ لارا بنویسید و بجائے $(ا-۰)$

∴ $۳ا(۳ا-۵)-۳ا(ا-۰)=۳لا-۳ای$

$=۳ا(لا-ی)$

$=۳ا\{(۳ا-۵)-(ا-۰)\}$

$=۳ا(۱+۱)=۳ا^۲+۳ا$

المسئلہ (۱۹)

ضرب کنید:-

(۱) $(۲ا-۳ب)$ در $-اب$ (۲) $ا-۲ب+۳ج$

(۳) $۲ا^۲-۳ب^۲ج$ در $اب ج$ (۴) $لا^۲ی-۲لای^۲-ی$ در $-۳لای$

(۵) $-آ^۲ب+اب^۲-۳آ^۲ب+۵آ^۲$ در $-۷ب^۲$

(۶) $۲اب-۳بج+۴اج-۵ابج$ در $-۸آ^۲ب ج$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 99 of 308

حاصل ضرب جملہائے ذیل را بنویسید :-

(۷) $۳ؤ^{۲}لا-۴ؤلا^{۲}+۵ؤلا$ و $-۲ؤ^{۲}$

(۸) $-۲م^{۲}+۳مںن-۵م^{۲}ں^{۲}$ و $۴مں^{۲}$

(۹) $۵لا^{۲}-۶لا^{۲}+۷لا^{۲}-۸لا$ و $-۴لا^{۲}$

(۱۰) $-۲ج^{۲}د+۳د^{۲}ج-۵جد^{۲}-۴جد$ و $-۶جد$

(۱۱) $۸ا^{۲}-۶ا^{۲}ب+۵اب^{۲}-۴ب^{۳}$ و $-۲ا^{۲}ب$

(۱۲) $-ا^{۲}بج+اب^{۲}ج-اب^{۲}ج+ا^{۲}ب^{۲}-ب^{۲}ج$ و $-ا^{۲}ب^{۲}ج$

جملہائے ذیل را مختصر کنید :-

(۱۳) $۷لا^{۲}(لا-۲)-۲لا^{۲}(لا-۳)-۸لا^{۲}(۱-۲لا)$

(۱۴) $-۵لا^{۲}(لا+۷)-۷لا^{۲}(۳-۵لا)+۳لا(۷لا-۴)+۷لا$

(۱۵) $۹لا^{۲}(لا^{۲}-۲ی^{۲})+۵ی^{۲}(۳لا^{۲}+ی^{۲})+۳ی^{۲}(لا^{۲}-۱۰ی^{۲})$

(۱۶) $لا^{۲}(لا^{۲}+۲لا^{۲}+۲لا)-۲لا(لا^{۲}+۲لا^{۲}+۲لا)+۲لا(لا^{۲}+۲لا^{۲}+۲لا)$

(۱۷) $اب^{۲}(اب^{۲}-۲اب^{۲}+۲اب)+۲اب^{۲}(اب^{۲}-۲اب^{۲}+۲اب)$
$+۲اب(اب^{۲}-۲اب^{۲}+۲اب)$

(۱۸) $۲اب^{۲}(۲اب^{۲}+۶اب^{۲}+۹اب)-۶اب^{۲}(۲اب^{۲}+۶اب^{۲}+۹اب)$
$+۹اب^{۲}(۲اب^{۲}+۶اب^{۲}+۹اب)$

(۱۹) $ؤ^{۲}(۲لا-۳ی)+ؤ^{۲}(۳لا+۴ی)-ؤ^{۲}(۵لا-۲ی)$

(۲۰) $۲اب(۳ؤ^{۲}-۴ب^{۲})-۲اب(۳ؤ^{۲}-۳ب^{۲})-۲اب(۳ؤ^{۲}-ب^{۲})$

(۲۱) $لا^{۲}(۲ولا+۳بلا+۴جلا)-لا^{۲}(ولا+۲بلا+۳جلا)-لا^{۲}(بلا+جلا)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 100 of 308

۴۷ اثبات این امر که (ا + ب)(ج + د) = اج + اد + بج + بد

فرض کنید که ج + د = لا

∴ (ا + ب)(ج + د) = (ا + ب) لا

= لا (ا + ب)

= لاا + لاب . . . . . [فقره ۴۶

= اا + ب لا

= ا (ج + د) + ب (ج + د)

= اج + اد + بج + بد . . . [فقره ۳۴

نتیجه ابطریق فوق این هم ثابت شده میتواند که

(ا + ب + ج + د + ...)(م + ن + ط + ق + ...)

= ا(م + ن + ط + ق + ...) + ب(م + ن + ط + ق + ...)

+ ج (م + ن + ط + ق + ...) + د (م + ن + ط + ق + ...) وعلی هذا القیاس

پس برای معلوم کردن حاصل ضرب یک جمله مرکب در یک جمله مرکب دیگر قاعده اینست که هر حد جمله اول را در کل حدود جمله دوم ضرب کرده مجموع جبری همه این حاصل ضربها را جزوی نوشته شود

نتیجه ۲ چون ا - ب = ا + (- ب) و ج - د = ج + (- د)

لهذا (ا - ب)(ج - د) = {ا + (- ب)} {ج + (- د)}

= اج + ا(- د) + (- ب) ج + (- ب)(- د)

= اج - اد - بج + بد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 101 of 308

مثال ۱ ضرب کنید:- $۲ا+۳ب$ را در $۴ا+۵ب$

$(۴ا+۵ب)(۲ا+۳ب)=(۴ا)(۲ا)+(۴ا)(۳ب)+(۵ب)(۲ا)+(۵ب)(۳ب)$

$=۸ا^۲+۱۲ابا+۱۰ابا+۱۵ب^۲$

$=۸ا^۲+۲۲ابا+۱۵ب^۲$

مثال ۲ ضرب کنید:- $(۳لا-۷ی)$ را در $(۲لا-۵ی)$

$(۲لا-۵ی)(۳لا-۷ی)=(۲لا)(۳لا)+(۲لا)(-۷ی)+(-۵ی)(۳لا)+(-۵ی)(-۷لا)$

امثلہ (۲۰)

ضرب کنید:-

(۱) $۲ا+۳ب$ را در $ا+ب$ (۲) $۲م-۳ن$ را در $م-ن$

(۳) $ا+ب+ج$ را در $ا+ب+ج$ (۴) $ا-ب+ج$ را در $ا-ب+ج$

(۵) $ا-ب+ج$ را در $ا-ب+ج$ (۶) $ا-۲ب-۳ج$ را در $۲ا-ب+ج$

(۷) $۲لا-۳ی-۴۶$ را در $لا-ی-۶$ (۸) $-۵لا+۲ا-۳ب$ را در $-لا-ا+ب$

(۹) $لا^۲+ی^۲+۶$ را در $لا-ی-۶$ (۱۰) $لای+ی۶+۶لا$ را در $لای-ی۶-۶لا$

۴۸ تنظیم جملۂ جبریہ بلحاظ صعود و نزول قوای یک حرف خاص

ہرگاہ حدود مختلفہ یک جملۂ جبریہ کہ قوتہائے مختلفۂ یک حرف خاص داشتہ باشند چنین تنظیم دادہ شود کہ اول آن حد نوشتہ شود کہ دران قوت آن حرف خاص از ہمہ

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 102 of 308

زیادہ تر باشد و قوائے مابعد آنحرف بالتدریج کمتر شدہ بروند و در ینصورت
این چنین عمل را تنظیم جملہ نظر بہ قوائے متناقصۂ آن حرف خاص گفتہ میشود۔
لیکن اگر تنظیم جملہ برعکس فوق باشد آنرا تنظیم جملہ نظر بقوائے متزائدۂ
آن حرف گفتہ میشود۔

مثلاً جملۂ منتظمہ ۲ أ۲ + ۳ أ لای - ۵ أ لای۲ + ۴ أ لای۳ - ۲ لای۴ + لای۵
نظر بقوائے أ متناقص و نظر بقوائے ی متزائد میباشد

و جملۂ منتظمہ ذیل - ۵ أ لای۲ + لای۵ + ۴ أ لای۲ + أ۲ - ۲ لای۴ + ۳ أ لای
نظر بقوائے لا متناقص میباشد

تنبیہ ہرگاہ ضرب یک جملہ در جملۂ دیگر مطلوب باشد بہتر اینست
کہ اولاً مضروب و مضروب فیہ ہر دو را نظر بقوائے متزائدہ یا متناقص
یک حرف خاص تنظیم داده عمل ضرب نموده شود۔

مثال أ - ب۲ - اب را در اب - ب۲ + أ۲ ضرب کنید

مضروب = أ - اب - ب۲

مضروب فیہ = أ۲ + اب - ب۲

حاصل ضرب در أ۲ = أ۳ - أ۲ب - أب۲

و حاصل ضرب در - اب = + أ۲ب - أب۲ - اب۳

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 103 of 308

وحاصل ضرب ب - ب = - أ ب + ا ب + ب ۲

∴ حاصل ضرب = أ ۲ - ۳ أ ب + ب ۲

تنبیہ - تشریح عمل فوق

اولاً مضروب و مضروب فیہ نظر بقوائے متناقصہ انتظیم شدہ زیر یکدیگر نوشتہ و تحت آن یک خط عرضی کشیدہ شدہ است و بعد ازان حاصل ضرب ہر حد مضروب فیہ در کل حدود مضروب اینطور نوشتہ شدہ کہ حدود متشابہہ زیر حدود متشابہہ و حدود غیر متشابہہ جدا میباشند و بعد از ضرب حد اخیر مضروب فیہ در تحت آن یک خط عرضی کشیدہ شدہ است و بعد ازان ہمہ سطور عمودی جمع شدہ اند۔

مثال ۲ ۲ أ - ۳ لا - ۵ ا لا ا در - ۳ لا + ۲ أ + ۵ ا لا ضرب کنید

اول مضروب و مضروب فیہ ہر دو را نظر بقوائے متزائدہ لا تنظیم کنید

پس مضروب = ۲ أ - ۵ ا لا - ۳ لا

مضروب فیہ = ۲ أ + ۵ ا لا - ۳ لا

۴ أ ۲ - ۱۰ أ لا - ۶ أ لا ۲

+ ۱۰ أ لا - ۲۵ أ لا ۲ - ۱۵ ا لا ۲

- ۶ أ لا ۲ + ۱۵ ا لا ۲ + ۹ لا ۳

حاصل ضرب = ۴ أ ۲ - ۳۷ أ لا ۲ + ۹ لا ۳

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 104 of 308

مثال ۳ $۲أ^۲ب - ۵أب^۲ - أ^۳ + ۳أ^۲ب^۲$ را در $۲أ^۲ - ۳أب + ۴أب^۲ - ۵أب^۳$ ضرب کنید -

اول مضروب و مضروب فیه هر دو را نظر بقوای متناقصه اتنظیم کنید

مضروب $= -أ^۳ + ۲أ^۲ب + ۳أب^۲ - ۵أب^۳$

مضروب فیه $= ۲أ^۲ - ۳أب - ۵أب^۲ + ۴أب^۳$

$-۲أ^۵ + ۴أ^۴ب + ۶أ^۳ب^۲ - ۱۰أ^۲ب^۳$

$+ ۳أ^۴ب - ۶أ^۳ب^۲ - ۹أ^۲ب^۳ + ۱۵أب^۴$

$+ ۵أ^۳ب^۲ - ۱۰أ^۲ب^۳ - ۱۵أب^۴ + ۲۵أب^۵$

$- ۴أ^۲ب^۳ + ۸أب^۴ + ۱۲أب^۵ - ۲۰أب^۶$

حاصل ضرب $= -۲أ^۵ + ۷أ^۴ب + ۵أ^۳ب^۲ - ۳۳أ^۲ب^۳ + ۸أب^۴ + ۳۷أب^۵ - ۲۰أب^۶$

تنبیه در مثال فوق مضروب و مضروب فیه هر دو جمله متجانس درجه چهارم میباشند و حاصل ضرب نیز جمله متجانس درجه هشتم است و بهمین طریق ثابت شده میتواند که هرگاه مضروب و مضروب فیه هر دو جمله متجانس باشند حاصل ضرب نیز جمله متجانس خواهد بود و درجه حاصل ضرب مساوی مجموع درجه های مضروب و مضروب فیه خواهد بود -

پس معلوم کردن صحت حاصل ضرب اینچنین جملها بسیار آسانست زیرا که هرگاه حد غیر متجانس در حاصل ضرب واقع شود ظاهر است که حاصل ضرب مذکور غلط خواهد بود

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 105 of 308

مثال ۴ $أ^٢ - أب + ب^٢$ و $أ^٢ + أب + ب^٢$ و $أ^٢ - أب + ب^٢$ را باہم ضرب کنید

(۱) $أ^٢ - أب + ب^٢$

$أ^٢ + أب + ب^٢$

$أ^٣ - أ^٢ب + أب^٢$

$أ^٢ب - أب^٢ + ب^٣$

$+ أ^٢ب - أب^٢ + ب^٣$

$+ أ^٣ + ب^٣$

(۲) $أ^٢ + أب + ب^٢$

$أ^٢ - أب + ب^٢$

$أ^٣ + أ^٢ب + أب^٢$

$- أ^٢ب - أب^٢ - ب^٣$

$+ أ^٢ب + أب^٢ + ب^٣$

$+ أ^٣ + ب^٣$

مثال ۵ $م لا^٢ - ن لا - ط$ را در $لا^٢ + ط لا - ا$ ضرب کنید :-

مضروب $= م لا - ن لا - ط$

مضروب فیہ $= لا^٢ + ط لا - ا$

$م لا^٣ - ن لا^٢ - ط لا^٢$

$+ ط م لا^٢ - ط ن لا - ط^٢ لا$

$- م لا^٢ + ن لا + ط$

$م لا^٣ - لا^٢ (ن - ط م) - لا (ط + ط ن + م) + لا (ن - ط) + ط$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 106 of 308

تنبیہ مجموع سطور عمودی بحکم نتائج فقرہ ۴۷ وبموجب قواعد خطوط قوسی نوشتہ شدہ است۔

امثلہ (۲۱)

ضرب کنید:-

(۱) لا^{۲} - لا + ۱ را در لا + ۱ (۲) ا - ا ب + ب^{۲} را در ا + ب

(۳) ا^{۲} + ا ب + ب^{۲} را در ا - ب (۴) ا^{۲} - ۲ ا ب + ب^{۲} را در ا^{۲} + ۲ ا ب + ب^{۲}

(۵) لا^{۲} + لا + ۱ را در لا^{۲} - لا + ۱ (۶) ی^{۲} - لا ی^{۲} + لا^{۲} را در لا^{۲} + لا ی^{۲} + ی^{۲}

(۷) م^{۲} - م ن^{۲} + ن^{۲} را در م^{۲} + ن^{۲} (۸) ط ق^{۲} + ط^{۲} ق را در - ق^{۲} + ط^{۲}

(۹) ۲۵ ب^{۲} + ۳۰ ا ب + ۹ ا^{۲} را در ۳ ا - ۵ ب

(۱۰) ا^{۲} + ۵ ا ب^{۲} - ۶ ا^{۲} ب را در ۵ ب^{۲} + ا^{۲} + ۶ ا ب

(۱۱) ۲ ا - ۳ ب + ۴ ج را در ۲ ا + ۳ ب - ۴ ج

(۱۲) لا^{۳} - ۳ لا^{۲} + ۳ لا - ۱ را در لا^{۲} + ۳ لا + ۱

(۱۳) ۲ ا لا^{۲} + ا^{۲} + ۳ ا^{۲} لا + لا^{۲} + ۲ ا^{۲} لا را در ا^{۲} + لا^{۲} - ۲ ا لا

(۱۴) ا^{۲} + ۳ ا^{۲} ب + ب^{۳} + ۳ ا ب^{۲} را در ۳ ا ب^{۲} - ب^{۳} + ا^{۳} - ۳ ا^{۲} ب

(۱۵) لا^{۲} - ۱۱ + لا^{۲} - ۴ لا + ۲ لا^{۳} را در ۳ + لا^{۲} - ۲ لا

(۱۶) ۱ + ۲ لا + لا^{۲} + ۲ لا^{۳} + ۳ لا^{۴} را در ۱ + لا^{۲} - ۳ لا

(۱۷) ب^{۳} + ا ب^{۲} + ا^{۲} ب + ا^{۳} + ۱ را در ا ب^{۲} - ا^{۲} ب + ب^{۳} + ا ب - ب^{۲} + ۱

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 107 of 308

(۱۸) لا^{۲} - لای - لاء + ی^{۲} - ی ء + ء^{۲} را در لا + ی + ء

(۱۹) ا^{۲} + ب^{۲} + ج - ب ج - ج ا - ا ب را در ا + ب + ج

(۲۰) ۵ ا^{۲} ب + ۴ ب^{۳} + ۲ ا^{۳} - ۳ ا ب^{۲} را در ۲ ا ب^{۲} - ۳ ا^{۲} ب + ا^{۳} - ۵ ب^{۳}

جملہائے ذیل را باہم ضرب کنید :-

(۲۱) ا + ب وا - ب وا^{۲} + ب^{۲}

(۲۲) ا^{۲} + ا^{۲} ب^{۲} + ب^{۴} وا + ب وا - ب

(۲۳) لا + لای^{۲} + ی^{۲} ولا + ی^{۲} ولا + ی ولا - ی

(۲۴) لا^{۲} + ۳ لای + ۵ ی^{۲} ولا - ۳ لای + ۵ ی^{۲} ولا^{۲} - لای^{۲} + ی^{۲}

(۲۵) ا^{۳} + ا^{۲} ب^{۲} + ب^{۳} وا^{۲} + ا ب^{۲} + ب^{۳} وا + ب وا - ب

ضرب کنید :-

(۲۶) ا لا^{۲} + ب لا - ج در ط لا - ق

(۲۷) م لا^{۲} - ن لا - ر در ن لا - ر

(۲۸) ا لا^{۲} - ب لا + ج در لا^{۲} - ب لا - ج

(۲۹) ا لا^{۲} - ب لا^{۲} + ج لا - د در ب لا^{۲} - ج لا + د

(۳۰) ط لا^{۲} - (ق - ر) لا + س در م لا^{۲} - ن لا - س

(۳۱) لا + ا ولا + ب ولا + ج را باہم ضرب کنید :-

(۳۲) لا - ا ولا - ب ولا - ج را باہم ضرب کنید :-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 108 of 308

بواسطۂ مساوات $ا^{ن} \times ا^{م} = ا^{ن+م}$ کہ در جمیع قیمتہاے م و ن صحیح

میباشد مساوات ذیل را ثابت کنید :-

(۳۳) $ا^{\frac{1}{2}} \times ا^{\frac{1}{2}} = ا$ $\left\{ ا^{\frac{1}{2}} \times ا^{\frac{1}{2}} = ا^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = ا^{1} = ا \right\}$

(۳۴) $ل^{\frac{1}{3}} \times ل^{\frac{2}{3}} = ل$

(۳۵) $ا^{\frac{1}{2}} \times ا^{\frac{1}{2}} \times ا^{\frac{1}{2}} \times ا^{\frac{1}{2}} = ا$ $\left[ا^{\frac{1}{2}} \times ا^{\frac{1}{2}} = ا^{\frac{1}{2}} \times ا^{\frac{1}{2}} = ا^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = ا^{1} = ا \right]$

(۳۶) $\sqrt[4]{ا} = ا^{\frac{1}{4}}$

$\left[(ا^{\frac{1}{4}})^{4} = ا^{\frac{1}{4}} \times ا^{\frac{1}{4}} \times ا^{\frac{1}{4}} \times ا^{\frac{1}{4}} = ا^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = ا^{1} = ا \therefore ا^{\frac{1}{4}} = ا \right]$

(۳۷) $\sqrt[3]{ل^{2}} = ل^{\frac{2}{3}}$

(۳۸) $\sqrt[5]{ى^{3}} = ى^{\frac{3}{5}}$

(۳۹) $\sqrt[3]{ع^{2}} = ع^{\frac{2}{3}}$

(۴۰) $ب^{\frac{3}{5}} \times ب^{\frac{2}{5}} = ب$

(۴۱) $ج^{\frac{3}{5}} \times ج^{\frac{2}{5}} \times ج^{\frac{5}{5}} = ج$

(۴۲) $ى^{\frac{2}{7}} \times ى^{\frac{3}{7}} \times ى^{\frac{2}{7}} = ى$

(۴۳) $ل^{\frac{2}{3}} \times ل^{\frac{1}{3}} = ل$

(۴۴) $ى^{\frac{2}{7}} \times ى^{\frac{5}{7}} = ى$ $\left[ل^{\frac{2}{3}} \times ل^{\frac{1}{3}} = ل^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = ل^{1} = ل \right]$

(۴۵) $ع^{\frac{3}{4}} \times ع^{-\frac{1}{4}} = ع$

(۴۶) $\sqrt[3]{ا} = ا^{\frac{1}{3}}$

$\left[(ا^{\frac{1}{3}})^{3} = ا^{\frac{1}{3}} \times ا^{\frac{1}{3}} \times ا^{\frac{1}{3}} = ا^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = ا^{1} = ا \therefore ا^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{ا} \right]$

(۴۷) $ب^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{ب^{3}}}$

(۴۸) $ج^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{ج^{2}}}$

(۴۹) $ا^{-\frac{3}{4}} \times ا^{\frac{1}{4}} = ا^{-1}$

(۵۰) $ل^{\frac{2}{3}} \times ل^{-\frac{2}{3}} = ل$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 109 of 308

حاصل ضرب جملہائے ذیل را بنویسید :-

(۵۱) $-۳ل^{۲}$ در $۲ل^{۳}$ (۵۲) $۵ی^{۳}$ در $-\frac{۲}{۵}ی^{۵}$

(۵۳) $۲ل^{۲}ی^{\frac{۱}{۲}}$ در $۳ل^{۳}ی^{\frac{۱}{۲}}$ (۵۴) $-۵ل ی^{۳}$ در $-۳ل^{۳}ی^{\frac{۱}{۲}}$

(۵۵) $۴ا^{۳}ب^{۳}$ در $-\frac{۳}{۴}ا^{۲}ب^{۵}$ (۵۶) $\frac{۳}{۵}ا^{۵}ی^{۲}$ در $-\frac{۵}{۳}ا^{۵}ی^{۴}$

(۵۷) $-۴ا^{\frac{۱}{۲}}ب^{\frac{۳}{۲}}ج^{۴}$ در $۳ا^{۳}ب^{\frac{۳}{۲}}ج^{۵}$ (۵۸) $-۵ل^{۳}ی^{۵}ع^{۳}$ در $-۳ل^{\frac{۱}{۲}}ی^{\frac{-۳}{۲}}ع^{\frac{-۲}{۳}}$

(۵۹) $-۶ا^{۵}ب^{-۳}ج^{-۲}$ در $۵ا^{\frac{۱}{۲}}ب^{-۲}ج^{۵}$ (۶۰) $-۴ا^{۵}ل^{۳}ی^{۵}$ در $-۱۹ا^{\frac{۱}{۲}}ل^{\frac{-۳}{۲}}ی^{۵}$

ضرب کنید :-

(۶۱) $ا^{\frac{۱}{۲}}+ب^{\frac{۱}{۲}}$ در $ا^{\frac{۱}{۲}}+ب^{\frac{۱}{۲}}$ (۶۲) $ا^{\frac{۱}{۲}}-ب^{\frac{۱}{۲}}$ در $ا^{\frac{۱}{۲}}-ب^{\frac{۱}{۲}}$

(۶۳) $۳ل^{۳}-۴ی^{\frac{۱}{۲}}$ در $۳ل^{۳}+۴ی^{\frac{۱}{۲}}$ (۶۴) $ا^{۳}-ا^{\frac{۳}{۲}}ب^{\frac{۳}{۲}}+ب^{۳}$ در $ا^{\frac{۱}{۲}}+ب^{\frac{۱}{۲}}$

(۶۵) $ل^{۳}+ل^{\frac{۱}{۲}}ی^{\frac{۱}{۲}}+ی^{۲}$ در $ل^{\frac{۱}{۲}}-ی^{\frac{۱}{۲}}$ (۶۶) $ا^{۳}-ا^{۲}ب^{\frac{۳}{۲}}+ب^{۳}$ در $ا^{\frac{۳}{۲}}+ا^{۲}ب^{\frac{۳}{۲}}+ب^{۳}$

(۶۷) $۲ل^{۳}-۵ل^{۲}ی^{\frac{۱}{۲}}-۳ی^{۳}$ در $۲ل^{۳}+۵ل^{۲}ی^{\frac{۱}{۲}}-۳ی^{۳}$

(۶۸) $ا^{۳}+ا^{۲}ب^{\frac{۱}{۲}}+ا^{۲}ب^{\frac{۳}{۲}}+اب+ا^{\frac{۱}{۲}}ب^{۲}+ب^{۳}$ در $ا^{\frac{۱}{۲}}-ب^{\frac{۱}{۲}}$

(۶۹) $ل^{۳}-ل^{۲}ی^{\frac{۱}{۲}}+ل^{\frac{۱}{۲}}ی-ی^{۲}$ در $ل^{\frac{۱}{۲}}+ی^{\frac{۱}{۲}}$

(۷۰) $ا^{۲}+ا^{\frac{۳}{۲}}ب^{\frac{۱}{۲}}+ا^{\frac{۱}{۲}}ب+ب^{۲}$ در $ا^{\frac{۱}{۲}}-ب^{\frac{۱}{۲}}$

(۷۱) $ل^{۲}+ی^{۲}+ع^{۲}-ل^{\frac{۱}{۲}}ی^{\frac{۱}{۲}}-ی^{\frac{۱}{۲}}ع^{\frac{۱}{۲}}-ع^{\frac{۱}{۲}}ل^{\frac{۱}{۲}}$ در $ل^{\frac{۱}{۲}}+ی^{\frac{۱}{۲}}+ع^{\frac{۱}{۲}}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 110 of 308

(۷۲) $ا^{۳} - ا^{۲}لا + الا^{۲} - لا^{۳}$ در $ا^{۲} + لا^{۲}$

(۷۳) $ا^{۳} - ۴ا^{۲}ب + ۴اب^{۲} - ب^{۳}$ در $ا^{۲} - ۲اب + ب^{۲}$

(۷۴) $لا^{۳} + ۳لا^{\frac{۲}{۳}}ی^{\frac{۲}{۳}} + ۲ی^{۲}$ در $لا^{۲} - ۳لا^{\frac{۲}{۳}}ی^{\frac{۲}{۳}} + ۲ی^{۲}$

(۷۵) $۲۷ا^{۵} + ۳۱ا^{۳}ب^{\frac{۲}{۳}} - ۵ب^{۳}$ در $۲ا^{۵} + ۳ا^{۳}ب^{\frac{۲}{۳}} + ۵ب^{۳}$

(۷۶) $۳لا^{\frac{۵}{۶}} - ۵لا^{\frac{۴}{۶}}ی^{\frac{۱}{۶}} + ۷ی^{\frac{۲}{۶}}$ در $۳لا^{\frac{۵}{۶}} + ۵لا^{\frac{۴}{۶}}ی^{\frac{۱}{۶}} - ۷ی^{\frac{۲}{۶}}$

(۷۷) جملہ ذیل را نظر بقوائے متناقصۂ لا تنظیم کنید

$۸لا^{۵} - ۳۲لا^{\frac{۹}{۲}} + ۶لا^{۴} + ۳۲لا^{\frac{۷}{۲}} - ۷لا^{۳} - ۵لا^{\frac{۵}{۲}} + ۴لا^{۲}$

(۷۸) جملہ ذیل را نظر بقوائے متزائدۂ ا تنظیم کنید

$۵ا^{\frac{۲}{۳}}ب^{\frac{۲}{۳}} + ۸ا^{۲}ب^{۲} - ۳۱ا^{\frac{۵}{۳}}ب - ۵ا^{۴}ب^{\frac{۴}{۳}} - ۷ا^{۳}ب^{\frac{۵}{۳}} + ۶ا^{۲}ب^{۲} - ۲ا^{\frac{۷}{۳}}ب^{\frac{۷}{۳}}$

باب ششم

۴۹ دساتیر جبریہ یا اشکال جبریہ و استعمال آنہا

تعریف

نتائج جبریہ را کہ بواسطۂ علامات و حروف ازان تعبیر میشود دساتیر جبریہ میگویند

و مراد از دساتیر جبریہ چند قواعد عمومیہ در باب مقادیر حسابیہ و جبریہ میباشد

تنبیہ

چون بیان مفصل این دساتیر جبریہ برائے حل سوالات

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 111 of 308

وباقی عملیات جبری نہایت ضروری میباشد بنابرین برائے افادہ
طلبہ آنرا درج نمودیم لیکن طالبعلم میباید کہ اولاً دساتیر آسانرا ذہن نشین خود
بسازد و دساتیر دیگر راکہ علامات معینہ دارد بعد از حصول مشق بخواند

۵۰ دستور $(ا + ب)^2 = ا^2 + ۲ا ب + ب^2$

$$(ا + ب)^2 = (ا + ب)(ا + ب)$$
$$= ا(ا + ب) + ب(ا + ب)$$
$$= ا^2 + ۲ا ب + ب^2$$

یعنی مربع مجموع دو مقدار جبری مساوی مجموع مربع ہر یکے از اجزا
و دو چند حاصل ضرب آجزا میباشد۔

نتیجہ $ا^2 + ب^2 = (ا + ب)^2 - ۲ا ب$

$$= (ا + ب)^2 - ۲ا ب$$

مثال ۱ مربع $۲لا + ۳ی$ را معلوم کنید۔

$$(۲لا + ۳ی)^2 = (۲لا)^2 + ۲(۲لا)(۳ی) + (۳ی)^2$$
$$= ۴لا^2 + ۱۲لای + ۹ی^2$$

مثال ۲ مربع $۵لا + ۴$ را معلوم کنید۔

$$(۵لا + ۴)^2 = (۵لا)^2 + ۲(۵لا)(۴) + (۴)^2$$
$$= ۲۵لا^2 + ۴۰لا + ۱۶$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 112 of 308

مثال ۳ مربع $۴ا^۲ + ۷ب^۲$ را معلوم کنید

$(۴ا^۲ + ۷ب^۲)^۲ = (۴ا^۲)^۲ + ۲(۴ا^۲)(۷ب^۲) + (۷ب^۲)^۲$

$= ۱۶ا^۴ + ۵۶ا^۲ب^۲ + ۴۹ب^۴$

مثال ۴ مربع $ا + ب + ج$ را معلوم کنید

$(ا + ب + ج)^۲ = \{ا + (ب + ج)\}^۲$ ($ب + ج$ را یک حد تصور کنید)

$= ا^۲ + ۲ا(ب + ج) + (ب + ج)^۲$

$= ا^۲ + ۲اب + ۲اج + ب^۲ + ۲بج + ج^۲$

$= ا + ب^۲ + ج^۲ + ۲اب + ۲اج + ۲بج$

مثال ۵ مربع $ا + ب + ج + د$ را معلوم کنید۔

$(ا + ب + ج + د)^۲ = \{(ا + ب) + (ج + د)\}^۲$ باز $(ا + ب)$ را یک حد و $(ج + د)$ را حد دیگر تصور کنید

$= (ا + ب)^۲ + ۲(ا + ب)(ج + د) + (ج + د)^۲$

$= ا^۲ + ب^۲ + ۲اب + ۲اج + ۲اد + ۲بج + ۲بد + ج^۲ + ۲جد + د^۲$

$= ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + د^۲ + ۲اب + ۲اج + ۲اد + ۲بج + ۲بد + ۲جد$

مثال ۶ جملہ ذیل را مختصر کنید:۔

$(ا + ب - ج)^۲ + ۲(ا + ب - ج)(ا - ب + ج) + (ا - ب + ج)^۲$

فرض کنید کہ $(ا + ب - ج) = لا$ و $(ا - ب + ج) = ی$

لہذا جملہ مفروضہ $= لا^۲ + ۲لای + ی^۲ = (لا + ی)^۲$

$= \{(ا + ب - ج) + (ا - ب + ج)\}^۲ = (۲ا)^۲ = ۴ا^۲$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 113 of 308

مثال ۷ اگر لا = ۵ اوی = -۹ باشد قیمت عددی ۹لا۲ + ۳۰لای + ۲۵ی۲ را معلوم کنید

جملہ مفروضہ = (۳لا)۲ + ۲(۳لا)(۵ی) + (۵ی)۲

= (۳لا + ۵ی)۲

لیکن ۳لا + ۵ی = ۳لا + ۵ی = ۳ × ۱۵ + ۵ × (-۹)

= ۴۵ - ۴۵ = ۰

∴ جملہ مفروضہ = ۰

امثلہ (۲۲)

مربع جملہای ذیل را معلوم کنید :-

(۱) ۳لا + ۴ (۲) ۷لا + ۸ (۳) ۱ + ۵ب (۴) ۲۱ + ۷ب

(۵) ۳لا + ۸ی (۶) ۵م + ۸ن (۷) ۱لا + ۳بی (۸) ۴۱ب + ج۲

(۹) ۲۱۲ + ۵ب۲ (۱۰) ۴م۳ + ن۲ (۱۱) ۱ + ۲ب + ۳ج (۱۲) ۱ب + ج ب + ج۱

(۱۳) ۲ط + ۳ق + ۴ر (۱۴) لا۲ + ی۲ + ع۲

(۱۵) ۲لا + ۳ی + ۴ع (۱۶) لا۲ + ی۲ + ع۲

(۱۷) لا + ی + ۲۱ + ۳ب (۱۸) ۳۱ + ۴ب + ج + ۲د

(۱۹) ۲۱ + لا + ۴ی + ۳ع (۲۰) ۴م + ۳ن + ۳ط + ۲ق

جملہای ذیل را مختصر کنید :-

(۲۱) (لا + ی)۲ + ۲(لا + ی)(لا - ی) + (لا - ی)۲

(۲۲) (لا - ی + ع)۲ + (ی + ع - لا)۲ + ۲(لا - ی + ع)(ی + ع - لا)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 114 of 308

(۲۴) $(۱۲ا-۳ب+۴ج)^۲+(۱۲ا+۳ب-۴ج)^۲+۲(۱۲ا-۳ب+۴ج)$
$(۱۲ا+۳ب-۴ج)$

(۲۴) $(۱۵ا-۷ب)^۲+۲(۱۵ا-۷ب)(۹ب-۱۲ا)+(۹ب-۱۲ا)^۲$

(۲۵) $(۱۲ا-۵ی-۶ع)^۲+(۶ی+۶ع-لا)^۲+۲(۱۲ا-۵ی-۶ع)$
$(۶ی+۶ع-لا)$

قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۲۶) $۴لا^۲+۲۸لا+۴۹$ اگر لا $=-۸$

(۲۷) $۲۵ا^۲+۴۰ا ب+۱۶ب^۲$ اگر ا $=-۱۸$ و ب $=۲۳$

(۲۸) $۱۸۱لا^۲+۹۰لا ی+۲۵ی^۲$ اگر لا $=۱۵$ و ی $=-۲۷$

(۲۹) $۱۶م^۲+۵۶م ن+۴۹ن^۲$ اگر م $=-۱۳$ و ن $=۷$

(۳۰) $۶۴ا^۲+۱۶ا ج+ج^۲$ اگر ا $=۱$ و ج $=-۴۹$

(۳۱) $۱۸۱لا^۲+۱۸۱لا ع+ع^۲$ اگر لا $=۷$ و ع $=-۶۷$

(۳۲) $۳۶ط^۲+۱۳۲ط ق+۱۲۱ق^۲$ اگر ط $=۱۲$ و ق $=-۷$

(۳۳) اگر م $+\frac{۱}{م}=۴$ باشد ثابت کنید کہ $(م^۲+\frac{۱}{م^۲})=۱۴$

۵۲ دستور $(ا-ب)^۲=ا^۲-۲ا ب+ب^۲$

$(ا-ب)^۲=(ا-ب)(ا-ب)$

$=ا(ا-ب)-ب(ا-ب)$

$=ا^۲-۲ا ب+ب^۲$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 115 of 308

یعنی مربع تفاضل دو مقدار جبری مساوی مجموع مربع ہر یکے از مقادیر مذکور ناقص دو چند حاصل ضرب مقادیر مذکور میباشد

نتیجہ ۱ $(ا+ب)^2 = (ا^2 - ۲ا ب + ب^2) + ۲ا ب = (ا-ب)^2 + ۲ا ب$

نتیجہ ۲ چون $(ا+ب)^2 = ا^2 + ۲ا ب + ب^2$ و $(ا-ب)^2 = ا^2 - ۲ا ب + ب^2$

لہذا $(ا+ب)^2 = (ا-ب)^2 + ۴ا ب$

و $(ا-ب)^2 = (ا+ب)^2 - ۴ا ب$

مثال ۱ مربع $(۳ا - ۴ب)$ را معلوم کنید۔

$(۳ا - ۴ب)^2 = (۳ا)^2 - ۲(۳ا)(۴ب) + (۴ب)^2$

$= ۹ا^2 - ۲۴ا ب + ۱۶ب^2$

مثال ۲ مربع $لا - ی - ع$ را معلوم کنید۔

$(لا - ی - ع)^2 = \{لا - (ی + ع)\}^2$

$= لا^2 - ۲لا(ی + ع) + (ی + ع)^2$

$= لا^2 - ۲لای - ۲لاع + ی^2 + ۲ی ع + ع^2$

$= لا^2 + ی^2 + ع^2 - ۲لای - ۲لاع + ۲ی ع$

مثال ۳ مربع $(۲لا - ۳ی - ۴ع)$ را معلوم کنید

$(۲لا - ۳ی - ۴ع)^2 = \{۲لا - (۳ی + ۴ع)\}^2$

$= (۲لا)^2 - ۲ × ۲لا(۳ی + ۴ع) + (۳ی + ۴ع)^2$

$= ۴لا^2 - ۱۲لای - ۱۶لاع + ۹ی^2 + ۲۴ی ع + ۱۶ع^2$

$= ۴لا^2 + ۹ی^2 + ۱۶ع^2 - ۱۲لای - ۱۶لاع + ۲۴ی ع$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 116 of 308

مثال ۴ مربع (ا - ب - ج + د) را معلوم کنید :-

$$(ا - ب ج + د)^{۲} = \{(ا - ب) - (ج - د)\}^{۲}$$

$$= (ا - ب)^{۲} - ۲(ا - ب)(ج - د) + (ج - د)^{۲}$$

$$= (ا^{۲} - ۲ا ب + ب^{۲}) - ۲(ا ج - ا د - ب ج + ب د)$$

$$+ (ج^{۲} - ۲ ج د + ج^{۲})$$

$$= ا^{۲} - ۲ا ب + ب^{۲} - ۲ا ج + ۲ا د + ۲ب ج$$

$$- ۲ب د + ج^{۲} - ۲ج د + ج^{۲}$$

$$= ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} + د^{۲} - ۲ا ب - ۲ا ج + ۲ا د + ۲ب ج$$

$$- ۲ب د - ۲ج د$$

مثال ۵ جملہ ذیل را مختصر کنید :-

$$(الا - ب ی + ج ع)^{۲} + (الا - ب ی - ج ع)^{۲} - ۲(الا - ب ی + ج ع)$$

$$(الا - ب ی - ج ع)$$

فرض کنید کہ $(الا - ب ی + ج ع) = م$

$$(الا - ب ی - ج ع) = ن$$

$$\therefore \text{جملہ مفروضہ} = م^{۲} + ن^{۲} - ۲ م ن$$

$$= (م - ن)^{۲}$$

$$= \{(الا - ب ی + ج ع) - (الا - ب ی - ج ع)\}^{۲}$$

$$= (۲ ج ع)^{۲} = ۴ ج^{۲} ع^{۲}$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 117 of 308

مثال ۶ قیمت جملۂ ذیل را معلوم کنید :-

$۹ا^۲ - ۴۸ اب + ۶۴ ب^۲$ اگر $ا = ۱۵$ و $ب = ۶$

جملۂ مفروضہ $= (۱۳ا)^۲ - ۲(۱۳ا)(۸ب) + (۸ب)^۲$

$= (۱۳ا - ۸ب)^۲$

$= (۴۵ - ۴۸)^۲$

$= (-۳)^۲ = ۹$

امثلہ (۲۳)

مربع جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۱) $۲لا - ۷$ (۲) $۸لا - ۵$ (۳) $اlا - ب ی$

(۴) $-۵لا - ۳ی$ (۵) $۳م - ۸ن$ (۶) $-اب - ج د$

(۷) $اٰب ج^۲ د$ (۸) $لآ - ۲ی ع$ (۹) $-م ن ط - ق ر$

(۱۰) $۲ا^۲ - ۵ب^۲$ (۱۱) $ا - ۲ب - ۳ج$ (۱۲) $۲لا - ۳ی - ۴ع$

(۱۳) $۳م - ۴ن - ۵ق$ (۱۴) $ا^۲ - ۳ب^۲ - ۵ج^۲$ (۱۵) $لا - ی - ا - ب$

(۱۶) $ا - ۲لا - ۳ب - ۴ی$ (۱۷) $۹۰ - ۱$ (۱۸) $۱۲۰ - ۳$

(۱۹) $۵۰۰ - ۲$ (۲۰) $۱۰۰۰ - ۷$

جملہائے ذیل را مختصر کنید :-

(۲۱) $(ا + ۳ب)^۲ - ۲(ا + ۳ب)(ا - ۳ب) + (ا - ۳ب)^۲$

(۲۲) $(۲ا - ۴ب + ۵ج)^۲ + (۳ا + ۴ب + ۵ج)^۲ - ۲(۲ا - ۴ب + ۵ج)$
$(۳ا + ۴ب + ۵ج)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 118 of 308

(۲۳) $(۳ا+۵ب+۷ج)^۲+(۷ج-۴ا+۵ب)^۲-۲(۳ا+۵ب+۷ج)$
$(۷ج-۴ا+۵ب)$

(۲۴) $(۲لا^۲-ی^۲-۵ع^۲)^۲-۲(۲لا^۲-ی^۲-۵ع^۲)(۶ع^۲+۲لا^۲-ی^۲)$
$+(۶ع^۲+۲لا^۲-ی^۲)^۲$

(۲۵) $(اب-۳بج+جا)^۲+(اب+۴بج+۲جا)^۲-۲(اب-۳بج+جا)$
$(اب+۴بج+۲جا)$

قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۲۶) $ا^۲ب^۲-۱۲ابج+۳۶ج^۲$ اگر ا = ۴ وب = ۷ وج = ۵

(۲۷) $لا^۲ی^۲-۲۴لاعی+۱۴۴ع^۲$ اگر لا = ۷ وی = ۹ وع = ۶

(۲۸) $۲۵(لا+ی)^۲+۶ع^۲-۱۰ع(لا+ی)$ اگر لا = ۲۷ وی = -۲۲ وع = ۲۹

(۲۹) $۹ج^۲-۲۴ج(ا+ب)+۴۹(ا+ب)^۲$ اگر ا = -۳۷ وب = ۵۷ وج = ۴۵

(۳۰) $۶۴(۷b-۵ق)^۲-۹۶(۷b-۵ق)ر+۳۶ر^۲$
اگر b = ۲۸ وق = ۳۲ وو = ۴۶

(۳۱) اگر $ج-\frac{۱}{ج}=۴$ باشد پس ثابت کنید کہ $ج^۲+(\frac{۱}{ج})^۲=۱۸$

۵۲ $(ا+ب)(ا-ب)=ا^۲-ب^۲$

$[(ا+ب)(ا-ب)=ا(ا-ب)+ب(ا-ب)$
$=ا^۲-ب^۲]$

یعنی حاصل ضرب مجموع و تفاضل دو مقدار جبری مساوی تفاضل مربع مقادیر کو میباشد
و نیز برعکس ان چون $ا^۲-ب^۲=(ا+ب)(ا-ب)$ میباشد بنابرین ہر گاہ
یک جملہ شکل $ا^۲-ب^۲$ را داشتہ باشد مضروبات آنرا معلوم کرده میتوانیم

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 119 of 308

مثال ۱ ۳لا+۵ی و ۳لا-۵ی راباہم ضرب کنید۔

$(۳لا+۵ی)(۳لا-۵ی)=(۳لا)^{۲}-(۵ی)^{۲}$

$=۹لا^{۲}-۲۵ی^{۲}$

مثال ۲ ا+ب ج و ا-ب+ج راباہم ضرب کنید۔

$(ا+ب ج)(ا-ب+ج)=\{ا+(ب ج)\}\{ا-(ب-ج)\}$

$=ا^{۲}-(ب-ج)^{۲}$

$=ا^{۲}-(ب^{۲}-۲ب ج+ج^{۲})$

$=ا^{۲}-ب^{۲}+۲ب ج-ج^{۲}$

مثال ۳ لا^۲+لای+ی^۲ ولا^۲-لای+ی^۲ راباہم ضرب کنید

$(لا^{۲}+لای+ی^{۲})(لا^{۲}-لای+ی^{۲})=\{(لا^{۲}+ی^{۲})+لای\}\{(لا^{۲}+ی^{۲})-لای\}$

$=(لا^{۲}+ی^{۲})^{۲}-لا^{۲}ی^{۲}$

$=لا^{۴}+۲لا^{۲}ی^{۲}+ی^{۴}-لا^{۲}ی^{۲}$

$=لا^{۴}+لا^{۲}ی^{۲}+ی^{۴}$

مثال ۴ جملۂ ذیل را مختصر کنید $(ا^{۲}+اب+ب^{۲})^{۲}-(ا^{۲}-اب+ب^{۲})^{۲}$

جملۂ مفروضہ $=\{(ا^{۲}+اب+ب^{۲})+(ا^{۲}-اب+ب^{۲})\}\times\{(ا^{۲}+اب+ب^{۲})-(ا^{۲}-اب+ب^{۲})\}$

$=(۲ا^{۲}+۲ب^{۲})(۲اب)$

$=۴اب(ا^{۲}+ب^{۲})$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 120 of 308

مثال ۵ قیمت $(۹۷۲۶۸۵۴)^۲ - (۹۷۲۶۸۴۹)^۲$ معلوم کیجئے

جملہ مفروضہ $= (۹۷۲۶۸۵۴ + ۹۷۲۶۸۴۹)(۹۷۲۶۸۵۴ - ۹۷۲۶۸۴۹)$

$= ۵ \times ۱۹۴۵۳۷۰۳$

$= ۹۷۲۶۸۵۱۵$

مثال ۶ مضروبات جملہ ذیل معلوم کیجئے :-

$(ا + ب)^۲ - (ج - د)^۲$

جملہ فوق $= \{(ا + ب) + (ج - د)\}\{(ا + ب) - (ج - د)\}$

$= (ا + ب + ج - د)(ا + ب - ج + د)$

مثال ۷ $۱۶ا^۲ - ۸۱لا^۲$ کے مضروبات تفریق کیجئے

جملہ فوق $= (۴ا)^۲ - (۹لا)^۲$

$= (۴ا + ۹لا)(۴ا - ۹لا)$

وچون $۴ا^۲ - ۹لا^۲ = (۲ا)^۲ - (۳لا)^۲$

$= (۲ا + ۳لا)(۲ا - ۳لا)$

∴ جملہ مفروضہ $= (۴ا^۲ + ۹لا^۲)(۲ا + ۳لا)(۲ا - ۳لا)$

مسئلہ (۲۴)

جملہائے ذیل را باہم ضرب کنید :-

(۱) $ولا + بی$ و $ولا - بی$ (۲) $۵لا + ۸$ و $۵لا - ۸$

(۳) $جلا + د^۲$ و $جلا - د^۲$ (۴) $اب + بج$ و $اب - بج$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 121 of 308

(۵) ۷ا۲+۳اب و۷ا۲-۳اب (۶) ۴ا۲-۵ب۲ و۴ا۲+۵ب۲

(۷) م۲-۳ن و م۲+۳ن (۸) ۲ا۲ب-۷ب۲ج و۲ا۲ب+۷ب۲ج

(۹) لا+۱ ولا-۱ ولا+۱ (۱۰) ا۲+ب۲ وا۲-ب۲ وا۲+ب۲

(۱۱) ا+ب+ج وا+ب-ج (۱۲) ا+ب+ج وا-ب-ج

(۱۳) م۲+م ن+ن۲ و م۲-م ن+ن۲

(۱۴) ولا+ب ی+ج ع وا لا-ب ی+ج ع

(۱۵) ا-۲ب+۳ج وا+۲ب-۳ج

(۱۶) لا۲-لا+۱ ولا۲+لا+۱

(۱۷) لا۲-لا۲+۱ ولا۲+لا۲+۱

(۱۸) لا۲+۲لای+۲ی۲ ولا۲-۲لای+۲ی۲

(۱۹) ا۲+اب√۲+ب۲ وا۲-اب√۲+ب۲

(۲۰) لا۲-۲لا+۱ ولا۲+۲لا+۱ ولا۲+۲لا۲+۱

جملہائے ذیل را مختصر کنید:-

(۲۱) (ا+ب-ج)۲-(ا-ب+ج)۲

(۲۲) (ا-۲ب+۳ج)۲-(ا+۲ب-۳ج)۲

(۲۳) (لا۲+لای+ی۲)۲-(لا۲-لای+ی۲)۲

(۲۴) (لا+ی-ا+ب)۲-(لا-ی+ا-ب)۲

(۲۵) (۲ا+۳ب-۵ج+۷د)۲-(۲ا-۳ب+۵ج-۷د)۲

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 122 of 308

قیمت جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۲۶) ۲۳۴۵ × ۲۳۴۳ - ۲۳۴۵ × ۲۳۴۲ × ۲۳۴۳

(۲۷) (۵۳۴۹۷)² - (۵۳۴۸۷)²

(۲۸) ۴۹۸۵۶۷ × ۴۹۸۵۶۲ - ۴۹۸۵۶۷ × ۴۹۸۵۶۲

جملہائے ذیل را بمضروبات تفریق کنید :-

(۲۹) ۲۵لا² - ۳۶

(۳۰) ۹و² - ۱۶ج²

(۳۱) ۱۶م² - ۴۹ن²

(۳۲) ۴ط² - ۸۱ق²

(۳۳) و²لا² - ۶۴ب²

(۳۴) ۳۶لا² - ۱۲۱ی²

(۳۵) ۴۹ - ۶۴د²

(۳۶) ۴۴ج² - ۲۵د²

(۳۷) (ا + ب)² - ج²

(۳۸) (ا + ۲ب)² - ۲۵ج²

(۳۹) ۴لا² - (۳ا - ۴ب)²

(۴۰) و² - (۲ب - ۳ج)²

(۴۱) و² - ۸۱ب²

(۴۲) (لا - ی)² - (ا - ب)²

(۴۳) ۸۱لا² - ۶۲۵ی²

(۴۴) (۲ا - ۵لا)² - ۳۶لا²

(۴۵) ۲۵لا² - (۴لا + ۱)²

(۴۶) (۴ا + ۷ب)² - (۳ا - ۸ب)²

(۴۷) (۳لا + ۵ی)² - (۲لا - ۷ی)²

(۴۸) (ا + ۲ب - ۳ج)² - (ا + ب - ج)²

(۴۹) (۲م + ۳ن - ۵ط)² - (۲ن + ۳ط)²

(۵۰) (۳لا - ۴ی + ۷ع)² - (۲لا - ۳ی + ۶ع)²

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 123 of 308

۵۳ دستور $(ا+ب)^۳ = ا^۳ + ۳ا^۲ب + ۳اب^۲ + ب^۳$

یا $= ا^۳ + ب^۳ + ۳اب(ا+ب)$

$(ا+ب)^۳ = (ا+ب)(ا+ب)^۲$

$= (ا+ب)(ا^۲ + ۲اب + ب^۲)$

$= ا(ا^۲ + ۲اب + ب^۲) + ب(ا^۲ + ۲اب + ب^۲)$

$= ا^۳ + ۳ا^۲ب + ۳اب^۲ + ب^۳$

ونیز $= ا^۳ + ۳اب(ا+ب) + ب^۳$

$= ا^۳ + ب^۳ + ۳اب(ا+ب)$

نتیجہ $ا^۳ + ب^۳ = \{ا^۳ + ب^۳ + ۳اب(ا+ب)\} - ۳اب(ا+ب)$

$= (ا+ب)^۳ - ۳اب(ا+ب)$

مثال ۱ مکعب $(۳ا + ۵ب)$ را معلوم کنید

$(۳ا + ۵ب)^۳ = (۳ا)^۳ + ۳(۳ا)^۲(۵ب) + ۳(۳ا)(۵ب)^۲ + (۵ب)^۳$

$= ۲۷ا^۳ + ۳(۹ا^۲)(۵ب) + ۳(۳ا)(۲۵ب^۲) + ۱۲۵ب^۳$

$= ۲۷ا^۳ + ۱۳۵ا^۲ب + ۲۲۵اب^۲ + ۱۲۵ب^۳$

مثال ۲ مختصر کنید :- $(لا-ی)^۳ + (لا+ی)^۳ + ۳$

$(لا-ی)^۲(لا+ی) + ۳(لا+ی)^۲(لا-ی)$

فرض کنید کہ $ا = لا-ی$ و $ب = لا+ی$

∴ جملہ مفروضہ $= ا^۳ + ب^۳ + ۳ا^۲ب + ۳اب^۲$

$= ا^۳ + ۳ا^۲ب + ۳اب^۲ + ب^۳$

و∴ $= (ا+ب)^۳$

$= \{(لا-ی) + (لا+ی)\}^۳$

$= (۲لا)^۳ = ۸لا^۳$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 124 of 308

مثال ۳ اگر ا + ب = ۵ و ا ب = ۶ باشد قیمت عددی $ا^۳ + ب^۳$ را معلوم کنید

$ا^۳ + ب^۳ = (ا + ب)^۳ - ۳ ا ب (ا + ب)$

∴ بقرار شرط سوال $= (۵)^۳ - ۳ \times ۶ \times ۵$

$= ۱۲۵ - ۹۰ = ۳۵$

مثال ۴ اگر $لا + \frac{۱}{لا} = ط$ باشد ثابت کنید کہ $لا^۳ + (\frac{۱}{لا})^۳ = ط^۳ - ۳ط$

چون $ا^۳ + ب^۳ = (ا + ب)^۳ - ۳ ا ب (ا + ب)$

∴ $لا^۳ + \frac{۱}{لا^۳} = (لا + \frac{۱}{لا})^۳ - ۳ لا \times \frac{۱}{لا} (لا + \frac{۱}{لا})$

$= (لا + \frac{۱}{لا})^۳ - ۳ (لا + \frac{۱}{لا})$

پس قیمت مطلوب $= ط^۳ - ۳ط$

مثال ۵ مکعب $ط + ق + ر$ را معلوم کنید :-

$(ط + ق + ر)^۳ = \{(ط + ق) + ر\}^۳$

$= (ط + ق)^۳ + ۳ (ط + ق)^۲ ر + ۳ (ط + ق) ر^۲ + ر^۳$

$= (ط^۳ + ۳ط^۲ ق + ۳ط ق^۲ + ق^۳) + ۳ر (ط^۲ + ۲ط ق + ق^۲)$

$+ ۳ر^۲ (ط + ق) + ر^۳$

$= ط^۳ + ق^۳ + ر^۳ + ۳ط^۲ ق + ۳ق^۲ ط + ۳ط^۲ ر + ۳ق^۲ ر + ۳ط ر^۲ + ۳ق ر^۲$

$+ ۳ق ر^۲ + ۳ق ر^۲ + ۶ط ق ر$

مثال ۶ اگر لا = ۵ وی = −۲ باشد قیمت عددی $لا^۳ + ۹ لا ی + ۲۷ لا ی^۲ + ۲۷ ی^۳$ را معلوم کنید

جملہ مفروضہ $= لا^۳ + ۳ لا^۲ (۳ ی) + ۳ لا (۳ ی)^۲ + (۳ ی)^۳$

$= (لا + ۳ ی)^۳ = (۵ - ۶)^۳$

$= (-۱)^۳ = -۱$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 125 of 308

امثلہ (۲۵)

مکعب جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۱) $۲لا+۱$ (۲) $۳لا+ی$ (۳) $۲لا+۳ا$

(۴) $ا^۲+۲ب$ (۵) $اب+بج$ (۶) $ا+۲لا+ب$

(۷) $۲م+۳ن+ط$ (۸) $لای+ی۶+۶لا$

جملہائے ذیل را مختصر کنید :-

(۹) $(۳م+۵ن)^۳+۳(۳م+۵ن)^۲(۲م-۵ن)+۳(۳م+۵ن)(۲م-۵ن)^۲+(۲م-۵ن)^۳$

(۱۰) $(۳لا-۸ی)^۳+(۹ی-۲لا)^۳+۳(لا+ی)(۳لا-۸ی)(۹ی-۲لا)$

(۱۱) $(۱۳ا-۷ب)^۳+(۱۰اب-۱۳ا)^۳+۹ب(۱۳ا-۷ب)(۱۰اب-۱۳ا)$

(۱۲) $(۵لا-۲)^۳+(۳-۴لا)^۳+۳(لا+۱)(۵لا-۲)(۳-۴لا)$

(۱۳) $(۳-۷لا)^۳+(۸لا-۱)^۳+۳(۸لا-۱)(۳-۷لا)(لا+۳)$

(۱۴) $\{ا-(ب+ج)\}^۲+\{ا+(ب-ج)\}^۲+۶ا\{ا-(ب-ج)\}^۲$

قیمت عددی $ا^۳+ب^۳$ را در دو سوال ذیل معلوم کنید :-

(۱۵) اگر $ا+ب=۶$ و $اب=۷$

(۱۶) اگر $ا+ب=۷$ و $اب=۸$

(۱۷) اگر $ا+\frac{۱}{ا}=۳$ باشد ثابت کنید کہ $ا^۳+(\frac{۱}{ا})^۳=۱۸$

(۱۸) اگر $ع+\frac{۱}{ع}=۴$ باشد قیمت عددی $ع^۳+(\frac{۱}{ع})^۳$ را معلوم کنید۔

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 126 of 308

قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید

(۱۹) $۶۴ + ۴۸ لا + ۱۲ لا^۲ + لا^۳$ اگر لا = −۸

(۲۰) $۸م^۳ + ۳۶ م^۲ ن + ۵۴ م ن^۲ + ۲۷ ن^۳ + ۶۴$ اگر م = ۶ و ن = −۵

(۲۱) $لا^۳ + ۱۵ لا^۲ + ۷۵ لا + ۱۸۹$ اگر لا = −۹

(۲۲) $لا^۳ + ۱۸ لا^۲ + ۱۰۸ لا + ۳۵۱$ اگر لا = −۱۱

(۲۳) اگر لا + ی = ۵ باشد ثابت کنید کہ $لا^۳ + ی^۳ + ۱۵ لا ی = ۱۲۵$

(۲۴) اگر $ا^۲ + ب^۲ = ج^۲$ باشد ثابت کنید کہ $ا^۶ + ب^۶ + ۳ ا^۲ ب^۲ = ج^۶$

(۲۵) اگر ط + ق = ۲ باشد ثابت کنید کہ $ط^۳ + ق^۳ + ۶ ط ق = ۸$

۵۴ دستور $(ا - ب)^۳ = ا^۳ - ۳ ا^۲ ب + ۳ ا ب^۲ - ب^۳$

یا $= ا^۳ - ب^۳ - ۳ ا ب (ا - ب)$

$(ا - ب)^۳ = (ا - ب)(ا^۲ - ۲ ا ب + ب^۲) = (ا - ب)(ا - ب)^۲$

$= ا(ا^۲ - ۲ ا ب + ب^۲) - ب(ا^۲ - ۲ ا ب + ب^۲)$

$= ا^۳ - ۳ ا^۲ ب + ۳ ا ب^۲ - ب^۳$

$= ا^۳ - ۳ ا ب (ا - ب) - ب^۳$

$= ا^۳ - ب^۳ - ۳ ا ب (ا - ب)$

نتیجہ $ا^۳ - ب^۳ = \{ا^۳ - ب^۳ - ۳ ا ب (ا - ب)\} + ۳ ا ب (ا - ب)$

$= (ا - ب)^۳ + ۳ ا ب (ا - ب)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 127 of 308

مثال ۱ مکعب ۳لا-۴ی را معلوم کنید۔

$(۳لا-۴ی)^۳=(۳لا)^۳-۳(۳لا)^۲(۴ی)+۳(۳لا)(۴ی)^۲-(۴ی)^۳$

$=۲۷لا^۳-۳(۹لا^۲)(۴ی)+۳(۳لا)(۱۶ی^۲)-۶۴ی^۳$

$=۲۷لا^۳-۱۰۸لا^۲ی+۱۴۴لای^۲-۶۴ی^۳$

مثال ۲ مکعب ا-ب-ج را معلوم کنید۔

$(ا-ب-ج)^۳=\{(ا-ب-ج)\}^۳$

$=(ا-ب)^۳-۳(ا-ب)^۲ج+۳(ا-ب)ج^۲-ج^۳$

$=(ا^۳-۳ا^۲ب+۳اب^۲-ب^۳)-۳(ا^۲-۲اب+ب^۲)ج+۳(ا-ب)ج^۲-ج^۳$

$=ا^۳-ب^۳-ج^۳-۳ا^۲ب+۳اب^۲-۳ا^۲ج+۳ب^۲ج+۳اج^۲-۳بج^۲-۶ابج$

مثال ۳ قیمت عددی ۲۷لا^۳-۵۴لا^۲+۳۶لا-۶۴ را معلوم کنید

اگر لا=۲½

جملہ مفروضہ $=(۳لا)^۳-۳(۹لا^۲)\times۲+۳(۳لا)۴-۸=۵۶$

$=(۳لا-۲)^۳-۵۶$

∴ قیمت مطلوب $=(۷-۲)^۳-۱$

$=۱۲۵-۵۶$

$=۶۹$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 128 of 308

امثلہ (۲۶)

مکعب جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۱) ۱-۲ا (۲) ۲-۳لا (۳) ۳-۴لا

(۴) ۵م-۴ن (۵) ۲ط-۵ق (۶) ۲لا-ی-۶

(۷) ۲م-۳ن-ط (۸) ل-م-ن

جملہائے ذیل را حل کنید :-

(۹) (ا+۲ب)³-۳(ا+۲ب)²(ا-۲ب)+۳(ا+۲ب)(ا-۲ب)²-(ا-۲ب)³

(۱۰) (۳لا-۸ی)³-(۲لا-۷ی)³-۳(۳لا-۸ی)(۲لا-۷ی)(لا-ی)

(۱۱) (۵لا-۸)³-(۳لا-۸)³-۶لا(۵لا-۸)(۳لا-۸)

قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۱۲) م³-۱۲م²ن+۴۸مں²-۶۴ن³ اگر م=۱۲ ون=۳

(۱۳) ۲۷ا³-۱۳۵ا²+۲۲۵ا-۱۲۵ اگر ا=۴

(۱۴) ۸-۹ا+۲۷ا²-۲۷ا³ اگر ا=۳

(۱۵) ۲۱۶-۱۴۴لا+۱۰۸لا²-۲۷لا³ اگر لا=۳

(۱۶) اگر ا-$\frac{۱}{ا}$=۳ باشد قیمت عددی ا³-($\frac{۱}{ا}$)³ را معلوم کنید

(۱۷) اگر ج-$\frac{۱}{ج}$=۵ باشد قیمت عددی ج³-($\frac{۱}{ج}$)³ را معلوم کنید

(۱۸) اگر لا-ی=۳ باشد ثابت کنید کہ لا³-ی³-۹لای=۲۷

(۱۹) اگر ط-۲ق=۴ باشد ثابت کنید کہ ط³-۸ق³-۲۴طق=۶۴

(۲۰) اگر ۲ا-۳ب=۵ باشد ثابت کنید کہ ۸ا³-۷۲ب³-۹۰اب=۱۲۵

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 129 of 308

۵۵ دستور $(ا+ب)(ا^۲-اب+ب^۲)=ا^۳+ب^۳$

$(ا+ب)(ا^۲-اب+ب^۲)=ا(ا^۲-اب+ب^۲)+ب(ا^۲-اب+ب^۲)$

$=(ا^۳-ا^۲ب+اب^۲)+(ا^۲ب-اب^۲+ب^۳)$

$=ا^۳+ب^۳$

وبرعکس آن $ا^۳+ب^۳=(ا+ب)(ا^۲-اب+ب^۲)$

لہذا ہر جملہ کہ شکل آن $ا^۳+ب^۳$ باشد بمضروبات تجزیہ میشود

مثال ۱ $لا^۲-لا^۲+۱$ را در $لا^۲+۱$ ضرب کنید

فرض کنید $ا=لا$ و $ب=۱$

$\therefore \quad لا^۲-لا^۲+۱=(لا^۲)^۲-لا^۲\times ۱+(۱)^۲$

$=ا^۲-اب+ب^۲$

پس $(لا^۲+۱)(لا^۲-لا^۲+۱)=(ا+ب)(ا^۲-اب+ب^۲)$

$=ا^۳+ب^۳$

$=(لا^۲)^۳+(۱)^۳=لا^۶+۱$

مثال ۲ $۹لا^۲-۱۲لا+۱۶$ را در $۳لا+۴$ ضرب کنید

فرض کنید کہ $ا=۳لا$

و $ب=۴$

پس چون $۹لا^۲-۱۲لا+۱۶=(۳لا)^۲-(۳لا)\times ۴+(۴)^۲$

$=ا^۲-اب+ب^۲$

$\therefore (۳لا+۴)(۹لا^۲-۱۲لا+۱۶)=(ا+ب)(ا^۲-اب+ب^۲)$

$=ا^۳+ب^۳$

$=(۳لا)^۳+(۴)^۳$

$=۲۷لا^۳+۶۴$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 130 of 308

مثال ۳ $۱۶ا^۲ - ۲۰ا ب + ۲۵ ب^۲$ را در $۴ا + ۵ ب$ ضرب کنید۔

فرض کنید کہ $لا = ۴ا$

$وی = ۵ ب$

چونکہ $۱۶ا^۲ - ۲۰ا ب + ۲۵ ب^۲ = (۴ا)^۲ - (۴ا)(۵ ب) + (۵ ب)^۲$

$= لا^۲ - لا ی + ی^۲$

لہذا $(۴ا + ۵ ب)(۱۶ا^۲ - ۲۰ا ب + ۲۵ ب^۲)$

$= (لا + ی)(لا^۲ - لا ی + ی^۲)$

$= لا^۳ + ی^۳$

$= (۴ا)^۳ + (۵ ب)^۳ = ۶۴ا^۳ + ۱۲۵ ب^۳$

مثال ۴ $آ^۲ + ۸ ج^۳$ را بمضروبات تجزیہ کنید۔

$آ ب^۲ + ۸ ج^۳ = (آ ب)^۳ + (۲ ج)^۳$

$= (آ ب + ۲ ج)\{(آ ب)^۲ - (آ ب)(۲ ج) + (۲ ج)^۲\}$

$= (آ ب + ۲ ج)\{آ^۲ ب^۲ - ۲ آ ب ج + ۴ ج^۲\}$

مسئلہ (۴۷)

ضرب کنید۔

(۱) $ا^۲ - ا + ۱$ را در $ا + ۱$ (۲) $۴لا^۲ - ۲لا + ۱$ را در $۲لا + ۱$

(۳) $۲۵م^۲ - ۵م + ۱$ را در $۵م + ۱$ (۴) $۱۶لا^۲ - ۲۸لای + ۴۹ی^۲$ را در $۴لا + ۷ی$

(۵) $۹م^۲ - ۲۴مں + ۶۴ں^۲$ را در $۳م + ۸ں$

(۶) $آ^۲ ب^۲ - ۴ آ ب ج + ۱۶ ج^۲$ را در $آ ب + ۴ ج$

(۷) $آ^۲ ا^۲ - ۱۵ آ ب ا + ۲۵ ب^۲$ را در $ا لا + ۵ ب$

(۸) $۳۵ا^۲ - ۴۵ا ب + ۸۱ ب^۲$ را در $۵ا + ۹ ب$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 131 of 308

جملہاے ذیل را بمضروبات تجزیہ کنید :-

(۹) $لا^۲ + ۸$ (۱۰) $۸ آ^۲ + ۱$ (۱۱) $م^۲ + ۲۷$

(۱۲) $۲۷ لا^۲ + ۱$ (۱۳) $ع^۶ + ۶۴$ (۱۴) $۱۲۵ م^۳ + ۱$

(۱۵) $۸ آ^۳ + ۳۴۳ لا^۳$ (۱۶) $۶۴ آ^۶ لا^۶ + ۲۷ ی^۳$

۵۶ دستور $(ا - ب)(آ^۲ + اب + ب^۲) = آ^۳ - ب^۳$

$[(ا - ب)(آ^۲ + اب + ب^۲) = ا(آ^۲ + اب + ب^۲) - ب(آ^۲ + اب + ب^۲)$

$= آ^۳ + آ^۲ب + اب^۲ - ب آ^۲ - اب^۲ - ب^۳$

$= آ^۳ - ب^۳]$

وبرعکس آن $آ^۳ - ب^۳ = (ا - ب)(آ^۲ + اب + ب^۲)$

لہذا ہر جملہ کہ شکل آن مثل $آ^۳ - ب^۳$ باشد بمضروبات تجزیہ شدہ میتواند۔

مثال ۱ $۸ آ^۳ + ۱۲ اب^۲ + ۱$ را در $۲ اب^۲ - ۱$ ضرب کنید۔

$(۲ اب^۲ - ۱)(۴ آ^۳ + ۲ اب^۲ + ۱)$

$= (۲ اب^۲ - ۱)\{(۲ اب^۲)^۲ + (۲ اب^۲) \times ۱ + (۱)^۲\}$

$= (۲ اب^۲)^۳ - (۱)^۳$

$= ۸ آ^۶ ب^۶ - ۱$

مثال ۲ $۶۴ لا^۳ - آ^۳ ی^۶$ را بمضروبات تجزیہ کنید

$۶۴ لا^۳ - آ^۳ ی^۶ = (۴ لا)^۳ - (آ ی^۲)^۳$

$= (۴ لا - آ ی^۲)\{(۴ لا)^۲ + (۴ لا)(آ ی^۲) + (آ ی^۲)^۲\}$

$= (۴ لا - آ ی^۲)(۱۶ لا^۲ + ۴ آ لا ی^۲ + آ^۲ ی^۴)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 132 of 308

مشقہ (۲۸)

ضرب کنید :-

(۱) $۱+۳ا+۹ا^۲$ در $ا-۳$ (۲) $۱۶لا^۲+۴لا+ا$ در $۴لا-۱$

(۳) $۲۵م^۲+۱۵ام ن+۹ن^۲$ در $۵م-۳ن$ (۴) $لا^۲+۲لای ع+۴ی^۲ ع^۲$ در $لا-۲ی ع$

(۵) $۹ا^۲+۳ا ب ج+ب^۲ ج^۲$ در $۳ا-ب ج$

بمضروبات تجربہ کنید

(۶) $۲۵ا^۲-۱$ (۷) $۳۴۳لا^۳-۸ی^۳$ (۸) $۲۱۶ک^۳-۱۲۵ل^۳$

(۹) $۱-۱۲۵ک^۳$ (۱۰) $۲۹۷م^۳-۶۴ن^۳$

۵۷ دستور $(لا+ا)(لا+ب)=لا^۲+(ا+ب)لا+اب$

$(لا+ا)(لا+ب)=لا(لا+ب)+ا(لا+ب)$

$=لا^۲+(ا+ب)لا+اب$

ونیز ظاہر است کہ (۱) $(لا-ا)(لا-ب)=لا^۲-(ا+ب)لا+اب$

(۲) $(لا-ا)(لا+ب)=لا^۲+(ب-ا)لا-اب$

(۳) $(لا+ا)(لا-ب)=لا^۲+(ا-ب)لا-اب$

پس توضیح دستور فوق بالفاظ ذیل میشود :-

$(لا+ا)(لا+ب)=لا^۲+$(مجموع جبری ا و ب) + حاصل ضرب ا و ب

مثال حاصل ضرب $لا+۳$ و $لا+۴$ را معلوم کنید :-

چون $۳+۴=۷$ ∴ حاصل ضرب مطلوب $=لا^۲+۷لا+۱۲$

و $۳\times۴=۱۲$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 133 of 308

مثال ۲ لا - ۷ را در لا + ۴ ضرب کنید :-

چون - ۷ + ۴ = - ۳ ∴ حاصل ضرب مطلوب = لا² - ۳ لا - ۲۸

و (- ۷) × ۴ = - ۲۸

مثال ۳ حاصل ضرب لا + ۵ ولا - ۹ را بنویسید :-

چون ۵ - ۹ = - ۴ ∴ حاصل ضرب مطلوب = لا² - ۴ لا - ۴۵

و ۵ × (- ۹) = - ۴۵

مثال ۴ حاصل ضرب لا - ۲ ولا + ۷ را بنویسید :-

چون - ۲ + ۷ = ۵ ∴ حاصل ضرب مطلوب = لا² + ۵ لا - ۱۴

و - ۲ × ۷ = - ۱۴

مثال ۵ حاصل ضرب لا - ۵ ولا - ۸ را بنویسید :-

چون - ۵ - ۸ = - ۱۳ ∴ حاصل ضرب مطلوب = لا² - ۱۳ لا + ۴۰

و (- ۵) × (- ۸) = ۴۰

مسئلہ (۳۹)

حاصل ضرب جملہائے ذیل را بنویسید :-

(۱) لا + ۲ در لا + ۸ (۲) لا + ۳ در لا + ۵ (۳) لا + ۶ در لا + ۱۱

(۴) م + ۷ در م + ۹ (۵) لا - ۶ در لا + ۲ (۶) م - ۲ در م + ۸

(۷) ا - ۳ در ا - ۴ (۸) لا + ۵ در لا - ۳ (۹) لا - ۴ در لا + ۹

(۱۰) لا + ۵ در لا - ۱۰ (۱۱) لا - ۱۲ در لا + ۵ (۱۲) (ک - ۱۳) (ک + ۲)

(۱۳) ا + ۵ در ا + ۱۴ (۱۴) م - ۱۴ در م + ۶ (۱۵) لا - ۵ در لا - ۱۳

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 134 of 308

(۱۶) لا+۷ در لا+۱۲ (۱۷) ا-۳ در ا-۱۱ (۱۸) لا+۴ در لا-۳
(۱۹) م+۵ در م-۱۶ (۲۰) لا-۸ در لا-۱۰ (۲۱) ا+۶ در ا-۱۲
(۲۲) م-۷ در م+۱۳ (۲۳) لا-۱۰ در لا-۱۶ (۲۴) لا+۵ در لا-۸
(۲۵) لا-۱۶ در لا+۱۰

۵۸۰ دستور (لا+ا)(لا+ب)(لا+ج) = لا³+(ا+ب+ج)لا²+(اب+اج+بج)لا+ابج

اثبات این دستور بسیار آسانست و خود طالب علم این را بطریق ضرب حل کرده میتواند
و نیز (لا-ا)(لا-ب)(لا-ج)
= لا³-(ا+ب+ج)لا²+(اب+اج+بج)لا-ابج
و(لا+ا)(لا+ب)(لا-ج)
= لا³+(ا+ب-ج)لا²+(اب-اج-بج)لا-ابج
و(لا+ا)(لا-ب)(لا-ج)
= لا³+(ا-ب-ج)لا²-(اب+اج-بج)لا+ابج

تنبیه این نتائج بطریق ضرب نیز حاصل میشود

مثال احاصل ضرب لا+۲ و لا+۴ و لا+۶ را معلوم کنید

۲+۴+۶ = ۱۲

۲×۴+۲×۶+۴×۶ = ۸+۱۲+۲۴ = ۴۴

۲×۴×۶ = ۴۸

پس حاصل ضرب مطلوب = لا³+۱۲لا²+۴۴لا+۴۸

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 135 of 308

مثال ۳ حاصل ضرب جملہ ذیل را بنویسید لا-۳ ولا-۵ ولا-۷

(-۳)+(-۵)+(-۷)=-۱۵

(-۳)(-۵)+(-۷)(-۳)+(-۷)(-۵)=۱۵+۲۱+۳۵=۷۱

(-۳)(-۵)(-۷)=-۱۰۵

پس حاصل ضرب مطلوب = لا³-۱۵لا²+۷۱لا-۱۰۵

مثال ۳ حاصل ضرب جملہ ذیل را بنویسید لا-۴ ولا+۵ ولا-۳

(-۴)+۵+(-۳)=-۲

(-۴)×۵+(-۴)(-۳)+۵(-۳)=-۲۰+۱۲-۱۵=-۲۳

(-۴)×۵(-۳)=۶۰

پس حاصل ضرب مطلوب = لا³-۲لا²-۲۳لا+۶۰

مثال ۴ حاصل ضرب لا+۳ ولا+۵ ولا-۸ را معلوم کنید

۳+۵+(-۸)=۰

۳×۵+(-۸)×۳+(-۸)×۵=۱۵-۲۴-۴۰=-۴۹

۳×۵×(-۸)=-۱۲۰

پس حاصل ضرب مطلوب = لا³-۰×لا²-۴۹لا-۱۲۰

= لا³-۴۹لا-۱۲۰

امثلہ (۳۰)

حاصل ضرب جملہائے ذیل را بنویسید

(۱) لا+۱ ولا+۳ ولا+۳ (۲) لا+۲ ولا+۵ ولا+۷

(۳) لا+۳ ولا-۶ ولا+۲ (۴) لا+۴ ولا+۵ ولا-۱۰

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 136 of 308

(۵) لا−۸	ولا+۳	ولا+۱	(۶) لا−۵	ولا−۲ ولا+۸
(۷) لا−۳	ولا+۷	ولا−۴	(۸) لا+۶	ولا−۵ ولا−۷
(۹) لا−۵	ولا−۷	ولا−۱۱	(۱۰) لا−۳	ولا−۶ ولا−۹
(۱۱) لا+۴	ولا−۵	ولا−۱۲	(۱۲) لا+۵	ولا+۹ ولا+۱۱
(۱۳) لا−۶	ولا+۸	ولا−۲	(۱۴) لا−۳	ولا−۷ ولا−۱۴
(۱۵) لا−۳	ولا+۱۲	ولا+۴	(۱۶) لا−۹	ولا−۱۰ ولا+۱۲
(۱۷) لا+۹	ولا−۵	ولا−۷	(۱۸) لا+۸	ولا+۱۲ ولا+۱۵
(۱۹) لا−۱۴	ولا+۸	ولا+۶	(۲۰) لا−۵	ولا−۱۰ ولا−۱۶

۴۹ مربع جملہاے ذو حدود کثیرہ

درمثال چہارم و پنجم فقرہ ۵۰ ثابت شدہ است کہ

$$(ا+ب+ج)^۲ = ا^۲+ب^۲+ج^۲+۲ا ب+۲ا ج+۲ب ج$$

ونیز $(ا+ب+ج+د)^۲ = ا^۲+ب^۲+ج^۲+د^۲+۲ا ب+۲ا ج+۲ا د+۲ب ج+۲ب د+۲ج د$

پس در ہریک از صورتہاے فوق می بینیم کہ مربع جملہاے مذکور

باین طریق حاصل شدہ است کہ اولاً مربع ہر حد گرفتہ شدہ و ثانیاً این

مجموع دو چند حاصل ضرب ہر حد و ہر یکے ازان حدود کہ بعد از آن

مذکور می آیند علیحدہ علیحدہ جمع گشتہ لہذا نتایج مذکور بصورت ذیل

بخوبی ظاہر میشود:-

$$(ا+ب+ج)^۲ = ا^۲+ب^۲+ج^۲+۲ا(ب+ج)+۲ب ج$$

$$(ا+ب+ج+د)^۲ = ا^۲+ب^۲+د^۲+۲ا(ب+ج+د)+۲ب(ج+د)+۲ج د$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 137 of 308

وہمین قاعدہ در معلوم کردن مربع ہر جملہ ذو حدود کثیرہ جاری میباشد

مثلاً فرض کنید کہ مربع ا + ب + ج + د + ی مطلوب است

$(ا+ب+ج+د+ی)^2 = \{(ا+ب+ج)+(د+ی)\}^2$

$= (ا+ب+ج)^2 + ۲(ا+ب+ج)(د+ی) + (د+ی)^2$

$= \{ا^2+ب^2+ج^2+۲ا(ب+ج)+۲ب ج\} + \{۲ا(د+ی)$

$+۲ب(د+ی)+۲ج(د+ی)\} + (د^2+ی^2+۲دی)$

$= ا^2+ب^2+ج^2+د^2+ی^2+۲ا(ب+ج+د+ی)+۲ب$

$(ج+د+ی)+۲ج(د+ی)+۲دی$

پس ظاہر است کہ مربع یک جملہ مرکب مساوی مجموع مربع ہائے ہر حد جملہ مذکور

بادو چند حاصل ضرب ہر حد در ہر یکی ازان حدود کہ بعد از حد مذکور می آیند میباشد

شبیہ چون $(ا+ب+ج)^2 = ا^2+ب^2+ج^2+۲(اب+اج+ب ج)$

پس $۲(اب+اج+ب ج) = \{ا^2+ب^2+ج^2+۲(اب+اج+ب ج)\}$

$-(ا^2+ب^2+ج^2)$

$= (ا+ب+ج)^2 - (ا^2+ب^2+ج^2)$

وہمین طریق $(ا^2+ب^2+ج^2) = (ا+ب+ج)^2 - ۲(اب+اج+ب ج)$

مثال مربع لا - ی + ۶ - د را دریافت کنید -

$(لا-ی+۶-د)^2 = لا^2+ی^2+۶^2+د^2+۲لا(-ی)+۶-د)+۲(-ی)(۶-د)+۲۶(-د)$

$= لا^2+ی^2+۶^2-د^2-۲لای+۲لا۶-۲لاد-۲ی۶+۲ی د-۲۶د$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 138 of 308

مثال ۲ مربع $-ا+۲ب-۳ج-د$ را معلوم کنید:-

$(-ا+۲ب-۳ج-د)^۲=ا^۲+۴ب^۲+۹ج^۲+د^۲+۲(-ا)(۲ب-۳ج-د)$

$+۲(۲ب)(-۳ج-د)+۲(-۳ج)(-د)$

$=ا^۲+۴ب^۲+۹ج^۲+د^۲-۴ا ب+۶ا ج+۲ا د$

$-۱۲ب ج-۴ب د+۶ج د$

مثال ۳ قیمت عددی $ا^۲+ب^۲+ج^۲+۲ا ب-۲ا ج-۲ب ج$ را دریافت کنید

اگر $ا=۱۹$ و $ب=۱۸$ و $ج=۳۲$

جملہ مفروضہ $=ا^۲+ب^۲+ج^۲+۲ا(ب-ج)+۲ب(-ج)$

$=(ا+ب-ج)^۲$

پس قیمت مطلوب $=(۱۹+۱۸-۳۲)^۲=(۵)^۲=۲۵$

مثال ۴ اگر $لا=ب+ج$ و $ی=ج-ا$ و $ع=ا-ب$ باشد پس ثابت کنید کہ

$لا^۲+ی^۲+ع^۲-۲لای-۲لاع+۲ی ع=۴ب^۲$ $لا^۲+ی^۲+ع^۲-۲لای-۲لاع+۲ی ع$

$=لا^۲+ی^۲+ع^۲+۲لا(-ی-ع)+۲(-ی)(-ع)$

$=(لا-ی-ع)^۲$

$=\{(ب+ج)-(ج-ا)-(ا-ب)\}^۲$

$=(۲ب)^۲=۴ب^۲$

مشق (۳۱)

مربع جملہائے ذیل را بنویسید

(۱) $لا+ی-ع$ (۲) $لا-ی+ع$ (۳) $-لا+ی+ع$

(۴) $-لا-ی+ع$ (۵) $لا-ی-ع$ (۶) $ا-لا+ی-ع$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 139 of 308

(۷) ا - لا - ی - ع (۸) م + ن + ط + ق + ر (۹) ط - ق + ر - لا - ی

(۱۰) - ا + ب ج + لا - ی ع (۱۱) ا - ۲ لا - ۳ ی - ۴ ع (۱۲) ۲ ا - ب + ۲ ج - د

قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۱۳) ل۲ + م۲ + ن۲ - ۲ ل م + ۲ ل ن - ۳ م ن اگر ل = ۷ و م = ۲۳ و ن = ۱۳

(۱۴) ط۲ + ق۲ + ر۲ + ۳ ط ق - ۲ ط ر - ۲ ق ر اگر ط = ۱۶ و ق = ۱۲ و ر = ۲۵

(۱۵) ا۲ + ب۲ + ج۲ - ۲ ا ب - ۲ ا ج + ۲ ب ج اگر ا = ۲۸ و ب = ۱۳ و ج = ۱۵

(۱۶) لا۲ + ی۲ + ۱ + ۲ لا ی - ۲ لا - ۲ ی اگر لا = ۶ و ی = ۷

(۱۷) لا۲ + ی۲ + ۱۴ لا ی - ۲ لا - ۲ ی + ۳۶ اگر لا = ۲۳ و ی = ۱۸

(۱۸) لا۲ + ۴ ی۲ + ۱ - ۴ لا ی - ۲ لا + ۴ ی اگر لا = ۲۶ و ی = ۱۲

(۱۹) لا۲ + ۹ ی۲ - ۶ لا ی - ۲ لا + ۶ ی + ۶۴ اگر لا = ۴۹ و ی = ۱۶

(۲۰) ۹ لا۲ + ی۲ - ۶ لا ی + ۶ لا - ۲ ی - ۲۴ اگر لا = ۱۴ و ی = ۳۸

(۲۱) اگر ا + ب + ج = ۱۲ و ا۲ + ب۲ + ج۲ = ۵۰ باشد قیمت عددی ا ب + ا ج + ب ج را معلوم کنید :-

(۲۲) اگر ا + ب + ج = ۱۳ و ا ب + ا ج + ب ج = ۵۰ باشد قیمت عددی ا۲ + ب۲ + ج۲ را معلوم کنید :-

۶۰ قوتہائے مختلفہ جملہائے ذوحدین

بواسطہ عمل ضرب معلوم میکنیم کہ

$$\left.\begin{aligned}(ا + ب)^2 &= ا^2 + 2 ا ب + ب^2 \\ (ا - ب)^2 &= ا^2 - 2 ا ب + ب^2\end{aligned}\right\}$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 140 of 308

$$(ا+ب)^۲ = ا^۲ + ۲ا ب + ب^۲$$
$$(ا-ب)^۲ = ا^۲ - ۲ا ب + ب^۲$$

$$(ا+ب)^۳ = ا^۳ + ۳ا^۲ ب + ۳ا ب^۲ + ب^۳$$
$$(ا-ب)^۳ = ا^۳ - ۳ا^۲ ب + ۳ا ب^۲ - ب^۳$$

$$(ا+ب)^۴ = ا^۴ + ۴ا^۳ ب + ۶ا^۲ ب^۲ + ۴ا ب^۳ + ب^۴$$
$$(ا-ب)^۴ = ا^۴ - ۴ا^۳ ب + ۶ا^۲ ب^۲ - ۴ا ب^۳ + ب^۴$$

$$(ا+ب)^۵ = ا^۵ + ۵ا^۴ ب + ۱۰ا^۳ ب^۲ + ۱۰ا^۲ ب^۳ + ۵ا ب^۴ + ب^۵$$
$$(ا-ب)^۵ = ا^۵ - ۵ا^۴ ب + ۱۰ا^۳ ب^۲ - ۱۰ا^۲ ب^۳ + ۵ا ب^۴ - ب^۵$$

$$(ا+ب)^۶ = ا^۶ + ۶ا^۵ ب + ۱۵ا^۴ ب^۲ + ۲۰ا^۳ ب^۳ + ۱۵ا^۲ ب^۴ + ۶ا ب^۵ + ب^۶$$
$$(ا-ب)^۶ = ا^۶ - ۶ا^۵ ب + ۱۵ا^۴ ب^۲ - ۲۰ا^۳ ب^۳ + ۱۵ا^۲ ب^۴ - ۶ا ب^۵ + ب^۶$$

تنبیہ اگر حاصل ضربہائے فوق بخوبی ملاحظہ شود معلوم میشود

(۱) کل تعداد حاصل ضرب از قوت نمائے جملہ ذوحدین بقدر یک زیاد میباشد مثلاً اگر قوت جملہ پنج باشد تعداد حدود شش میباشد و اگر قوت جملہ شش باشد تعداد حدود هفت میباشد و علی ہذا القیاس

(۲) ہر قوت ا+ب از ہمان قوت ا-ب محض اینقدر تفاوت دارد کہ علامت اول ہمہ اشارات زائد و در صورت دوم نوبت بنوبت زائد و ناقص میباشد

(۳) حد اول ا^ن است و قوت او بعینہ قوت جملہ ذوحدین است و حد اخیر ب^ن است و قوت این نیز ہمانقدر است مثلاً در (ا-ب)^۴ حد اول ا^۴ و حد اخیر ب^۴ است و در (ا-ب)^۵ حد اول ا^۵ است و حد اخیر (-ب)^۵ و علی ہذا القیاس

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 141 of 308

ونیز در حدود باقیمانده قوت ا بقدر یک کم و قوت ب بقدر یک از حد ماقبل آن زیاده میباشد۔

(۴) امثال حدوم مساوی قوت نمای جمله دوحدین است و اگر امثال یک حد در قوتنمای آن حد ضرب نموده بران عدد تقسیم شود که مقام حد مذکور را از حد اول ظاهر میکند پس حاصل مساوی امثال آن حد خواهد بود که بعد از حد مذکور واقع است مثلاً اگر امثال حد دوم را در قوتنمای آن حد ضرب نموده بر دو تقسیم کنیم حاصل امثال حد سوم میباشد و نیز اگر امثال حد سوم را در قوتنمای آن حد ضرب نموده بر سه تقسیم کنیم حاصل امثال حد چهارم میباشد و علی هذا القیاس

(۵) امثال ان حدود که دوری آنها از حد اول و اخیر مساوی باشد باهم مساوی میباشند بواسطه پنج قاعده مذکوره هر قوت جمله ذوحدین بدون از عمل ضرب معلوم میشود باید دانست که در صور تهائے فوق هر حاصل را حاصل بسط ذوحدین میگویند

مثال اقوت هفتم ا + ب را معلوم کنید :-

کل تعداد حدود = ۸

حد اول = $ا^۷$

حد دوم = $۷ ا^۶ ب$

حد سوم = $\frac{۶ \times ۷}{۲} ا^۵ ب^۲ = ۲۱ ا^۵ ب^۲$ } بموجب قاعده (۳) و (۴)

حد چهارم = $\frac{۵ \times ۲۱}{۳} = ۳۵ ا^۴ ب^۳$

چون امثال چهار حد باقیمانده از طرف اخیر بموجب قاعده (۵) همانست

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 142 of 308

کہ امثال چہار حداول میباشند بنابرین حدود باقیماندہ این حاصل بسط ۳۵ آ ب ۴ و ۲۱ آ ب ۵ و ۷ آ ب ۶ و ب ۷ میباشند پس (آ + ب)^۷ = آ^۷ + ۷ آ^۶ ب + ۲۱ آ^۵ ب^۲ + ۳۵ آ^۴ ب^۳ + ۳۵ آ^۳ ب^۴ + ۲۱ آ^۲ ب^۵ + ۷ آ ب^۶ + ب^۷

مثال ۲ حاصل بسط (لا - ی)^۹ را معلوم کنید :-

کل تعداد حدود درین حاصل بسط = ۹

حداول = لا^۸

حدوم = ۸ لا^۷ ی

حدسوم = $\frac{۸ \times ۷}{۲}$ لا^۶ ی^۲ = ۲۸ لا^۶ ی^۲

حدچہارم = - $\frac{۶ \times ۲۸}{۳}$ لا^۵ ی^۳ = - ۵۶ لا^۵ ی^۳ بموجب قاعدہ (۲) و (۳) و (۴)

حدپنجم = $\frac{۵ \times ۵۶}{۴}$ لا^۴ ی^۴ = ۷۰ لا^۴ ی^۴

وحدود باقیماندہ را بقرار قاعدہ پنجم بنویسید :-

پس (لا - ی)^۸ = لا^۸ - ۸ لا^۷ ی + ۲۸ لا^۶ ی^۲ - ۵۶ لا^۵ ی^۳ + ۷۰ لا^۴ ی^۴ - ۵۶ لا^۳ ی^۵ + ۲۸ لا^۲ ی^۶ - ۸ لا ی^۷ + ی^۸

مثال ۳ حاصل بسط (۲ لا - ۳ ی)^۴ را معلوم کنید :-

کل تعداد حدود = ۸

حد اول = (۲ لا)^۴

حد دوم = - ۷ (۲ لا)^۴ (۳ ی)

حد سوم = $\frac{۶ \times ۷}{۲}$ (۲ لا)^۳ (۳ ی)^۲ = ۲۱ (۲ لا)^۲ (۳ ی)^۲

حد چہارم = - $\frac{۵ \times ۲۱}{۳}$ (۲ لا)^۲ (۳ ی)^۳ = - ۳۵ (۲ لا)^۲ (۳ ی)^۳

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 143 of 308

وبموجب قاعدہ پنجم حدود باقیماندہ بقرار ذیل میباشد

$۳۵(۲لا)^۴(۳ی)^۳ و -۲۱(۲لا)^۵(۳ی)^۲ و ۷(۲لا)(۳ی)^۶ و (-۳ی)^۷$

پس $(۲لا-۳ی)^۷ = (۲لا)^۷ - ۷(۲لا)^۶(۳ی) + ۲۱(۲لا)^۵(۳ی)^۲$

$-۳۵(۲لا)^۴(۳ی)^۳ + ۳۵(۲لا)^۳(۳ی)^۴ - ۲۱(۲لا)^۲(۳ی)^۵ + ۷(۲لا)$

$(۳ی)^۶ - (۳ی)^۷ = ۱۲۸لا^۷ - ۴۴۸لا^۶ی + ۶۰۴۸لا^۵ی^۲ - ۱۵۱۲۰لا^۴ی^۳$

$+ ۲۶۸۰۴لا^۳ی^۴ - ۲۰۴۱۲لا^۲ی^۵ + ۱۰۲۰۶لای^۶ - ۲۱۸۷ی^۷$

مثال ۴ قیمت عددی جملہاے ذیل را معلوم کنید :-

اگر $لا = \sqrt{۳} - ۱$ $\quad لا^۶ + ۶لا^۵ + ۱۵لا^۴ + ۲۰لا^۳ + ۱۵لا^۲ + ۶لا - ۸$

این جملہ $= (لا^۶ + ۶لا^۵ + ۱۵لا^۴ + ۲۰لا^۳ + ۱۵لا^۲ + ۶لا + ۱) - ۹$

$= (لا + ۱)^۶ - ۹$

$= (\sqrt{۳})^۶ - ۹$

$= ۹ - ۹ = ۰$

مسئلہ (۳۲)

حاصل بسط جملہاے ذیل را معلوم کنید

(۱) $(لا+۱)^۵$ (۲) $(لا+۱)^۶$ (۳) $(۱+ب)^۶$ (۴) $(۱+ب)^۹$

(۵) $(لا-ی)^۹$ (۶) $(م-ن)^۷$ (۷) $(لا+۲)^۴$ (۸) $(لا+۲)^۵$

(۹) $(لا+۱)^۸$ (۱۰) $(لا+۳)^۴$ (۱۱) $(لا-۱)^۵$ (۱۲) $(۲-غ)^۶$

(۱۳) $(۲لا-۱)^۴$ (۱۴) $(لا-ی)^۹$ (۱۵) $(۳لا-۲)^۵$ (۱۶) $(۱-و)^۷$

(۱۷) $(۱-ج)^۷$ (۱۸) $(۱-۳لا)^۶$ (۱۹) $(۱-۲لا)^۷$ (۲۰) $(۲لا-و)^۷$

(۲۱) $(لا-و)^{۱۲}$ (۲۲) $(۳لا-۲و)^۹$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 144 of 308

جملہائے ذیل را مختصر کنید :-

(۲۳) $(لا+۱)^۵-(لا-۱)^۵$ (۲۴) $(لا-۱)^۶+(لا+۱)^۶$ (۲۵) $(لا+۱)^۷-(لا-۱)^۷$

در حاصل بسط جملہائے ذیل مجموع امثال را معلوم کنید

(۲۶) $(لا+۱)^۴$ (۲۷) $(لا+۱)^۹$ (۲۸) $(لا+۱)^۶$

(۲۹) $(لا+۱)^۷$ (۳۰) $(لا+۱)^۷$

قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۳۱) $لا^۵+۵لا^۴+۱۰لا^۳+۱۰لا^۲+۵لا+۳۲$ اگر $لا=-۲$

(۳۲) $لا^۶-۶لا^۵+۱۵لا^۴-۲۰لا^۳+۱۵لا^۲-۶لا$ اگر $لا=\sqrt[۳]{۲}+۱$

(۳۳) $۱۶لا^۴-۳۲لا^۳+۲۴لا^۲-۸لا-۸۰$ اگر $لا=۲$

(۳۴) $لا^۴+۱۲لا^۳+۵۴لا^۲+۱۰۸لا+۸۱$ اگر $لا=-۵$

(۳۵) $لا^۴+۸لا^۳+۲۴لا^۲+۳۲لا-۶۰۹$ اگر $لا=-۷$

۶۱ دستور $(ا+ب+ج)(ا^۲+ب^۲+ج^۲-اب-اج-بج)$

$=ا^۳+ب^۳+ج^۳-۳ابج$

$[(ا+ب+ج)(ا^۲+ب^۲+ج^۲-اب-اج-بج)$

$=(ا+ب+ج)\{(ا^۲+ب^۲-اب)-(اج+بج)+ج^۲\}$

$=(ا+ب+ج)\{(ا+ب)^۲-۳ابج-(ا+ب)ج+ج^۲\}$

$=(ا+ب+ج)\{(ا+ب)(ا+ب-ج)+ج^۲-۳ابج\}$

$=(ا+ب)^۲+ج^۲-۳اب(ا+ب+ج)$

$=(ا+ب)^۳-۳اب(ا+ب)+ج^۳-۳ابج$

$=ا^۳+ب^۳+ج^۳-۳ابج]$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 145 of 308

نتیجہ برعکس فوق $ا^۳+ب^۳+ج^۳-۳ابج=(ا+ب+ج)$
$(ا^۲+ب^۲+ج^۲-اب-اج-بج)$ میباشد :-
لہذا ہر جملہ کہ این شکل $ا^۳+ب^۳+ج^۳-۳ابج$ داشتہ باشد
بمضروبات تفریق میشود -

مثال ۱ $لا^۳+ی^۳+ع^۳+لای+لاع-ی ع$ را در $لا-ی-ع$ ضرب کنید

فرض کنید کہ $ا=لا$ و $ب=-ی$ و $ج=-ع$

پس $(لا-ی-ع)(لا^۳+ی^۳+ع^۳+لای+لاع-ع ی)$

$=(ا+ب+ج)(ا^۲+ب^۲+ج^۲-اب-اج-بج)$

$=ا^۳+ب^۳+ج^۳-۳ابج$

$=لا^۳-ی^۳-ع^۳-۳لای ع$

مثال ۲ $م^۳-ن^۳+۱+۳م ن$ را بمضروبات تفریق کنید

فرض کنیدم $=ا$ و $ب=-ن$ و $ج=۱$

پس $م^۳-ن^۳+۱+۳م ن=ا^۳+ب^۳+ج^۳-۳ابج$

$=(ا+ب+ج)(ا^۲+ب^۲+ج^۲-اب-اج-بج)$

$=(م-ن+۱)(م^۲+ن^۲+۱+م ن-م+ن)$

مثال ۳ ثابت کنید کہ $(لا-ی)^۲+(ی-ع)^۲+(ع-لا)^۲=۳(لا-ی)$
$(ی-ع)(ع-لا)$

فرض کنید کہ $لا-ی=ا$ و $ی-ع=ب$ و $(ع-لا)=ج$

پس $ا+ب+ج=(لا-ی)+(ی-ع)+(ع-لا)=۰$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 146 of 308

لہٰذا $\{(لا-ی)^2+(ی-ع)^2+(ع-لا)^2\}+3(لا-ی)(ی-ع)(ع-لا)$

$=ا^3+ب^3+ج^3-3ابج$

$=(ا+ب+ج)(ا^2+ب^2+ج^2-اب-اج-بج)$

$=0\times(ا^2+ب^2+ج^2-اب-اج-بج)$

$=0$

$\therefore (لا-ی)^2+(ی-ع)^2+(ع-لا)^2=3(لا-ی)(ی-ع)(ع-لا)$

امثلہ (۳۳)

حاصل ضرب جملہائے ذیل را بنویسید :-

(۱) $لا^2+ی^2+ع^2-لای+لاع+عی$ در $لا+ی-ع$

(۲) $ط^2+ق^2+ر^2+2طق+طر-2قر$ در $ط-ق-ر$

(۳) $4لا^2+9ی^2+ع^2+6لای+2لاع-3یع$ در $2لا-3ی-ع$

(۴) $ا^2+4ب^2+2اب-3ا+6ب+9$ در $ا-2ب+3$

(۵) $9ا^2+25ب^2+15اب+12ا-20ب+16$ در $3ا-5ب-4$

جملہائے ذیل را بمضروبات تفریق کنید :-

(۶) $لا^2ی-ا-3لای$ (۷) $لا^2-ی^2+6لای+8$ (۸) $لا^2-8ی^2-27ع^3-18لایع$

قیمت عددی جملہائے ذیل را معلوم کنید :-

(۹) $لا^3+ی^3+18لای-216$ اگر $لا+ی=6$

(۱۰) $ا^3-8ب^3-24اب-64$ اگر $ا-2ب=4$

(۱۱) $(س-ا)^3+(س-ب)^3+(س-ج)^3-3(س-ا)(س-ب)(س-ج)$

اگر $3س=ا+ب+ج$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 147 of 308

(۱۲) ثابت کنید کہ $(ا-۲ب)^۳+(۲ب-۳ج)^۳+(۳ج-ا)^۳=۳(ا-۲ب)(۲ب-۳ج)(۳ج-ا)$

(۱۳) ثابت کنید کہ $(لا+ی-۲ع)^۳+(ی+ع-۲لا)^۳+(ع+لا-۲ی)^۳=۳(لا+ی-۲ع)(ی+ع-۲لا)(ع+لا-۲ی)$

(۱۴) ثابت کنید کہ $(ا+۲ب-۳ج)^۳+(ب+۲ج-۳ا)^۳+(ج+۲ا-۳ب)^۳=۳(ا+۲ب-۳ج)(ب+۲ج-۳ا)(ج+۲ا-۳ب)$

(۱۵) ثابت کنید کہ $(۲ط-۵ق+۳ر)^۳+(۲ق-۵ر+۳ط)^۳+(۲ر-۵ط+۳ق)^۳=۳(۲ط-۵ق+۳ر)(۲ق-۵ر+۳ط)(۲ر-۵ط+۳ق)$

۶۲ دستور $(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)=ا^۲(ب-ج)+ب^۲(ج-ا)+ج^۲(ا-ب)$

$[(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)=\{ا^۲-ا(ب+ج)+بج\}(ب-ج)$

$=ا^۲(ب-ج)-ا(ب^۲-ج^۲)+بج(ب-ج)$

$=ا^۲(ب-ج)+ب^۲(ج-ا)+ج^۲(ا-ب)]$

نتیجہ ابر عکس فوق $ا^۲(ب-ج)+ب^۲(ج-ا)+ج^۲(ا-ب)=(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)$

لہذا ہر جملہ کہ بشکل $ا^۲(ب-ج)+ب^۲(ج-ا)+ج^۲(ا-ب)$ باشد بمضروبات تفریق شدہ میتواند۔

نتیجہ ۲ چون $ا-ج=-(ج-ا)$

$\therefore(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)=-(ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)$

لہذا دستور فوق بصورت $ا^۲(ب-ج)+ب^۲(ج-ا)+ج^۲(ا-ب)=-(ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)$ نیز نوشتہ میشود۔

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 148 of 308

نتیجہ ۳ چون Δ $(ب-ج)+ب^2(ج-ا)+ج^2(ا-ب)$ بصورت
$ا ب(ا-ب)+ب ج(ب-ج)+ج ا(ج-ا)$ نوشتہ میتوانیم لہذا
$ا ب(ا-ب)+ب ج(ب-ج)+ج ا(ج-ا)=-(ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)$

مثال جملۂ ذیل را مختصر کنید $(ا+۲ب+۳ج)^2(ا-۲ب+ج)$
$+(ب+۲ج+۳ا)^2(ب-۲ج+ا)+(ج+۲ا+۳ب)^2(ج-۲ا+ب)$
$+(ا-۲ب+ج)(ب-۲ج+ا)(ج-۲ا+ب)$

فرض کنید کہ $ا+۲ب+۳ج=لا$
$ب+۲ج+۳ا=ی$
$ج+۲ا+۳ب=ع$
$\therefore ی-ع=ا-۲ب+ج$
$ع-لا=ب-۲ج+ا$
$لا-ی=ج-۲ا+ب$

پس جملہ مفروضہ $=لا^2(ی-ع)+ی^2(ع-لا)+ع^2(لا-ی)+(ی-ع)(ع-لا)(لا-ی)$
$=-(ی-ع)(ع-لا)(لا-ی)+(ی-ع)(ع-لا)(لا-ی)=$

امثلہ (۳۴)

(۱) ثابت کنید کہ $(لا-۲ی+ع)(۲لا-ی-ع)(ی-۲ع+لا)$
$=(لا-ی)^2(ی-۲ع+لا)+(ی-ع)^2(ع-۲لا+ی)$
$+(ع-لا)^2(لا-۲ی+ع)$

(۲) ثابت کنید $(ا+ب)^2(ب-ا)+(ب+ج)^2(ج-ب)+(ج+ا)^2$
$(ا-ج)+(ب-ا)(ج-ب)(ا-ج)=-$

(۳) مضروبات $۲(ا-ب+ج)^2(ا-ج)+۲(ب-ج+ا)^2(ب-ا)$
$+۲(ج-ا+ب)^2(ج-ب)$ را معلوم کنید :-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 149 of 308

(۴) مضروبات (لا-ی)(ی-لا)+(ی+ع)(ع-ی)+(ع+لا)(لا-ع) معلوم کنید

(۵) جملہ ذیل را مختصر کنید ۲(ا-ب-ج)(ب-ج)+۲(ب-ج-ا)(ج-ا)+۲(ج-ا-ب)(ا-ب)+۸(ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)

(۶) جملہ ذیل را مختصر کنید (لا-ی)(ی-ع)(لا-۲ی+ع)+(ی-ع)(ع-لا)(ی-۲ع+لا)+(ع-لا)(لا-ی)(ع-۲لا+ی)+(لا-۲ی+ع)(ی-۲ع+لا)(ع-۲لا+ی)

امثلہ متفرقہ

مثال اثبات کنید کہ ۴ا۲ب۲-(ا۲+ب۲-ج۲)۲

=س(س-۲ا۲)(س-۲ب۲)(س-۲ج۲) اگر س=ا+ب+ج

۴ا۲ب۲-(ا۲+ب۲-ج۲)۲

=(۲اب)۲-(ا۲+ب۲-ج۲)۲

={۲اب+(ا۲+ب۲-ج۲)}{۲اب-(ا۲+ب۲-ج۲)}

={(ا+ب)۲-ج۲}{ج۲-(ا-ب)۲}

={(ا+ب+ج)(ا+ب-ج)}{(ج+ا-ب)(ج-ا+ب)}

=(ا+ب+ج)(ا+ب-ج)(ج+ا-ب)(ج-ا+ب)

=(ا+ب+ج)(ا+ب+ج-۲ج)(ا+ب+ج-۲ب)(ا+ب+ج-۲ا)

=س(س-۲ج)(س-۲ب)(س-۲ا)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 150 of 308

مثال ۲ اگر س = ا + ب + ج ثابت کنید کہ (س - ا)(س - ب)(س - ج) = (ا ب + ا ج + ب ج)(ا + ب + ج) - ا ب ج = س(س - ا)(س - ب)(س - ج)

= س³ - (ا + ب + ج) س² + (ا ب + ا ج + ب ج) س - ا ب ج

= س³ - س × س² + (ا ب + ا ج + ب ج)(ا + ب + ج) - ا ب ج

= (ا ب + ا ج + ب ج)(ا + ب + ج) - ا ب ج

مثال ۳ ثابت کنید کہ (لا - ی)² + (ی - ع)² + (ع - لا)²

= ۲(لا - ی)(لا - ع) + ۲(ی - ع)(ی - لا) + ۲(ع - لا)(ع - ی)

فرض کنید کہ لا - ی = ا

ی - ع = ب ∴ ا + ب + ج = ۰

ع - لا = ج

لہٰذا {(لا - ی)² + (ی - ع)² + (ع - لا)²} - {۲(لا - ی)(لا - ع) + ۲(ی - ع)(ی - لا) + ۲(ع - لا)(ع - ی)}

= (ا² + ب² + ج²) - {۲ا(- ج) + ۲ب(- ا) + ۲ج(- ب)}

= ا² + ب² + ج² + ۲ا ج + ۲ا ب + ۲ ب ج

= (ا + ب + ج)² = ۰

∴ (لا - ی)² + (ی - ع)² + (ع - لا)²

= ۲(لا - ی)(لا - ع) + ۲(ی - ع)(ی - لا) + ۲(ع - لا)(ع - ی)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 151 of 308

مثال ۴ اگر ۲س = ا + ب + ج باشد ثابت کنید کہ (س - ا)³ + (س - ب)³ + ۳ (س - ا)(س - ب) ج = ج³

چون ج = ۲س - (ا + ب) = (س - ا) + (س - ب)

∴ (س - ا)³ + (س + ب)³ + ۳ (س - ا)(س - ب) ج

= (س - ا)³ + (س - ب)³ + ۳ (س - ا)(س - ب) {(س - ا) + (س - ب)}

= {(س - ا) + (س - ب)}³ [بحکم فقرہ ۵۳

= ج³

مثال ۵ ثابت کنید کہ (لا - ا)(لا - ب)(ا - ب) + (لا - ب)(لا - ج)(ب - ج) + (لا - ج)(لا - ا)(ج - ا) = (ا - ب)(ا - ج)(ب - ج)

فرض کنید کہ لا - ا = ط ∴ ق - ط = ا - ب

لا - ب = ق ∴ س - ق = ب - ج

لا - ج = س ∴ ط - س = ج - ا

لہذا (لا - ا)(لا - ب)(ا - ب) + (لا - ب)(لا - ج)(ب - ج) + (لا - ج)(لا - ا)(ج - ا)

= ط ق (ق - ط) + ق س (س - ق) + س ط (ط - س)

= - (ق - ط)(س - ق)(ط - س) ... [نتیجہ ۳ فقرہ ۶۲

= - (ا - ب)(ب - ج)(ج - ا)

= (ا - ب)(ب - ج)(ا - ج)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 152 of 308

مثال ۶ $(لا+ی+ع)^3-لا^3-ی^3-ع^3=3(لا+ی)(ی+ع)(ع+لا)$

$(لا+ی+ع)^2=\{لا+(ی+ع)\}^2$

$=لا^2+3لا^2(ی+ع)+3لا(ی+ع)^2+(ی+ع)^3$

$=لا^2+3لا^2(ی+ع)+3لا\{ی^2+ع^2+2ی ع\}+\{ی^3+ع^3+3ی ع(ی+ع)\}$

$=لا^2+ی^2+ع^2+3(ی+ع)\{لا^2+لا(ی+ع)+ی ع\}$

$=لا^2+ی^2+ع^2+3(ی+ع)\{(لا+ی)(لا+ع)\}$

$=لا^2+ی^2+ع^2+3(لا+ی)(لا+ع)(ع+ی)$

لهذا $(لا+ی+ع)^3-لا^3-ی^3-ع^3=\{لا^3+ی^3+ع^3+3(لا+ی)(لا+ع)(ع+ی)\}-لا^3-ی^3-ع^3$

$=3(لا+ی)(ی+ع)(ع+لا)$

مثال ۷ اگر $2س=ا+ب+ج$ باشد ثابت کنید که

$2(س-ا)(س-ب)+2(س-ب)(س-ج)+2(س-ج)(س-ا)=2س^2+ا^2+ب^2+ج^2$

چون $2لا+2ی+2ع=(لا+ی)+(ی+ع)+(ع+لا)$

$\therefore 2(س-ا)(س-ب)+2(س-ب)(س-ج)+2(س-ج)(س-ا)$

$=\{(س-ا)(س-ب)+(س-ب)(س-ج)\}+\{(س-ب)(س-ج)+(س-ج)(س-ا)\}+\{(س-ج)(س-ا)+(س-ا)(س-ب)\}$

وچون $(س-ا)(س-ب)+(س-ب)(س-ج)$

$=(س-ب)\{(س-ا)+(س-ج)\}$

$=(س-ب)\{2س-ا-ج\}$

$=(س-ب)(ب)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 153 of 308

وہمچنین (س - ب)(س - ج) + (س - ج)(س - ا) = (س - ج)(ج - ا)(س - ج) + (س - ا)(س - ب) = (س - ا)(ا - ب)

∴ جملہ مفروضہ = (س - ب) ب + (س - ج) ج + (س - ا) ا

= س(ا + ب + ج) - ب ج - ا ج - ا ب

= ۲ س ۲ - ا ۲ - ب ۲ - ج ۲

مثال ۸ اگر س = ا + ب + ج باشد ثابت کنید کہ س (س - ۲ ب)(س - ۲ ج) + س (س - ۲ ج)(س - ۲ ا) + س (س - ۲ ا)(س - ۲ ب)

= (س - ۲ ا)(س - ۲ ب)(س - ۲ ج) + ۸ ا ب ج

مجموع دو حد اول جملہ مفروضہ = س (س - ۲ ج){(س - ۲ ب) + (س - ۲ ا)}

= س (س - ۲ ج){۲ س - ۲ (ا + ب)}

= س (س - ۲ ج) × ۲ ج

حد سوم = (س - ۲ ج + ۲ ج)(س - ۲ ا)(س - ۲ ب)

= (س - ۲ ج)(س - ۲ ا)(س - ۲ ب) + ۲ ج (س - ۲ ا)(س - ۲ ب)

پس جملہ مفروضہ = س (س - ۲ ج) ۲ ج + {(س - ۲ ج)(س - ۲ ا)(س - ۲ ب) + ۲ ج (س - ۲ ا)(س - ۲ ب)}

= (س - ۲ ا)(س - ۲ ب)(س - ۲ ج) + ۲ ج {س (س - ۲ ج) + (س - ۲ ا)(س - ۲ ب)}

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 154 of 308

وچون س (س-۲ج)+(س-۲و)(س-۲ب)

$=(س^2-2ج\,س)+\{س^2-2س(و+ب)+4وب\}$

$=2س^2-2س(و+ب+ج)+4وب$

$=2س^2-2س\times س+4اب=4وب$

∴ جملۂ مفروضہ $=(س-2و)(س-2ب)(س-2ج)+8وبج$

مسئلہ (۳۵)

(۱) ثابت کنید کہ $(ا^2+ولا-ل^2)(ا^2-ولا+ل^2)=ا^4-ا^2ل^2+2ولا^3-ل^4$

(۲) ثابت کنید کہ $(ا^2-ولا+ل^2)(ولا-ا^2+ل^2)=لا^3-ا^3ل+2ولا^2-ا^2ل$

(۳) ثابت کنید کہ $(و+ب+ج)(و-ب+ج)+(ب+ج-و)$

$(و-ب+ج)=2ب(و-ب+ج)$

(۴) ثابت کنید کہ $2(ا^2+ب^2+ج^2-اب-وج-بج)=(ا-ب)^2$

$+(ب-ج)^2+(ج-ا)^2$

(۵) ثابت کنید کہ $\frac{1}{2}(و+ب+ج)\{(و-ب)^2+(ب-ج)^2+(ج-و)^2\}$

$=و^3+ب^3+ج^3-3وبج$

(۶) ثابت کنید کہ $(و+ب)(و+ج)(ب+ج)=ا^2(ب+ج)+ب^2$

$(ج+و)+ج^2(و+ب)+2وبج$

(۷) ثابت کنید کہ $2(لا^3-ل)+3لا(لا+1)=لا(لا+1)(2لا+1)$

(۸) ثابت کنید کہ $لا^2+لا+لا(لا+1)(2لا+1)-2لا(لا+1)=لا^2(لا+1)^2$

(۹) ثابت کنید کہ $(ا^2+ب^2)(ج^2+د^2)=(اج-بد)^2+(اد+بج)^2$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 155 of 308

(۱۰) ثابت کنید کہ $(ا+ب)^2-(ج+د)^2+(ا+ج)^2-(ب+د)^2=2$
$(ا+ب+ج+د)(ا-د)$

(۱۱) ضرب کنید $9لا^2+4ی^2+ع^2-2یع-3لاع-6لای$ را
در $3لا+2ی+ع$

(۱۲) ثابت کنید کہ $(ا+ب+ج-د)(د-ا-ب+ج)+ج^2-(ا+ب-د)^2$

(۱۳) ثابت کنید کہ حاصل ضرب $(ب+ج)^2-ا^2$ و $ا^2-ب^2-ج^2+2بج$
$=2ا^2ب^2+2ا^2ج^2+2ب^2ج^2-ا^4-ب^4-ج^4$

(۱۴) جملہائے ذیل را باہم ضرب کنید $ا+ب+ج$ و $ا+ب-ج$
و $ا-ب+ج$ و $ب+ج-ا$

(۱۵) جملہائے ذیل را مختصر کنید $(ا^2+ب^2+ج^2)+(ا+ب+ج)$
$(ا+ب-ج)(ا+ج-ب)(ب+ج-ا)$

(۱۶) جملہ ذیل را مختصر کنید $(ا^2+ب^2+ج^2)^2-(ا+ب+ج)(ا+ب-ج)$
$(ا+ج-ب)(ب+ج-ا)$

(۱۷) اگر $لا=ا^2-بج$ و $ی=ب^2-جا$ و $ع=ج^2-اب$ باشد
ثابت کنید کہ $لا+ب ی+ج ع=(ا+ب+ج)(لا+ی+ع)$

(۱۸) اگر $لا^2-ی ع=ا^2$ و $ی^2-عا=ب^2$ و $ع^2-لای=ج^2$ باشد
ثابت کنید کہ $ا^2لا+ب^2ی+ج^2ع=(لا+ی+ع)(ا^2+ب^2+ج^2)$
جملہ ذیل را مختصر کنید $(ا+ب+ج)^2-(ا+ب-ج)^2+(ا+ج-ب)^2$
$-(ب+ج-ا)^2$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 156 of 308

(۱۹) جملہ ذیل کو مختصر کیجئے $(ا+ب+ج)^2-(ا+ب-ج)^2+(ا-ب+ج)^2-(-ب+ج+ا)^2$

(۲۰) جملہ ذیل کو مختصر کیجئے $(ا^2+ب^2+ج^2)^2-(ب^2+ج^2-ا^2)^2-(ا^2-ب^2+ج^2)^2+(ا^2+ب^2-ج^2)^2$

(۲۱) ثابت کیجئے کہ $(ب+ج+د-ا)(د+ا-ب+ج)+(ج+د+ا+ب)$
$(ب+ج+د-ا)=۴(ا د+ب ج)$

(۲۲) ثابت کیجئے کہ $(ب+ج+ا-د)(ب+ج-ا+د)=۲(ا د+ب ج)$
$-(ا^2-ب^2-ج^2+د^2)$

(۲۳) $۴(ا د+ب ج)^2-(ا^2-ب^2-ج^2+د^2)^2$ کو بچہار مضروب تفریق کیجئے۔

(۲۴) جملہ ہائے ذیل کو باہم ضرب کیجئے $لا^2-۲لا+۱$ $ولا^2+۲لا+۱$ $ولا^2+۲لا+۱$

(۲۵) ضرب کیجئے $ا^2+۲ا ب+ب^2-ج^2$ کو $ا^2-۲ا ب+ب^2-ج^2$

(۲۶) ثابت کیجئے کہ $(لا-ی+ع)^2+(ی-ع+لا)^2+(ع-لا+ی)^2+۲(لا-ی)(ی-ع+لا)$
$+۲(ی-ع+لا)(ع-لا+ی)+۲(ع-لا+ی)(لا-ی+ع)=(لا+ی+ع)^2$

(۲۷) $(ا+ب)(ب+ج)(ج+ا)-[ا^2(ج-ب)-ب^2(ج+ا)-ج^2(ا-ب)]$ کو مختصر کیجئے:-

(۲۸) $(ا-ب)(ب+ج)(ج-ا)-[ا^2(ب-ا)+ب^2(ج-ب)+ج^2(ا+ج)]$ کو مختصر کیجئے

(۲۹) ثابت کیجئے کہ $(لا-ا)^2(ب+ج)+(لا-ب)^2(ج-ا)+(لا-ج)^2(ا-ب)$
$+(ب+ج)(ج-ا)(ا-ب)=۰$

(۳۰) ثابت کیجئے کہ $(ا^2+ب^2+ج^2)(لا^2+ی^2+ع^2)-(ولا+ب ی+ج ع)^2$
$=(ا ی-ب لا)^2+(ج لا-ا ع)^2+(ب ع-ج ی)^2$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 157 of 308

(۳۱) اگر س = ا + ب + ج باشد ثابت کنید کہ (ا س + ب ج)(ب س + ج ا)
(ج س + ب ا) = (ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

(۳۲) ثابت کنید کہ (ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) − ۲ ا ب ج = ا(ب + ج)
+ ب(ج + ا) + ج(ا + ب)

(۳۳) ثابت کنید کہ (ا + ج)² − (ب + ج)² − ۳(ا + ج)(ب + ج)(ا − ب) = (ا − ب)³

(۳۴) (لا − ۲ ی + ۳ ع)² + (لا + ۲ ی − ۳ ع)² + ۶ لا (لا − ۲ ی + ۳ ع)
(لا + ۲ ی − ۳ ع) را مختصر کنید:-

(۳۵) ثابت کنید کہ ۴(ا + ب + ج)² = (ا + ب)² + (ب + ج)² + (ج + ا)²
+ ۲(ا + ب)(ب + ج) + ۲(ب + ج)(ج + ا) + ۲(ج + ا)(ا + ب)

(۳۶) ثابت کنید کہ ۸(ا + ب + ج)³ = (ا + ب)³ + (ب + ج)³ + (ج + ا)³ + ۶(ا + ب)
(ب + ج)(ج + ا)(ا + ب + ج)

(۳۷) ثابت کنید کہ ۲۷(ا + ب + ج)³ = (ا + ۳ ب + ۲ ج)³ + (۲ ا + ج)³
+ ۹(ا + ۳ ب + ۲ ج)(۲ ا + ج)(ا + ب + ج)

(۳۸) ثابت کنید کہ ۸(ا + ب + ج)³ − (ا + ب)³ − (ب + ج)³ − (ج + ا)³
= ۳(۲ ا + ب + ج)(ا + ۲ ب + ج)(ا + ب + ۲ ج)

(۳۹) ثابت کنید کہ ۲۷(ا + ب + ج)³ − (ا + ۲ ب)³ − (ب + ۲ ج)³ − (ج + ۲ ا)³
= ۳(ا + ۳ ب + ۲ ج)(ب + ۳ ج + ۲ ا)(ج + ۳ ا + ۲ ب)

(۴۰) اگر ۲ س = ا + ب + ج باشد ثابت کنید کہ ۲(س − ا)(س − ب)(س − ج)
+ ا(س − ب)(س − ج) + ب(س − ج)(س − ا) + ج(س − ا)(س − ب) = ا ب ج

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 158 of 308

(۴۱) اگر س = ا + ب + ج باشد ثابت کنید کہ (س - ا)(س - ب) + (س - ب)(س - ج) + (س - ج)(س - ا) + س(س + ا)(س + ج) + ج(س + ا)(س + ب) = (س + ا)(س + ب)(س + ج)

(۴۲) اگر ۲س = ا + ب + ج باشد ثابت کنید کہ (س - ا)² + (س - ب)² + (س - ج)² - ۳(س - ا)(س - ب)(س - ج) = ½ (ا² + ب² + ج² - ۳ا ب ج)

(۴۳) اگر س = ا + ب + ج باشد ثابت کنید کہ (س - ۳ا)² + (س - ۳ب)² + (س - ۳ج)² = ۳ {(ا - ب)² + (ب - ج)² + (ج - ا)²}

در سوالات ذیل قیمت عددی ا² + ب² + ج² - ۳ا ب ج را معلوم کنید

(۴۴) اگر ا + ب + ج = ۱۳ و ا² + ب² + ج² = ۶۹

(۴۵) اگر ا + ب + ج = ۱۲ و ا ب + ب ج + ج ا = ۴۷

(۴۶) اگر لا + ی + ع = ۱۴ و لا² + ی² + ع² = ۷۴ و لا³ + ی³ + ع³ = ۴۳۴ باشد

قیمت عددی لای ع را معلوم کنید :-

(۴۷) اگر لا + ی + ع = ۱۳ و لای + ی ع + ع لا = ۵۲ و لای ع = ۶۰ باشد

قیمت عددی لا² + ی² + ع² را معلوم کنید :-

۶۴ فہرست دساتیر جبریہ

ہمہ دساتیر جبریہ کہ بالتفصیل مذکور شدند در ذیل درج میشوند تا بر اطالب العلم در وقت ضرورت موجب سہولت باشد - مگر میباید کہ آنرا کامل ضبط نماید کہ در وقت ضرورت احتیاج بمراجعت کتاب نباشد :-

(۱) (ا + ب)² = ا² + ۲ا ب + ب²

(۲) (ا - ب)² = ا² - ۲ا ب + ب²

(۳) (ا + ب)(ا - ب) = ا² - ب²

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 159 of 308

(٤) $(أ+ب)^{٣} = أ^{٣}+٣أ^{٢}ب+٣أب^{٢}+ب^{٣}$
$= أ^{٣}+ب^{٣}+٣أب(أ+ب)$

(٥) $(أ+ب+ج)^{٣} = أ^{٣}+ب^{٣}+ج^{٣}+٣أ^{٢}(ب+ج)+٣ب^{٢}(أ+ج)$
$+٣ج^{٢}(أ+ب)+٦أبج$

(٦) $(أ-ب)^{٣} = أ^{٣}-٣أ^{٢}ب+٣أب^{٢}-ب^{٣}$
$= أ^{٣}-ب^{٣}-٣أب(أ-ب)$

(٧) $أ^{٣}+ب^{٣} = (أ+ب)^{٣}-٣أب(أ+ب)$
$= (أ+ب)(أ^{٢}-أب+ب^{٢})$

(٨) $أ^{٣}-ب^{٣} = (أ-ب)^{٣}+٣أب(أ-ب)$
$= (أ-ب)(أ^{٢}+أب+ب^{٢})$

(٩) $(لا+أ)(لا+ب) = لا^{٢}+(أ+ب)لا+أب$

(١٠) $(لا-أ)(لا+ب) = لا^{٢}+(ب-أ)لا-أب$

(١١) $(لا-أ)(لا-ب) = لا^{٢}-(أ+ب)لا+أب$

(١٢) $(لا+أ)(لا+ب)(لا+ج) = لا^{٣}+(أ+ب+ج)لا^{٢}+(أب+أج+بج)لا+أبج$

(١٣) $(لا-أ)(لا-ب)(لا-ج) = لا^{٣}-(أ+ب+ج)لا^{٢}+(أب+أج+بج)لا-أبج$

(١٤) $(أ+ب+ج)^{٢} = أ^{٢}+ب^{٢}+ج^{٢}+٢أب+٢أج+٢بج$

(١٥) $(أ+ب+ج+د)^{٢} = أ^{٢}+ب^{٢}+ج^{٢}+د^{٢}+٢أ(ب+ج+د)+٢ب(ج+د)+٢ج د$

(١٦) $(أ+ب)^{٤} = أ^{٤}+٤أ^{٣}ب+٦أ^{٢}ب^{٢}+٤أب^{٣}+ب^{٤}$

(١٧) $(أ+ب)^{٥} = أ^{٥}+٥أ^{٤}ب+١٠أ^{٣}ب^{٢}+١٠أ^{٢}ب^{٣}+٥أب^{٤}+ب^{٥}$

(١٨) $أ^{٣}+ب^{٣}+ج^{٣}-٣أبج = (أ+ب+ج)(أ^{٢}+ب^{٢}+ج^{٢}-أب-بج-أج)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 160 of 308

(۱۹) $ا^۲(ب-ج)+ب^۲(ج-ا)+ج^۲(ا-ب)=(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)$

$=-(ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)$

(۲۰) $ا ب(ا-ب)+ب ج(ب-ج)+ج ا(ج-ا)=(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)$

$=-(ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)$

باب هفتم
تقسیم

۶۵ تعریف

مفهوم تقسیم ا بر ب اینست که یک مقدار دیگر ج معلوم شود که ج × ب = ا باشد
وبعبارت اخری ا ÷ ب = ج آنوقت میباشد که ا = ب × ج باشد
پس اگر لا = ی × ع باشد لا ÷ ی = ع ولا ÷ ع = ی خواهد بود
آن مقدار را که بر مقدار دیگر تقسیم شود مقسوم میگویند وهمان مقدار دیگر را
مقسوم علیه وحاصل تقسیم را خارج قسمت

تنبیه خارج قسمت ا بر ب بصورت $\frac{ا}{ب}$ نوشته میشود

۶۶ چند مسئلهٔ اساسیه

(۱) اثبات این امر که ا ÷ ب × ب = ا اگر ا ÷ ب = لا باشد پس بحکم
تعریف فقره ۶۵ لا × ب = ا
لهذا ا ÷ ب × ب = لا × ب = ا

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 161 of 308

(۲) اثبات این امر کہ ا ÷ ب ÷ ج = ا ÷ ب × ج

چون (ا ÷ ب ÷ ج) × ب × ج = {(ا ÷ ب) ÷ ج} × ج × ب

= [{(ا ÷ ب) ÷ ج} × ج] × ب

= (ا ÷ ب) × ب [بحکم (۱)

= ا

∴ بحکم تعریف فقرہ ۶۵ ا ÷ ب ÷ ج = ا ÷ ب × ج یعنی مفہوم تقسیم یک مقدار بر چند مقدار اینست کہ آن مقدار بر حاصل ضرب مقادیر مذکور تقسیم شود

نتیجہ پس ا ÷ ب ÷ ج = ا ÷ ج ÷ ب میباشد زیرا کہ ہر یکے از آنہا = ا ÷ (ب × ج)

(۳) اثبات این امر کہ ا ÷ ب = ا × $\frac{۱}{ب}$

چون $\frac{۱}{ب}$ × ب = ا ÷ ب × ب = ا [بحکم (۱)

لہذا ا × $\frac{۱}{ب}$ × ب = ا × ($\frac{۱}{ب}$ × ب)

= ا × ا = ا

یعنی (ا × $\frac{۱}{ب}$) × ب = ا

∴ بقرار تعریف فقرہ ۶۵ ا ÷ ب = ا × $\frac{۱}{ب}$ پس مفہوم تقسیم یک مقدار بر مقدار دیگر اینست کہ مقدار اول در عکس مقدار دوم ضرب شود۔

نتیجہ ا ÷ ب × ج = ا × ج ÷ ب میباشد زیرا کہ ا ÷ ب × ج = ا × $\frac{۱}{ب}$ × ج

= ا × ج × $\frac{۱}{ب}$

= ا ج ÷ ب

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 162 of 308

۶۷ قاعدهٔ اشارت تقسیم

چون ا × (-ب) = -اب

∴ بموجب تعریف فقره ۶۵ (-اب) ÷ ا = -ب
(-اب) ÷ (-ب) = ا ..... (۱)

وچون (-ا) × (-ب) = اب

∴ اب ÷ (-ا) = -ب
واب ÷ (-ب) = -ا ..... (۲)

ونیز اب ÷ ا = ب
اب ÷ ب = ا

پس از ۱ و ۲ و ۳ قاعده ذیل اخذ میشود :-

هرگاه مقسوم ومقسوم علیه متحد الاشارت باشند خارج قسمت مثبت وهرگاه مختلف الاشارت باشند خارج قسمت منفی خواهد بود یعنی از اشارات متشابهه + واز اشارات غیر متشابهه - پیدا میشود چنانچه در ضرب همین قاعده جاری میباشد

۶۸ تقسیم یک جملهٔ مفرد بر جملهٔ مفرد دیگر

برای معلوم نمودن قاعدهٔ تقسیم یک جملهٔ مفرد بر جملهٔ دیگر اینصورت ذیل ملاحظه شود :-

(۱) چون ۳ اَ بَ × ۵ اَ بَ جَ = ۱۵ اُ بُ جَ

لهذا (۱۵ اُ بُ جَ) ÷ (۵ اَ بَ جَ) = ۳ اُ بُ

پس اگر مقسوم = ۱۵ اُ بُ جَ
= ۳ × ۵ × اَ × اُ × بَ × بُ × جَ
ومقسوم علیه = ۵ اَ بَ جَ
خارج قسمت = ۳ اُ بُ ..... (۱)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 163 of 308

(۲) چون $(-۲ أ^{۲} ب^{۲} ج د) \times (-۳ أ^{۳} ج) = ۶ أ^{۵} ب^{۲} ج^{۲} د$

لہذا $۶ أ^{۵} ب^{۲} ج^{۲} د \div (-۲ أ^{۲} ب^{۲} ج د) = -۳ أ^{۳} ج^{۲}$

پس اگر مقسوم $= ۶ أ^{۵} ب^{۲} ج^{۲} د$

$= ۲ \times ۳ أ^{۲+۳} \times ب^{۲} \times ج \times ج \times د$

ومقسوم علیہ $= -۲ أ^{۲} ب^{۲} \times ج د$ ..... (ب)

خارج قسمت $= -۳ أ^{۳} ج$

(۳) چون $(-۵ أ^{۳} ب^{۵} ج^{۲} د) \times (۴ ب^{۲} ج^{۴}) = -۲۰ أ^{۳} ب^{۷} ج^{۶} د$

لہذا $(-۲۰ أ^{۳} ب^{۷} ج^{۶} د) \div (-۵ أ^{۳} ب^{۵} ج^{۲} د) = ۴ ب^{۲} ج^{۴}$

پس اگر مقسوم $= -۲۰ أ^{۳} ب^{۷} ج^{۶} د = -۵ \times ۴ \times أ^{۳} \times ب^{۵} \times ب^{۲} \times ج^{۲} \times ج^{۴} \times د$

ومقسوم علیہ $= -۵ أ^{۳} ب^{۵} \times ج^{۲} \times د$

$= ۴ ب^{۲} ج^{۴}$ ..... (ج)

پس از اوب وج قاعدہ ذیل اخذ شدہ میتواند :-

از مقسوم آن مضروبات را کہ در مقسوم علیہ نیز موجود میباشد طرح کنید پس اگر مقسوم و مقسوم علیہ متحد العلامت باشند قبل از خارج قسمت اشارت زائد واگر مختلف الاشارہ باشند اشارت ناقص بنویسید

تنبیہ $أ^{۱۲} \div أ^{۷} = (أ^{۵} \times أ^{۷}) \div أ^{۷} = أ^{۵}$ [$أ^{۱۲-۷}$]

وہمچنین $أ^{۲} \div أ^{۹} = أ^{-۷}$ و $أ^{۲} \div أ^{۱۴} = أ^{-۱۲}$ وعلی ہذا القیاس

پس علی العموم $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$ اگر م و ن مثبت واعداد صحیح باشند و م > ن باشد۔

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 164 of 308

مثال ۱ $۱۸م^{۲}ن^{۲}ط$ را بر $-۶م^{۲}ن^{۲}ط$ تقسیم کنید۔

مقسوم $=۱۸م^{۲}ن^{۲}ط$

$=۶\times۳\times م^{۲}\times م\times ن^{۲}\times ط$

ومقسوم علیہ $=-۶م^{۲}ن^{۲}ط$

∴ خارج قسمت $=-۳م$

مثال ۲ $-۲۴أ^{۳}ب^{۳}ج$ را بر $-۶أ^{۲}ب^{۲}ج$ تقسیم کنید۔

مقسوم $=-۲۴أ^{۳}ب^{۳}ج=-۶\times۴\times أ^{۲}\times أ\times ب\times ب^{۲}ج$

مقسوم علیہ $=-۶أ^{۲}ب^{۲}ج$

∴ خارج قسمت $=۴أب$

المسئلہ (۳۶)

تقسیم کنید۔

(۱) $۸أ^{۲}$ را بر $-۲أ$ (۲) $-۱۵أ^{۲}$ را بر $۳أ^{۲}$

(۳) $-۲۰لأ^{۲}ی^{۳}$ را بر $-۵لأی$ (۴) $۲۷م^{۳}ن^{۳}$ را بر $۹م^{۲}ن$

(۵) $-۲۸ط^{۲}ق^{۲}$ را بر $۷ط^{۲}ق$ (۶) $-۳۰أ^{۲}ب^{۲}$ را بر $-۱۰أ^{۲}ب^{۲}$

(۷) $-۷۰لأ^{۱۶}ی^{۹}ع$ را بر $-۱۴لأ^{۵}ی^{۵}$ (۸) $۶۴أ^{۱۲}ب^{۶}ج^{۵}$ را بر $-۸أ^{۹}ب^{۷}ج^{۳}$

(۹) $-۸۱م^{۳}ن^{۳}ط^{۹}$ را بر $۲۷م^{۹}ن^{۹}ط^{۲}$ (۱۰) $۲۵لأ^{۳}ی^{۳}ع^{۶}$ را بر $-۵لأ^{۱۶}ی^{۶}ع^{۸}$

(۱۱) $-۶۹أ^{۲}ب^{۲}ج^{۹}$ را بر $-۲۳أ^{۹}ب^{۷}ج^{۷}$ (۱۲) $-۴۲أ^{۲۳}لأ^{۹}ی^{۳}ع^{۹}$ را بر $-۱۴أ^{۱۶}لأ^{۱۶}ی^{۵}ع^{۶}$

(۱۳) $أ^{۱۰}$ بر $أ^{۵}$ (۱۴) $۲۸لأ^{۳۰}$ بر $-۴لأ^{۱۵۷}$

(۱۵) $۵۶ع^{۳۰۶}$ بر $-۸م^{۲۸۹}$ (۱۶) $-۹۱أ^{۱۳۸}ب^{۲۰۹}$ را بر $۱۳أ^{۹۷}ب^{۵۹}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 165 of 308

۶۹ تقسیم جملهٔ ذوحدود کثیره بر جملهٔ ذوحدِ واحد

بحکم نتیجه ۳ قضیه ۴۶

ا(ب + ج) + د + ی + ف + ...) = اب + اج + اد + ای + اف + ...

لهذا (اب + اج + اد + ای + ...) ÷ ا = ب + ج + د + ی + ... -

= (اب ÷ ا) + (اج ÷ ا) + (اد ÷ ا) + (ای ÷ ا) + ...

پس قاعدهٔ تقسیم ذوحدود کثیره بر ذوحدِ واحد این است که هر حد ذوحدود کثیره بر مقسوم علیه تقسیم شود و مجموع این خارج قسمتهای جزوی خارج قسمت مطلوب میباشد

مثال ۱ ۴ وَ لا^{۲} - ۶ وَ لا^{۲} + ۱۰ ا لا^{۲} را بر - ۲ ا لا تقسیم کنید

خارج قسمت مطلوب = $\frac{۴ \text{ وَ لا}^{۲} - ۶ \text{ وَ لا}^{۲} + ۱۰ \text{ ا لا}^{۲}}{-۲ \text{ ا لا}}$

$= \frac{۴ \text{ وَ لا}^{۲}}{-۲ \text{ ا لا}} + \frac{-۶ \text{ وَ لا}^{۲}}{-۲ \text{ ا لا}} + \frac{۱۰ \text{ ا لا}^{۲}}{-۲ \text{ ا لا}}$

$= -۲ \text{ وَ لا} + ۳ \text{ ا لا} - ۵ \text{ لا}^{۲}$

مثال ۲ ۹ لا^{۵} - ۴ لا^{۴} و - ۲ لا^{۳} و^{۲} را بر ۳ لا^{۳} تقسیم کنید

خارج قسمت مطلوب = $\frac{۹ \text{ لا}^{۵} - ۴ \text{ لا}^{۴} \text{ و} - ۲ \text{ لا}^{۳} \text{ و}^{۲}}{۳ \text{ لا}^{۳}}$

$= \frac{۹ \text{ لا}^{۵}}{۳ \text{ لا}^{۳}} + \frac{-۴ \text{ لا}^{۴} \text{ و}}{۳ \text{ لا}^{۳}} + \frac{-۲ \text{ لا}^{۳} \text{ و}^{۲}}{۳ \text{ لا}^{۳}}$

$= ۳ \text{ لا}^{۲} - \frac{۴}{۳} \text{ لا و} - \frac{۲}{۳} \text{ و}^{۲}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 166 of 308

مشقہ (۳۷)

تقسیم کنید :-

(۱) $وَ^{۲} - ۲وَ آ^{۲}$ را بر $وَ - آ^{۲}$ (۲) $۳لا^{۲} - ۶لا آ^{۲}$ را بر $-۳لا$

(۳) $۴لا^{۲} آ^{۲} - ۸لا آ^{۳}$ را بر $۴لا آ^{۲}$ (۴) $-۹و^{۵} + ۱۲و آ^{۳}$ را بر $-۳و^{۲}$

(۵) $۱۴و^{۶} آ^{۳} - ۲۱و آ^{۵}$ را بر $-۷و^{۵} آ^{۳}$ (۶) $۳ولا^{۳} - ۴و^{۲} لا^{۲} + ۶و^{۳} لا^{۲} \div ۲ولا$

(۷) $-۳و^{۳} لا^{۳} + ۶و^{۴} لا^{۵} - ۹و^{۵} لا^{۴}$ را بر $-۳و^{۳} لا^{۳}$

(۸) $۱۲لا^{۵} - ۸لا^{۳} آ^{۲} + ۲۰ولا^{۴}$ را بر $-۴لا^{۳}$

(۹) $۱۰م^{۳} ن^{۲} - ۱۵م^{۲} ن^{۳} - ۲۰م^{۳} ن^{۳}$ را بر $۵م^{۳} ن^{۲}$

(۱۰) $۸ط^{۳} ق^{۲} - ۵ط^{۲} ق^{۳} - ۳ط^{۳} ق^{۳}$ را بر $-۸ط^{۳} ق^{۳}$

(۱۱) $-۱۴لا^{۵} ی^{۵} + ۲۱لا^{۳} ی^{۳} - ۲۸لا^{۴} ی^{۳}$ را بر $۷لا^{۴} ی^{۳}$

(۱۲) $۱۵و^{۴} لا^{۴} - ۳۰و^{۳} لا^{۵} - ۴۵و^{۲} لا^{۴}$ را بر $۳۰و^{۲} لا^{۵}$

(۱۳) $-۶۰لا^{۵} آ^{۵} - ۷۵لا^{۴} آ^{۴} + ۸۰لا^{۵} آ^{۳}$ را بر $-۲۰لا^{۴} آ^{۳}$

(۱۴) $۲۵م^{۳} ن^{۳} ط - ۳۵م^{۳} ن^{۲} ط - ۴۰م^{۲} ن^{۲} ط$ را بر $۵م^{۲} ن^{۲} ط$

(۱۵) $-و^{۴} لا^{۴} ی^{۳} + و^{۴} لا^{۳} ی^{۳} - و^{۳} لا^{۳} ی^{۳} + و^{۳} لا^{۲} ی^{۳}$ را بر $-ولا ی$

۷۰ تقسیم یک جملۂ مرکب بر جملۂ مرکب دیگر

از امثال ذیل قاعدۂ تقسیم جملۂ مرکب بر جملۂ مرکب دیگر دانسته میشود آنرا بخوبی ملاحظه باید کرد۔

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 167 of 308

چون $(۲ا^۲ + ۳اب + ۴ب^۲)(ا + ۳ب)$

$= ۲ا^۲(ا + ۳ب) + ۳اب(ا + ۳ب) + ۴ب^۲(ا + ۳ب)$

$= ۲ا^۳ + ۹ا^۲ب + ۱۳اب^۲ + ۱۲ب^۳$

لہذا $(۲ا^۳ + ۹ا^۲ب + ۱۳اب^۲ + ۱۲ب^۳) \div (ا + ۳ب) = ۲ا^۲ + ۳اب + ۴ب^۲$

پس اگر درین عمل بدقت نظر نموده شود نتائج ذیل اخذ میشود

(۱) مقسوم و مقسوم علیہ ہر دو بلحاظ قوائے متناقصہ یک حرف مشترک یعنے ا تنظیم میابند۔

(۲) حد اول خارج قسمت یعنے $۲ا^۳ \div ا$ یعنے = (حد اول مقسوم) ÷ (حد اول مقسوم علیہ)

(۳) اگر $۲ا^۲(ا + ۳ب)$ از مقسوم تفریق شود حاصل تفریق $۳ا^۲ب + ۱۳اب^۲ + ۱۲ب^۳$ میباشد و نیز حد دوم خارج قسمت یعنے $۳ا^۲ب \div ا$ یعنے = (حد اول حاصل تفریق اول) ÷ (حد اول مقسوم علیہ)

(۴) اگر $۳ا^۲ب(ا + ۳ب)$ از حاصل تفریق اول تفریق شود حاصل تفریق دوم $۴اب^۲ + ۱۲ب^۳$ میباشد و نیز حد سوم خارج قسمت یعنے $۴اب^۲ \div ا$ یعنے = (حد اول حاصل تفریق دوم) ÷ (حد اول مقسوم علیہ)

(۵) اگر $۴ب^۳(ا + ۳ب)$ از حاصل تفریق دوم تفریق شود ہیچ باقی نمیماند و عمل تقسیم باتمام میرسد و عمل فوق بطرز ذیل نیز نوشتہ میشود :-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 168 of 308

$$(۱+۳ب)\ ۲ا^{۲}+۹اب+۱۳اب^{۲}+۱۲ب^{۳}\ (۲ا^{۲}+۳اب+۴ب^{۲}$$

$$۲ا^{۲}+۶اب$$

$$۳اب+۱۳اب^{۲}$$

$$۳اب+۹اب^{۲}$$

$$۴اب^{۲}+۱۲ب^{۳}$$

$$۴اب^{۲}+۱۲ب^{۳}$$

×

پس قاعدهٔ ذیل اخذ میشود :-

مقسوم و مقسوم علیه هر دو را بلحاظ قوای متناقصهٔ یک حرف مشترک تنظیم بدهید و بقرار قاعدهٔ تقسیم علم حساب بنویسید حداول مقسوم را بر حداول مقسوم علیه تقسیم کرده نتیجه را حداول خارج قسمت قرار بدهید و این مقدار را در مقسوم علیه ضرب کرده حاصل را از مقسوم تفریق کنید این حاصل تفریق را مقسوم جدید تصور کنید و نیز ملاحظه کنید که ترتیب این مقسوم بلحاظ قوای متناقصهٔ حرف مشترک باشد - بعد ازان حداول این مقسوم را بر حداول مقسوم علیه تقسیم کرده خارج را بتقسیم حد دوم خارج قسمت بنویسید و آنرا در مقسوم علیه ضرب نموده حاصل ضرب را از مقسوم جدید تفریق کنید - و همین طرز عمل را جاری بدارید تا اینکه هیچ باقی نماند

مثال ۱ $۲ا^{۲}-۴ا+۱۲$ را بر $ا^{۲}-۹$ را بر $ا+۳$ تقسیم کنید :-

مقسوم و مقسوم علیه هر دو بلحاظ قوای متناقصهٔ $ا$ تنظیم یافته اند

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 169 of 308

پس طریق عمل حسب ذیل خواهد بود:-

مقسوم علیہ = لا² - ۲لا + ۳) ۴لا⁴ + ۱۲لا³ - ۹لا² + ۲لا - ۳ (لا² - ۲لا + ۳

۴لا⁴ - ۸لا³ + ۱۲لا²

۲لا³ - ۲۱لا² + ۲لا

۲لا³ - ۴لا² + ۶لا

- ۱۷لا² + ۶لا - ۳

- ۱۷لا² + ۶لا - ۳

×

پس خارج قسمت = لا² + ۲لا - ۳

تنبیہ چون صلاً در مقسوم این مثال موجود نیست بنابرین حد دوم یعنی ۰لا را بقسیم نوشتہ شدہ است کہ مقام حد سابق آن خالیست و مدعا ازین ترتیب اینست کہ حدود متشابہہ تحت حدود متشابہہ نوشتہ شود و اگر این ترتیب ملحوظ نگردد در عمل زحمت زیادہ رسد

مثال ۱۶لا⁴ + ۳۶لا³ + ۸۱ را بر ۴لا² + ۶لا + ۹ تقسیم کنید -

۴لا² - ۶لا + ۹) ۱۶لا⁴ + ۳۶لا³ + ۸۱ (۴لا² + ۶لا + ۹

۱۶لا⁴ + ۲۴لا³ + ۳۶لا²

- ۲۴لا³ - ۳۶لا² + ۸۱

- ۲۴لا³ - ۳۶لا² + ۵۴لا

۳۶لا² + ۵۴لا + ۸۱

۳۶لا² + ۵۴لا + ۸۱

×

پس خارج قسمت مطلوب = ۴لا² - ۶لا + ۹ میباشد :-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 170 of 308

تنبیه بعض اوقات مقسوم بر مقسوم علیه بدون باقی تقسیم نمیشود
مثلاً اگر در مثال فوق مقسوم ۱۶لا۲ + ۳۶لا۲ + ۶لا + ۸۶ باشد حاصل تفریق
دوم ۳۶لا۲ + ۶۰لا + ۸۶ میشود وحاصل تفریق اخیر ۶لا + ۵ وچون ۶لا + ۵
بر ۴لا۲ + ۶لا + ۹ کامل تقسیم نمیشود لهذا در تقسیم در مثل صورت باقی میماند
وبقرار قواعد علم حساب قرار ذیل نوشته میشود یعنی

$$\frac{16لا^2 + 36لا^2 + 6لا + 86}{4لا^2 + 6لا + 9} = 4لا^2 - 6لا + 9 + \frac{6لا + 5}{4لا^2 + 6لا + 9}$$

وآن حصه مقسوم را که بر مقسوم علیه تقسیم شده نمیتواند باقی میگویند
پس اگر از مقسوم بحرف م وازمقسوم علیه بحرف ع وازخارج قسمت بحرف ج
وازباقی بحرف ب تعبیر شود نتیجه ذیل دائماً صحیح خواهد بود۔

م = ع × ج + ب

مثال ۳لا۴ - ۴لا۲ - ۲لا۲ + ۳لا۲ + ۸لا - ۱۲ را بر لا۲ - ۴ تقسیم کنید

تنبیه این امر ضروری نیست که مقسوم ومقسوم علیه مخص بلحاظ قوای
متناقصهٔ یک حرف مشترک ترتیب داده شوند بلکه اینقدر لازم است که یک ترتیب خاص
داشته باشد خواه بلحاظ قوای متناقصه وخواه بلحاظ قوای متزایدهٔ یک حرف مشترک
چنانچه حل این مثال بعد از ترتیب مقسوم ومقسوم علیه بلحاظ قوای متزایدهٔ لا کرده میشود

∴ ۴ + لا۲) ۱۲ - ۸لا + ۳لا۲ - ۲لا۳ - ۴لا۴ + لا۵ (۳ - ۲لا + لا۲

۱۲ - ۳لا۲

۸لا - ۲لا۳

۸لا - ۲لا۳

- ۴لا۴ + لا۵

+ ۴لا۴ + لا۵

×

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 171 of 308

مثال ۴ $أ^2 ب^2 + ۲ أ ب ج^2 - أ ج^2 - ب^2 ج^2$ را بر $أ ب + أ ج - ب ج$ تقسیم کنید

ترتیب مقسوم بلحاظ قوای متناقصهٔ أ حسب ذیل است $أ^2 (ب^2 - ج^2) + ۲ ب ج^2 أ - ب^2 ج^2$

و ترتیب مقسوم بلحاظ قوای متناقصهٔ آن $(ب + ج) أ - ب ج$ است

پس مقسوم ذوحدود ثلثه و مقسوم علیه ذوحدین است

$$(ب + ج) أ - ب ج \overline{)} (ب^2 - ج^2) أ^2 + ۲ ب ج^2 أ - ب^2 ج^2 \overline{(} (ب - ج) أ + ب ج$$

$$(ب^2 - ج^2) أ^2 - (ب^2 ج - ب ج^2) أ$$

$$(ب^2 ج + ب ج^2) أ - ب^2 ج^2$$

$$(ب^2 ج + ب ج^2) أ - ب^2 ج^2$$

×

پس خارج قسمت $= أ ب - أ ج + ب ج$

مثال ۵ $أ^3 + ب^3 ج^3 + ۳ أ ب ج$ را بر $أ + ب ج$ تقسیم کنید

ترتیب مقسوم و مقسوم علیه بلحاظ قوای متناقصهٔ أ حسب ذیل میباشد

$أ^3 + ۳ ب ج أ + (ب^3 ج^3)$ و $أ + (ب ج)$

پس مقسوم ذوحدود ثلثه و مقسوم علیه ذوحدین میباشد

$$أ + (ب ج) \overline{)} أ^3 + ۳ ب ج أ + (ب^3 ج^3) \overline{(} أ^2 - أ (ب ج) + (ب^2 ج^2 - ب ج)$$

$$أ^3 + أ^2 (ب ج)$$

$$- أ^2 (ب ج) + ۳ ب ج أ$$

$$- أ^2 (ب ج) - أ (ب ج)^2$$

$$أ (ب^2 ج^2 + ب ج) + (ب^3 ج^3)$$

$$أ (ب^2 ج^2 + ب ج) + (ب^3 ج^3)$$

×

∴ خارج قسمت مطلوب $= أ^2 + ب^2 ج^2 - أ ب + أ ج + ب ج$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 172 of 308

مثال ۶ (ب ج)^{۲} ا^{۲} + (ج - ا) ب^{۲} + (ا - ب)^{۲} ج^{۲} را بر ا^{۲} - ا ب - ا ج + ب ج تقسیم کنید :-

مقسوم و مقسوم علیہ را بلحاظ قواے متناقصۂ ا ترتیب بدہید

مقسوم = (ب ج)^{۲} ا^{۲} - ب^{۲} ا ج^{۲} ا + ب^{۲} ج^{۲} - ب ج^{۲}

= (ب ج)^{۲} ا^{۲} - (ب^{۲} - ج^{۲}) ا + ب ج (ب^{۲} - ج^{۲})

ومقسوم علیہ = ا^{۲} - (ب + ج) ا + ب ج

پس مقسوم ذو حدثلثہ و مقسوم علیہ ذو حدین است

ا^{۲} (ب ج)^{۲} + ب ج ا^{۲} (ب ج) - ا (ب ج)^{۲} + ب ج (ب^{۲} ج^{۲}) ا (ب ج) + (ب ج)^{۲}

ا^{۲} (ب ج) - ا^{۲} (ب^{۲} ج^{۲}) + ا ب ج (ب ج)

ا^{۲} (ب^{۲} ج^{۲}) - ا (ب^{۲} ج^{۲} + ب ج^{۲} - ب ج^{۲}) + ب ج (ب ج)

ا^{۲} (ب^{۲} ج^{۲}) - ا (ب^{۲} ج^{۲} + ب^{۲} ج - ب ج^{۲}) + ب ج (ب ج)

∴ خارج قسمت مطلوب = ا ب - ا ج + ب^{۲} ج^{۲}

تنبیہ باید دانست کہ جملہائیکہ در خطوط قوسی بطور امثال نوشتہ شدہ اند تنظیم آنہا بلحاظ قواے متناقصۂ ب میباشد - وایں چنین ترتیب موجب سہولت و وضوح عمل میگردد -

امثلہ (۳۸)

تقسیم کنید :-

(۱) لا^{۲} - ۵لا + ۶ بر لا - ۳ (۲) ۲لا^{۲} - ۱۱لا + ۵ بر ۲لا - ۱

(۳) ۶لا^{۲} - لا - ۱۲ بر ۲لا - ۳ (۴) ۱۵لا^{۲} - لا - ۲۸ بر ۳لا + ۴

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 173 of 308

(٥) $٢ؤ^{٢}-٧ؤب+٦ب^{٢}$ بر $ؤ-٢ب$ (٦) $لا^{٢}+لاى^{٢}+ى^{٢}$ بر $لا^{٢}+لاى+ى^{٢}$

(٧) $٤لا^{٢}-٩ؤ^{٢}$ بر $٢لا+٣ؤ$ (٨) $لا^{٢}+ؤ^{٢}$ بر $لا+ؤ$

(٩) $ؤ^{٢}-ؤب-٧ب^{٢}+٣ب^{٢}$ بر $ؤ-٣ب$

(١٠) $٢م^{٣}-٩م^{٢}ن+١٣منّ-٦ن^{٣}$ بر $٢م-٣ن$

(١١) $ؤ^{٣}-٣ؤب+٣ؤب^{٢}-ب^{٣}$ بر $ؤ^{٢}-ب^{٢}$

(١٢) $٢لا^{٣}-٣لا^{٢}ى-٣لاى^{٢}-٢ى^{٣}$ بر $لا^{٢}+ى^{٢}$

(١٣) $٢ؤ^{٣}-٣٦ؤ^{٢}لا-١٠٦ؤلا^{٢}$ بر $٢ؤ^{٢}+٨ؤلا$

(١٤) $٣+٢لا+٤لا^{٢}+٥لا^{٣}-٤لا^{٤}+٢لا^{٥}$ بر $١+٢لا^{٢}$

(١٥) $لا^{٣}-٤لا^{٢}+١٢لا-٩$ بر $لا^{٢}+٢لا-٣$

(١٦) $٤ؤ^{٣}-٩ؤب^{٢}+٢٤ؤب^{٢}-١٦ب^{٣}$ بر $٢ؤ^{٢}-٣ؤب+٤ب^{٢}$

(١٧) $ؤ^{٣}+٤ؤ^{٢}لا+١٦لا^{٣}$ بر $ؤ^{٢}+٢ؤلا+٤لا^{٢}$

(١٨) $ؤ^{٣}+٤ب^{٣}$ بر $ؤ^{٢}+٢ؤب+٢ب^{٢}$

(١٩) $٢لا^{٥}-٧لا^{٤}-٢لا^{٣}+١٨لا^{٢}-٣لا-٨$ بر $لا^{٣}-٢لا+١$

(٢٠) $لا^{٤}-٨١$ بر $لا-٣$ (٢١) $ؤ^{٥}-٣٢$ بر $ؤ-٢$

(٢٢) $٣-٩لا+٢لا^{٢}+٥لا^{٣}-٧لا^{٤}+٢لا^{٥}$ بر $١-٣لا+لا^{٢}$

(٢٣) $٨٢لا^{٢}+٤٠-٤٥لا^{٣}+١٨لا^{٤}-٦٧لا$ بر $٦لا^{٢}+٨-٧لا$

(٢٤) $٦٤-لا^{٦}$ بر $٢-لا$ (٢٥) $١+لا^{٢}-٢لا^{٣}$ بر $لا^{٢}+١-٢لا$

(٢٦) $١٣ؤب^{٢}+٢ؤب^{٣}+٦ؤ^{٢}-ؤب+٤ب^{٣}$ بر $٤ؤب+ب^{٢}+٣ؤ$

(٢٧) $ؤب-١٥ب^{٣}-٨ؤب^{٢}+ؤ^{٣}+١٩ؤب^{٢}$ بر $ؤ^{٢}+٣ب^{٢}-٢ؤب$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 174 of 308

(۲۸) لا^{۲} - و^{۲} بر لا^{۲} - ۲ لا و + ۲ لا و - و^{۲}

(۲۹) ۸ و^{۲} ب^{۲} + ۳ ب^{۵} + و^{۵} - ۹ و^{۲} ب^{۲} - ۲ و ب^{۴} - و^{۴} ب بر ۲ و ب - ۳ ب^{۲} + و^{۲}

(۳۰) ی^{۲} + لا^{۲} - ۲ لا ی^{۲} بر لا^{۲} + ی^{۲} - ۲ لا ی

(۳۱) لا^{۲} - ۲ و^{۲} لا^{۲} + و^{۲} بر لا^{۲} - ۲ و لا + و^{۲}

(۳۲) ۲ لا^{۲} ی^{۲} + ی^{۲} + لا^{۲} بر ۲ لا ی + لا^{۲} + ی^{۲}

(۳۳) لا^{۲} + (و + ب + ج) لا^{۲} + (و ب + و ج + ب ج) لا + و ب ج بر لا + ج

(۳۴) لا^{۲} + (ب - ج - و) لا^{۲} + (ج و - و ب - ب ج) لا + و ب ج بر لا^{۲} + (ب - و) لا - و ب

(۳۵) و^{۲} - و ب + و^{۲} ج - و ب ج - ب^{۲} ج - ب ج^{۲} بر و^{۲} - ب ج

(۳۶) و^{۲} (ب + ج) - ب^{۲} (و + ج) + ج^{۲} (و + ب) + و ب ج بر و - ب + ج

(۳۷) و^{۲} (ب + ج) + ب^{۲} (و + ج) + ج^{۲} (و - ب) + و ب ج رابر و + ب + ج

(۳۸) لا^{۲} - ۲ و لا^{۲} + (و^{۲} - و ب - ب^{۲}) لا + و^{۲} ب + و ب^{۲} بر لا - و - ب

(۳۹) و^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} - ۳ و ب ج بر و + ب + ج

(۴۰) لا^{۲} + ی^{۲} - و + ۳ لا ی بر لا + ی - ۱

(۴۱) لا^{۲} - ۸ ی^{۲} - ۲۷ ع^{۲} - ۱۸ لا ی ع بر لا - ۲ ی - ۳ ع

(۴۲) لا^{۲} - ی^{۲} + ع^{۲} + ۳ لا ی ع بر لا - ی + ع

(۴۳) ۸ لا^{۲} - ۲۷ ی^{۲} ع^{۲} - ۱۸ لا ی ع بر ۴ لا^{۲} + ۹ ی^{۲} + ع^{۲} + ۶ لا ی + ۲ لا ع - ۳ ی ع

(۴۴) و^{۲} (ب - ج) + ب^{۲} (ج - و) + ج^{۲} (و - ب) بر و - ب

(۴۵) (لا^{۲} - ب لا + ج لا) و - ب ج (لا + و) + (لا - ب + ج) لا^{۲} بر (لا + و) (لا - ب)

(۴۶) ج (و ب - لا^{۲}) + (و - ب) (لا ج) لا + لا (لا^{۲} - و ب) بر (لا - ب) (لا ج)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 175 of 308

(۴۷) $ا^۲(ب-ج)+ب^۲(ج-ا)+ج^۲(ا-ب)$ بر $ا+ب+ج-ا-ب-ج$

(۴۸) $ا^۳(ب-ج)+ب^۳(ج-ا)+ج^۳(ا-ب)$ بر $ا^۲ب-ب^۲ج+ا^۲ج$

(۴۹) $لای^۲+۲ی^۲ع-لای^۲ع+لای ع^۲-لا^۲ی-۲ی ع^۲+لا^۲ع-لا ع^۲ بری+ع-لا$

(۵۰) $ب(لا^۲+ا^۲)+ا لا(لا^۲-ا^۲)+ا^۲(لا+ا)$ بر $(ا+ب)(لا+ا)$

(۵۱) $(ا-ب)^۲ج^۲+(ا-ب)ج^۲-(ج^۲-ا^۲)ب^۲+(ج-ا)ب^۲$ بر $(ا-ب)ج-(ج-ا)ب$

[جملہائے فوق را بلحاظ قوائے متناقصہ درج تنظیم بدہید]

(۵۲) $(ا لا+ب ی)^۲+(ا لا-ب ی)^۲-(ا ی-ب لا)^۲+(ا ی+ب لا)^۲$ را

بر $(ا+ب)^۲ لا^۲-۳ ا ب(لا^۲-ی^۲)$

[اول مقسوم را مختصر کنید و بعد ازان مقسوم و مقسوم علیہ را بلحاظ قوائے متناقصہ لا تنظیم بدہید]

(۵۳) $لا(ا+ی^۲)(ا+ع^۲)+ی(ا+ع^۲)(ا+لا^۲)+ع(ا+لا^۲)(ا+ی^۲)+۳لای ع$ را

بر $ا+لای+ی ع+ع لا$

[این جملہا را بلحاظ قوائے متناقصہ لا تنظیم بدہید]

(۵۴) $(۴لا^۲-۳ا^۲لا^۲)^۲+(۴ی^۲-۳ا^۲)^۲-ا^۲$ بر $لا^۲+ی^۲-ا^۲$

اگر $ا^۲÷ا^۹=ا^{-۵}$ برائے ہمہ قیمتہائے صحیح و ن صحیح باشد پس اشکال ذیل را ثابت کنید

(۵۵) $ز=ا^۱$ $\quad [ز=ا^{۱-۱}=ا^۱÷ا^۱=۱]$

(۵۶) $ا^ن=\frac{۱}{ا^{-ن}}$ $\quad [ا^{-ن}=ا^{۰-ن}=ز÷ا^ن=۱÷ا^ن]$

(۵۷) $لا^۵÷لا^۴=لا$ $\quad$ (۵۸) $لا^۴÷لا^۳=لا$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 176 of 308

تقسیم کنید :-

(۵۹) $و^{۲}ب^{۲}$ بر $و^{\frac{۱}{۲}}ب^{\frac{۱}{۲}}$ (۶۰) $و^{-۲}ب^{\frac{۱}{۲}}ج$ بر $و^{-۳}ب^{\frac{۳}{۲}}ج^{۲}$

(۶۱) $۱۵لای ع$ بر $-۵لای^{\frac{۳}{۵}}ع^{\frac{۳}{۴}}$ (۶۲) $۹لا^{\frac{۳}{۴}}-۱۶ای^{\frac{۳}{۴}}$ بر $۳لا^{\frac{۳}{۴}}+۴ای^{\frac{۳}{۴}}$

(۶۳) $و+ب$ بر $و^{\frac{۱}{۲}}+ب^{\frac{۱}{۲}}$ (۶۴) $و^{\frac{۳}{۲}}+و^{\frac{۳}{۲}}ب^{\frac{۳}{۲}}+ب$ بر $و^{\frac{۳}{۲}}+و^{\frac{۳}{۲}}ب^{\frac{۳}{۲}}+ب^{\frac{۳}{۲}}$

(۶۵) $۴لا^{\frac{۳}{۲}}-۳۷لای^{\frac{۳}{۲}}+۹ی^{\frac{۳}{۲}}$ بر $۲لا^{\frac{۳}{۲}}+۵لای^{\frac{۳}{۲}}-۳ی^{\frac{۳}{۲}}$

(۶۶) $و-ب$ بر $و^{\frac{۱}{۲}}-ب^{\frac{۱}{۲}}$

(۶۷) $۴و^{-۱۰}+۱۲و^{-\frac{۱۵}{۲}}ب^{-\frac{۵}{۲}}+۹و^{-۵}ب^{-۲}-۲۵ب^{-۶}$ بر $۲و^{-۵}+۳و^{-\frac{۵}{۲}}ب^{-\frac{۵}{۲}}-۵ب^{-۳}$

(۶۸) $۹لا^{-\frac{۵}{۲}}-۲۵لای^{-\frac{۵}{۲}}+۷۰لای^{-\frac{۹}{۸}}-۹۴ی^{-\frac{۵}{۲}}$ بر $۳لا^{-\frac{۵}{۲}}+۵لای^{-\frac{۵}{۸}}-۷ی^{-\frac{۵}{۲}}$

(۶۹) $و^{۲}-ب^{۲}$ بر $و^{\frac{۱}{۲}}-ب^{\frac{۱}{۲}}$ (۷۰) $لا+ی+۶-۳لا^{\frac{۱}{۲}}ای^{\frac{۱}{۲}}ع$ بر $لا^{\frac{۱}{۲}}+ی^{\frac{۱}{۲}}+ع^{\frac{۱}{۲}}$

۱۷ نتائج مفیدہ

چون $(لا^{۲}-و^{۲})=(لا-و)(لا+و)$ و $(لا^{۳}-و^{۳})=(لا-و)(لا^{۲}+لاو+و^{۲})$

$$\therefore لا^{۴}-و^{۴}=\left[لا^{۳}(لا-و)+و(لا^{۳}-و^{۳})\right]$$

$$=(لا-و)\left\{لا^{۳}+و(لا^{۲}+لاو+و^{۲})\right\}$$

$$=(لا-و)\left\{لا^{۳}+لا^{۲}و+لاو^{۲}+و^{۳}\right\}$$

$$ولا^{۵}-و^{۵}\left[=لا^{۴}(لا-و)+و(لا^{۴}-و^{۴})\right]$$

$$=(لا-و)\left\{لا^{۴}+و(لا^{۳}+لا^{۲}و+لاو^{۲}+و^{۳})\right\}$$

$$=(لا-و)(لا^{۴}+لا^{۳}و+لا^{۲}و^{۲}+لاو^{۳}+و^{۴})$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 177 of 308

وبقرار فوق ثابت شده میتواند که لا-ا یکے از مضروبات لا-ا ولا-ا ولا-ا وغیرہ میباشد پس لا-ا دائماً یکے از مضروبات لا^{ن}-ا^{ن} خواہد بود بشرطیکہ ن عدد صحیح باشد پس ظاہر است کہ برائے ہمہ قیمتہائے ن کہ مثبت وصحیح باشند لا^{ن}-ا^{ن} بر لا-ا بدون باقی تقسیم شدہ میتواند۔

باز چون لا^{ن}+ا^{ن} = (لا^{ن}-ا^{ن}) + ۲ا^{ن} و یک حصہ ازین یعنے لا^{ن}-ا^{ن} بر لا-ا بدون باقی تقسیم شدہ میتواند لیکن ۲ا^{ن} بدون باقی تقسیم نمیشود۔

∴ لا^{ن}+ا^{ن} بر لا-ا بدون باقی تقسیم شدہ نمیتواند۔

پس اگر ن عدد مثبت وصحیح باشد

لا-ا دائماً لا^{ن}-ا^{ن} را بدون باقی تقسیم میکند

لیکن لا^{ن}+ا^{ن} را ہرگز بدون باقی تقسیم کردہ نمیتواند } ..... (ا)

نتیجہ لا+ا در انوقت لا^{ن}-ا^{ن} را بدون باقی تقسیم کردہ میتواند کہ ن عدد صحیح وجفت باشد۔

زیرا کہ اگر ن جفت باشد (-ا)^{ن} = ا^{ن} * و ∴ لا^{ن}-ا^{ن} = لا^{ن} - (-ا)^{ن}

وچون ن طاق باشد (-ا)^{ن} = -ا^{ن} * و ∴ لا^{ن}-ا^{ن} = لا^{ن} + (-ا)^{ن}

ونیز لا+ا = لا - (-ا)

* اشارت این امر از روے قانون اشارات ظاہر است مثلاً (-ا)^{۲} = ا^{۲} علے ہذا القیاس ∴ (-ا)^{۳} = (-ا) × (-ا)^{۲} = -ا^{۳} و (-ا)^{۴} = (-ا) × (-ا)^{۳} = (-ا)(-ا)^{۳} یعنے بقرار زوج یا فرد بودن قوت ن قوائے (-ا) مثبت یا منفی میباشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 178 of 308

پس از (۱) ظاہر است کہ لا - (-۱) جملہ لاّ - (-۱)ّ را بدون باقی تقسیم میکند
ولاّ + (-۱)ّ را تقسیم نمیکند پس لا + ۱ جملہ لاّ - ۱ّ را بدون باقی تقسیم میکند
بشرط اینکہ ن جفت باشد وبعبارت آخری لاّ - ۱ّ را آنوقت بدون
باقی تقسیم کردہ میتواند کہ ن عدد صحیح وجفت باشد -

نتیجہ ۲ لا + ۱ آنوقت لاّ + ۱ّ را بدون باقی تقسیم کردہ میتواند کہ
ن عدد صحیح وطاق باشد - زیرا کہ اگر ن طاق باشد (-۱)ّ = - ۱ّ
و∴ لاّ + ۱ّ = لاّ - (-۱)ّ واگر جفت باشد (-۱)ّ = ۱ّ
و∴ لاّ + ۱ّ = لاّ + (-۱)ّ
ونیز لا + ۱ = لا - (-۱)
پس از (۱) ظاہر است کہ لا - (-۱) جملہ لاّ - (-۱)ّ را بدون باقی تقسیم کردہ
میتواند ولاّ + (-۱)ّ را تقسیم نمیتواند - لہذا لا + ۱ جملہ لاّ + ۱ّ را باین شرط
بدون باقی تقسیم میکند کہ ن طاق باشد وبعبارت دیگر لا + ۱ جملہ
لاّ + ۱ّ را آنوقت بدون باقی تقسیم کردہ میتواند کہ ن عدد صحیح وطاق باشد
پس از بحث فوق نتائج ذیل اخذ میشوند :-

لا - ۱ دائما لاّ - ۱ّ را بدون باقی تقسیم میکند
و لاّ + ۱ّ را ہرگز بدون باقی تقسیم نمیکند

لا + ۱ جملہ لاّ - ۱ّ را آنوقت بدون باقی تقسیم میکند کہ ن جفت باشد
ولاّ + ۱ّ را آنوقت کہ ن طاق باشد -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 179 of 308

مسئلہ (۳۹)

ازروی عمل تقسیم ثابت کنید کہ جملہائے ذیل بر لا+ا بدون باقی تقسیم شدہ میتوانند

(۱) $لا^{۲}+ا^{۲}$ (۲) $لا^{۲}-ا^{۲}$ (۳) $لا^{۹}+ا^{۹}$ (۴) $لا^{۶}-ا^{۶}$

(۵) $لا^{۸}+ا^{۸}$ (۶) $لا^{۸}-ا^{۸}$

ازروی عمل تقسیم ثابت کنید کہ جملہائے ذیل بر لا+ا بدون باقی تقسیم نمیشوند

(۷) $لا^{۳}-ا^{۳}$ (۸) $لا^{۴}+ا^{۴}$ (۹) $لا^{۹}-ا^{۹}$ (۱۰) $لا^{۶}+ا^{۶}$

(۱۱) $لا^{۷}-ا^{۷}$ (۱۲) $لا^{۸}+ا^{۸}$

در مسئلہ ذیل خارج قسمت را بنویسید:-

(۱۳) $لا^{۲}-۱$ بر لا-۱ (۱۴) $لا^{۲}-ی^{۲}$ بر لا+ی (۱۵) $لا^{۹}-۱$ بر لا-۱

(۱۶) $لا^{۹}+ی^{۹}$ بر لا+ی (۱۷) $لا^{۶}-۱$ بر لا-۱ (۱۸) $لا^{۶}-ی^{۶}$ بر لا+ی

(۱۹) $لا^{۸}-۱$ بر لا-۱ (۲۰) $لا^{۸}+ی^{۸}$ بر لا+ی

باب ہشتم

مضروبات

۷۲ تعریفات

ہرگاہ یک جملہ جبریہ مساوی حاصل ضرب دو یا زیادہ جملہ جبریہ باشد پس ہر یک از جملہائے دوم را مضروب جملہ اول میگویند

تنبیہ در اینجا بحث از جملہای منطق و صحیح کردہ خواہد شد یعنی بحث از تقسیم جملہا میشود کہ کسر داشتہ باشند و نہ اشارت جذر و نیز مراد از مضروبات

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 180 of 308

یک جملہ مضروبات صحیحہ و منطقہ میباشند [در باب ششم نیز کیفیت مضروبات چیزے مذکور شدہ است اما در ینجا مفصل ذکر آن نمودہ میشود]

۷۳ چند صورت آسان در باب تفریق مضروبات

ہر جملہ جبریہ کہ ہر حد آن یک مضروب مشترک داشتہ باشد بآسانی بدو مضروب تفریق میشود و یکے از مضروبات مذکور مفرد و دیگر مرکب میباشد مثلاً

(۱) اوَلا + اولاَ = اولا (ا + لا) (۲) ۲اَب - ۳اَب = اَب (۲ا - ۳ب)

(۳) ۲۴ لاَ اوَ - ۴۰ لاَ اوَ + ۵۶ لاَ اوَ = ۸ لاَ اوَ (۳ لاَ - ۵ لا ا + ۷ اوَ)

امثلہ (۴۰)

جملہای ذیل را مضروبات تفریق کنید :-

(۱) اب + اج (۲) اوَب + اوَب (۳) لاَیَ - ۲لاَیَ

(۴) ۲لاَیَ + ۴لایَ - ۶لایَ (۵) ۴اُب - ۶اوَب - ۸اَب

(۶) اولایَ - ۵اَلاَیَ + ۳اولاَ (۷) ۳لاَیَ - ۱۲لاَیَ + ۲۱لاَیَ

(۸) ۲۸ اُبَ - ۴۲ اُبَ (۹) ۲۷ لاَیَ + ۱۰۸ لاَیَ

(۱۰) ۳۹ اُبَ جَ - ۶۵ بَ جَ اَ - ۹۱ جَ اَبَ

۷۴ جملہائیکہ شکل اَ - ب دارند

در فقرہ (۵۲) مضروبات جملہائے قسم فوق مذکور گردیدہ در ینجا چند مثال دیگر نیز برائے مشق طلبہ علم نوشتہ شدہ است :-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 181 of 308

امثلہ (۴۱)

جملہائے ذیل را بمصدر وبات تفریق کنید:-

(۱) $۹ا^۲-۱۶ب^۲$ (۲) $۴ا^۲-۲۵ا^۲لا^۲$ (۳) $۳۶لا^۲-۱$ (۴) $۱۶لا^۲-۱$

(۵) $۱۶لا^۵-۹لا$ (۶) $۱۶لا^۵-۸۱لا$ (۷) $۱-۱۶ا^۲$ (۸) $لا-۸۱لا^۷$

(۹) $۳۶-لا^۲ا^۲$ (۱۰) $۶۴ا^۲-۴۹لا^۲$ (۱۱) $۱۲۱-م^۲$ (۱۲) $۴۹لا^۲ا^۲-۸۱$

(۱۳) $ا^۲ب^۲-۲۵ج^۲د^۲$ (۱۴) $۸۱لا^۱۲-۶۴ا^۲$ (۱۵) $ط^۲ق^۲-۱۰۰$

(۱۶) $۱۴۴لا^۲-۲۵لا^۲ا^۲$ (۱۷) $۱۹۲ا^۲-۳۴۳ا^۵لا^۲$

(۱۸) $۹۸ا^۲لا^۵-۱۲۸ا^۱لا$ (۱۹) $۳۲۴لا^۷ا^۲-۴۸۴لا^۵ا^۲$

(۲۰) $۲۴۵م^۲ن^۱۲-۵-۶م^۱۵ن^۷$ (۲۱) $(ا+۲ب)^۲-۲۵ج^۲$

(۲۲) $ا^۲-(۳ب-۵ج)^۲$ (۲۳) $(لا+ی)^۲-(لا-ی)^۲$

(۲۴) $(۳ا+۲لا)^۲-(۲ا+لا)^۲$ (۲۵) $۴(ا-ب)^۲-۹(ج-د)^۲$

(۲۶) $۴۹لا^۲-(۵ی-۴ع)^۲$ (۲۷) $(۸لا+۵)^۲-(۲لا-۷)^۲$

(۲۸) $(ا+ب-ج)^۲-(ا-ب+ج)^۲$

(۲۹) $(۲ا-۳ب+۴ج)^۲-(ا+۴ب-۵ج)^۲$

(۳۰) $۶۴(ا+۳لا-۴ی)^۲-۹(۲ا-لا+۳ی)^۲$

(۳۱) $(۴لا^۲-۵ا^۲)^۲-(۵لا^۲-۴ا^۲)^۲$

(۳۲) $(۵ا^۲-۳ا+۷)^۲-(۵ا^۲-۳ا-۷)^۲$

۷۵ جملہائیکہ بیک نظر بشکل $ا^۲-ب^۲$ تبدیل شدہ میتوانند

امثلہ ذیل تشریح تبدیل فوق را خواہند کرد:-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 182 of 308

مثال ۱ $x^2+x^2y^2+y^4$ را بمضروبات تفریق کنید

$$x^4+x^2y^2+y^4 = (x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}$$
$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

مثال ۲ a^4+4 را بمضروبات تفریق کنید

$$a^4+4=(a^4+4a^2+4)-4a^2$$
$$=(a^2+2)^2-(2a)^2$$
$$=\{(a^2+2)+2a\}\{(a^2+2)-2a\}$$
$$=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$$

مثال ۳ a^4-6a^2+1 را بمضروبات تفریق کنید:

$$a^4-6a^2+1=(a^4-2a^2+1)-4a^2$$
$$=(a^2-1)^2-(2a)^2$$
$$=\{(a^2-1)+2a\}\{(a^2-1)-2a\}$$
$$=(a^2+2a-1)(a^2-2a-1)$$

مثال ۴ $x^4-y^2+2yz-z^2$ را بمضروبات تفریق کنید

$$x^4-y^2+2yz-z^2=x^4-(y^2-2yz+z^2)$$
$$=x^4-(y-z)^2$$
$$=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$$
$$=(x+y-z)(x-y+z)$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 183 of 308

مثال ۵ ۲(ا ب + ج د) − ا² − ب² + ج² + د² را بمضروبات تفریق کنید

جملۂ مفروضہ = (ج² + ۲ ج د + د²) − (ا² − ۲ ا ب + ب²)

= (ج + د)² − (ا − ب)²

= {(ج + د) + (ا − ب)} {(ج + د) − (ا − ب)}

= (ج + د + ا − ب)(ج + د − ا + ب)

مسئلہ (۴۲)

جملہائے ذیل را بمضروبات تفریق کنید:-

(۱) لا² + لا² + ۱ (۲) لا⁴ + لا² + ۱ (۳) ؤ² + ؤ لا² + لا⁴

(۴) ؤ⁴ + ؤ² لا² + لا⁴ (۵) لا⁴ + ۶۴ (۶) ۴ لا⁴ + ۸۱

(۷) ۹ لا⁴ + ۳۶ (۸) ؤ⁴ + ۲ ؤ² + ۹ (۹) لا⁴ − ۷ لا² + ۹

(۱۰) ۴ لا⁴ + ۸ لا² + ۹ (۱۱) ۴ لا⁴ − ۱۶ لا² + ۹ (۱۲) ۴ لا⁴ + ۳ لا² + ۶

(۱۳) ۴ ؤ⁴ − ۳۷ ؤ² + ۹ (۱۴) ۴ ؤ⁴ + ۶۲۵ (۱۵) ۹ لا⁴ + ۲۳ لا² + ۱۶

(۱۶) ۹ ؤ⁴ − ۲۵ ؤ² + ۱۶ (۱۷) ۹ لا⁴ − ۳۳ لا² + ۱۶ (۱۸) ۹ ؤ⁴ − ؤ² + ۱۶

(۱۹) ۱۶ لا⁴ + ۴ لا² ؤ² + ۲۵ ؤ⁴ (۲۰) ۹ ؤ⁴ − ۱۹ ؤ² لا² + ۲۵ لا⁴ (۲۱) لا⁴ + ۸ لا² + ۱۴۴

(۲۲) ؤ⁴ − ۳۵ ؤ² ب² + ۲۵ ب⁴ (۲۳) ۳۶ ؤ⁴ − ۱۶ ؤ ب² + ب⁴

(۲۴) ۴۹ م⁴ + ۱۶ ن⁴ − ۶۰ م² ن² (۲۵) ۶۴ ؤ⁴ + ۸۱ لا⁴

(۲۶) ۴ لا⁴ + (۱ ۷)² (۲۷) لا⁴ − ی⁴ + ۲ ی ع − ع² (۲۸) ۴ ؤ⁴ − ب⁴ − ۶ ج² + ۶ ب ج

(۲۹) ۹ لا⁴ − ۴ ی⁴ + ۱۲ ی ع − ۹ ع² (۳۰) ؤ⁴ − ۴ ب⁴ − ۲۵ ج² + ۲۰ ب ج

(۳۱) ۳۰ لا ع + ۱۶ ی² − ۹ لا⁴ − ۲۵ ع² (۳۲) ؤ⁴ + ۴ ب² − ۹ ج² − ۴ د² − ۴ ا ب + ۲ ا ج د

(۳۳) (لا² − ۲ لا ی) − (ع² − ۲ ی ع) (۳۴) ۴ لا⁴ − ۱ + ۹ ؤ⁴ − ۲۵ ب² + ۱۲ لا ؤ − ۱۰ ا ب

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 184 of 308

(۳۵) $۹لا^{۲}-۴ی^{۲}-۴۹ع^{۲}-۳۰لا+۲۸ی ع+۲۵$

(۳۶) $۱۶ا^{۲}-۱۶ج^{۲}-۹ب^{۲}-۲۴ا+۲۴ب ج+۹$

(۳۷) $۴۹ی^{۲}+۶۲۰ع+لا^{۲}-۱۴لای-۲۵ع^{۲}-۴$

(۳۸) $۱۶لا^{۲}+۴۲ب ی-۹ی^{۲}+۴۰لا ا-۴۹ب^{۲}+۲۵ا^{۲}$

(۳۹) $۴۹لا^{۲}-۱+۱۶ی^{۲}-۶۴ع^{۲}+۱۶ع-۵۶لای$

(۴۰) $ا^{۲}-ب^{۲}-ج^{۲}+د^{۲}-۲(اد-بج)$

۷۶ جملہائیکہ شکل $ا^{۳}+ب^{۳}$ یا $ا^{۳}-ب^{۳}$ دارند

طریق معلوم کردن تضروبات اینچنین جملہا در فقرہ ۵۵ و ۵۶ بیان شدہ است دریں جا چند سوال دشوار دیگر نوشتہ میشوند :-

مثال ۱ $ا^{۶}+ب^{۶}$ را بمضروبات تفریق کنید

چون $ا^{۲}+ب^{۲}=(ا+ب)(ا^{۲}-اب+ب^{۲})$

لہذا $ا^{۶}+ب^{۶}=(ا^{۲})^{۳}+(ب^{۲})^{۳}$

$=(ا^{۲}+ب^{۲})\{(ا^{۲})^{۲}-(ا^{۲})(ب^{۲})+(ب^{۲})^{۲}\}$

$=(ا^{۲}+ب^{۲})\{ا^{۴}-ا^{۲}ب^{۲}+ب^{۴}\}$

$=(ا+ب)(ا^{۲}-اب+ب^{۲})(ا^{۲}-ا^{۲}ب^{۲}+ب^{۴})$

مثال ۲ $ا^{۶}-لا^{۶}$ را بمضروبات تفریق کنید :-

چون $ا^{۲}-ب^{۲}=(ا-ب)(ا^{۲}+اب+ب^{۲})$

لہذا $ا^{۶}-لا^{۶}=(ا^{۳})^{۲}-(لا^{۳})^{۲}$

$=(ا^{۳}-لا^{۳})\{(ا^{۳})^{۲}+(ا^{۳})(لا^{۳})+(لا^{۳})^{۲}\}$

$=(ا^{۳}-لا^{۳})(ا^{۶}+ا^{۳}لا^{۳}+لا^{۶})$

$=(ا-لا)(ا^{۲}+اا+لا^{۲})(ا^{۶}+ا^{۳}لا^{۳}+لا^{۶})$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 185 of 308

مثال ۳ ۶۴ لا^{۶} - لا^{۶} و^{۶} را بمضروبات تفریق کنید

۶۴ لا^{۶} - لا^{۶} و^{۶} = لا^{۶} (۶۴ لا^{۶} - و^{۶})

= لا^{۶} {(۶۴ لا^{۶})^{۲} - (و^{۶})^{۲}}

= لا^{۶} (۶۴ لا^{۶} - و^{۶}) {(۶۴ لا^{۶})^{۲} + (۶۴ لا^{۶}) (و^{۶}) + (و^{۶})^{۲}}

= لا^{۶} (۶۴ لا^{۶} - و^{۶}) (۱۶ لا^{۱۲} + ۶۴ لا^{۶} و^{۶} + و^{۱۲})

= لا^{۶} (۲ لا^{۲} + و^{۲}) (۲ لا^{۲} - و^{۲}) {(۱۶ لا^{۱۲} + ۸ لا^{۶} و^{۶} + و^{۱۲}) - (۶۴ لا^{۶} و^{۶})}

= لا^{۶} (۲ لا^{۲} + و^{۲}) (۲ لا^{۲} - و^{۲}) {(۶۴ لا^{۶} + و^{۶})^{۲} - (۲ لا^{۲} و^{۲})^{۲}}

= لا^{۶} (۲ لا^{۲} + و^{۲}) (۲ لا^{۲} - و^{۲}) (۶۴ لا^{۶} + و^{۶} + ۲ لا^{۲} و^{۲}) (۶۴ لا^{۶} + و^{۶} - ۲ لا^{۲} و^{۲})

بصورت دیگر

۶۴ لا^{۶} - لا^{۶} و^{۶} = لا^{۶} (۶۴ لا^{۶} - و^{۶})

= لا^{۶} (۸ لا^{۳} - و^{۳}) (۸ لا^{۳} + و^{۳})

= لا^{۶} (۲ لا - و) (۴ لا^{۲} + ۲ لا و + و^{۲}) (۲ لا + و) (۴ لا^{۲} - ۲ لا و + و^{۲})

= لا^{۶} (۲ لا - و) (۲ لا + و) (۴ لا^{۲} + ۲ لا و + و^{۲}) (۴ لا^{۲} - ۲ لا و + و^{۲})

امثله (۴۳)

جملهای ذیل را بمضروبات تفریق کنید :-

(۱) أ^{۲} - ۸ ب^{۳} (۲) و^{۳} - ۲۷ لا^{۳} (۳) ۵۱۲ لا^{۹} + ۱ (۴) و^{۹} - ۵۱۲ ب^{۹}

(۵) ۲۷ و^{۶} + ۱۲۵ لا^{۶} (۶) م^{۶} - ن^{۶} (۷) ۳۴۳ لا^{۳} + ۵۱۲ ی^{۳} (۸) ۶۴ لا^{۶} - ۱

(۹) أ^{۶} - ۶۴ لا^{۱۲} (۱۰) ۱۲۵ لا^{۹} - ۲۱۶ و^{۹} (۱۱) ۶۴ و^{۱۲} ب + ۳۴۳ و ت^{۱۳}

(۱۲) ۷۲۹ لا^{۲} ی^{۲} - ۶۴ لا^{۲} ی^{۶} (۱۳) (و^{۲} + ب^{۲})^{۲} + ۸ و^{۲} ب^{۲}

(۱۴) (۲ لا^{۲} - ۳ ی^{۲})^{۲} + ی^{۶} (۱۵) (۲ و^{۲} - ب^{۲})^{۲} - ب^{۶}

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 186 of 308

۷۷ جملہائیکہ شکل لاّ + ط لا + ق دارند بیک نظر بمضروبات تفریق شدہ میتوانند

چون لاّ + (ا + ب) لا + اب = (لا + ا) (لا + ب)

لہذا ظاہر است کہ اگر مضروبات اینچنین جملہ مطلوب باشد کہ شکل لا + ط لا + ق دارد لازم است کہ اینچنین دو مقدار ا و ب را معلوم کنید کہ ا + ب = ط و اب = ق باشد و این ہر دو دائماً بیک نظر معلوم شدہ میتوانند بشرطیکہ ا و ب صحیح و منطق باشند برائے توضیح فقرہ مذکورہ فقرہ ۷۵ ملاحظہ شود

مثال ۱ لا + ۱۷ لا + ۳۰ را بمضروبات تفریق کنید:-

اول دو عدد را معلوم کنید کہ مجموع آنہا = ۱۷ و حاصل ضرب آنہا = ۳۰ باشد و دو عدد کہ حاصل ضرب آنہا ۳۰ میباشد حسب ذیل ہستند:-

(۱) او ۳۰ (۲) ۲ و ۱۵ (۳) ۳ و ۱۰ (۴) ۵ و ۶

از جملہ این چہار قسم آن دو مضروب مطلوبست کہ حاصل جمع آنہا ۱۷ باشد لہذا دو مضروب مطلوب ۲ و ۱۵ میباشد:-

پس لاّ + ۱۷ لا + ۳۰ = (لا + ۲) (لا + ۱۵)

مثال ۲ لاّ - ۱۱ لا + ۲۴ را بمضروبات تفریق کنید:-

درین مثال آن عدد معلوم کردہ شود کہ حاصل ضرب آنہا ۲۴ و مجموع آنہا - ۱۱ باشد پس ظاہر است کہ ہر دو عدد منفی خواہند بود -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 187 of 308

وچون دو عدد منفی که حاصل ضرب آنها ۲۴ میباشد حسب ذیل هستند

(۱) -۱ و -۲۴ (۲) -۲ و -۱۲ (۳) -۳ و -۸ (۴) -۴ و -۶

بنابرین از چهار قسم فوق آن دو منصرف گرفته شود که حاصل جمع آنها -۱۱ باشد

لهذا دو عدد مطلوب -۳ و -۸ است پس لا۲ -۱۱لا +۲۴ = (لا -۳)(لا -۸)

مثال ۳ لا۲ +۶لا -۴۰ را بمضروبات تفریق کنید

درین مثال آن عدد را معلوم کنید که حاصل ضرب آنها -۴۰ و مجموع آنها +۶ باشد

وچون آن دو عدد که حاصل ضرب آنها -۴۰ میباشد بقرار ذیل میباشد

(۱) ۱ و -۴۰ (۲) -۱ و ۴۰ (۳) ۲ و -۲۰ (۴) -۲ و ۲۰

(۵) ۴ و -۱۰ (۶) -۴ و ۱۰ (۷) ۵ و -۸ (۸) -۵ و ۸

بنابرین از هشت قسم فوق آن دو عدد مطلوبست که مجموع آنها +۶ باشد

لا۲ +۶لا -۴۰ = (لا -۴)(لا +۱۰)

تنبیه چون مجموع دو عدد مطلوب مثبت است ظاهر است که عدد مثبت

از عدد منفی زیاده تر خواهد بود لهذا قسم اول و سوم و پنجم و هفتم بیک نظر ترک میشوند

مثال ۴ لا۲ -۵لا -۳۶ را بمضروبات تفریق کنید

درین مثال آن دو عدد را دریافت کنید که حاصل ضرب آنها -۳۶ و مجموع آنها

-۵ باشد پس ظاهر است که اعداد مطلوب مختلف الاشاره و عدد منفی

از عدد مثبت زیاده تر خواهد بود -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 188 of 308

پس دو عدد مطلوب سے یکے از اقسام ذیل میباشند :-

(۱) ۱ و-۳۶ (۲) ۲ و-۱۸ (۳) ۳ و-۱۲ (۴) ۴ و-۹

از اقسام فوق آن دو عدد مطلوبست کہ مجموع آنہا -۵ باشد لہذا دو عدد مطلوب ۴ و-۹ ست پس لا^{۲}-۵لا-۳۶ = (لا+۴)(لا-۹)

مثال ۵ ا^{۲}+۷اب+۱۲ب^{۲} را بمضروبات تفریق کنید

ظاہر است کہ مضروبات مطلوب ا+ط ب و ا+ق ب میباشند بشرط اینکہ ط+ق = ۷ وطق = ۱۲ پس بقرار امثلہ فوق ۳ و ۴ انچنین اعداد میباشند کہ مجموع آنہا ۷ است وحاصل ضرب آنہا ۱۲

لہذا ا^{۲}+۷اب+۱۲ب^{۲} = (ا+۳ب)(ا+۴ب)

مثال ۶ م^{۲}-۱۲مں+۲۰ں^{۲} را بمضروبات تفریق کنید

آن دو عدد را معلوم کنید کہ مجموع آنہا = -۱۲ وحاصل ضرب آنہا ۲۰ باشد

پس حسب دلائل امثلہ فوق -۱۰ و -۲ اعداد مطلوب ہستند

لہذا م^{۲}-۱۲مں+۲۰ں^{۲} = (م-۱۰ں)(م-۲ں)

مثال ۷ ا^{۴}-ا^{۲}-۱۲ را بمضروبات تفریق کنید

فرض کنید کہ لا = ا^{۲} ∴ جملہ فوق = لا^{۲}-لا-۱۲

پس ظاہر است کہ (لا^{۲}-لا-۱۲) = (لا-۴)(لا+۳)

ا^{۴}-ا^{۲}-۱۲ = (ا^{۲}-۴)(ا^{۲}+۳)

= (ا+۲)(ا-۲)(ا^{۲}+۳)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 189 of 308

مثال ۸ $(لا^2+۲لا)^2-۳(لا^2+۲لا)-۱۸$ را بمضروبات تفریق کنید

فرض کنید کہ $ا = لا^2+۲لا$ ∴ جملہ فوق $= ا^2-۳ا-۱۸$

ونیز ظاہر است کہ $ا^2-۳ا-۱۸ = (ا-۶)(ا+۳)$

لہذا جملہ مفروضہ $= \{(لا^2+۲لا)-۶\}\{(لا^2+۲لا)+۳\}$

$= (لا^2+۲لا-۶)(لا^2+۲لا+۳)$

مثال ۹ $(۵ا+ب)^2+(۵ا+ب)(ا+۲ب)-۲۰(ا+۲ب)^2$ را بمضروبات تفریق کنید

فرض کنید کہ $لا = ۵ا+ب$ و $ی = ا+۲ب$ ∴ جملہ فوق $= لا^2+لای-۲۰ی^2$

لیکن ظاہر است کہ $لا^2+لای-۲۰ی^2 = (لا+۵ی)(لا-۴ی)$

لہذا جملہ مفروضہ $= \{(۵ا+ب)+۵(ا+۲ب)\}\{(۵ا+ب)-۴(ا+۲ب)\}$

$= (۱۰ا+۱۱ب)(ا-۷ب)$

مثال ۱۰ $۸لا^2+۲لا-۳$ را بمضروبات تفریق کنید:-

$۸لا^2+۲لا-۳ = \frac{۱}{۸}(۸\times۸لا^2+۲\times۸لا-۳\times۸)$

$= \frac{۱}{۸}(آ^2+۲آ-۲۴)$ [بشرطانیکہ $آ = ۸لا$]

وچون $(آ^2+۲آ-۲۴) = (آ+۶)(آ-۴)$

لہذا جملہ مفروضہ $= \frac{۱}{۸}(آ+۶)(آ-۴)$

$= \frac{۱}{۸}(۸لا+۶)(۸لا-۴)$

$= \frac{۱}{۸}\{۲(۴لا+۳)\times۴(۲لا-۱)\}$

$= (۴لا+۳)(۲لا-۱)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 190 of 308

مثال ۱۱ $۱۲لا^۲+۷لا-۱۰$ را بمضروبات تفریق کنید۔

$۱۲لا^۲+۷لا-۱۰ = \frac{۱}{۱۲}(۱۲\times ۱۲لا^۲+۷\times ۱۲لا-۱۰\times ۱۲)$

$= \frac{۱}{۱۲}(و^۲+۷و-۱۲۰)$ [بشرطیکہ $و=۱۲لا$]

وچون $و^۲+۷و-۱۲۰=(و+۱۵)(و-۸)$

لہذا جملہ مفروضہ $= \frac{۱}{۱۲}(۱۲لا+۱۵)(۱۲لا-۸)$

$= \frac{۱}{۱۲}\{۳(۴لا+۵)\times ۴(۳لا-۲)\}$

$=(۴لا+۵)(۳لا-۲)$

مسئلہ (۴۴)

جملہائے ذیل را بمضروبات تفریق کنید:۔

(۱) $لا^۲+۴لا+۳$	(۲) $لا^۲+۵لا+۶$	(۳) $لا^۲+۷لا+۱۲$
(۴) $لا^۲+۹لا+۲۰$	(۵) $لا^۲+۹لا+۱۸$	(۶) $لا^۲+۱۱لا+۲۸$
(۷) $لا^۲-۱۰لا+۲۴$	(۸) $لا^۲-۸لا+۱۵$	(۹) $لا^۲-۱۱لا+۳۰$
(۱۰) $لا^۲-۱۲لا+۳۲$	(۱۱) $لا^۲-۱۴لا+۴۴$	(۱۲) $لا^۲-۲۲لا+۴۰$
(۱۳) $لا^۲+۷لا-۳۰$	(۱۴) $لا^۲+۲لا-۴۸$	(۱۵) $لا^۲+۱۶لا-۳۶$
(۱۶) $لا^۲+۹لا-۳۶$	(۱۷) $لا^۲+۱۱لا-۴۲$	(۱۸) $لا^۲+۱۴لا-۷۲$
(۱۹) $لا^۲-۳لا-۴۰$	(۲۰) $لا^۲-۱۱لا-۸۰$	(۲۱) $لا^۲-۲۹لا-۹۶$
(۲۲) $لا^۲-۱۰لا-۵۶$	(۲۳) $لا^۲-لا-۴۲$	(۲۴) $لا^۲-لا-۷۲$
(۲۵) $لا^۲+۲۲لا+۱۲۰$	(۲۶) $لا^۲+۱۶لا-۸۰$	(۲۷) $لا^۲-۲۱لا-۷۲$
(۲۸) $لا^۲+۵لا-۸۴$	(۲۹) $لا^۲-۲۰لا+۹۶$	(۳۰) $لا^۲+۲۳لا-۷۸$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 191 of 308

(٣١) لا^{٢} - ٦ لا - ٢٧ (٣٢) لا^{٢} - ٢٥ لا + ١٨٤ (٣٣) لا^{٢} - ٢٦ لا + ٨٨

(٣٤) لا^{٢} + ٧ لا - ١٢٠٠ (٣٥) لا^{٢} - ٢ لا - ٨٠٠ (٣٦) لا^{٢} + ٨ لا - ٨٤

(٣٧) و^{٢} - و - ٥٦ (٣٨) م^{٢} - ٩ م - ٩٠٠ (٣٩) و^{٢} + ١٧ و - ٦٠٠

(٤٠) و^{٢} - ١٥ و + ٥٤ (٤١) ط^{٢} - ٢٢ ط - ٨٨ (٤٢) م^{٢} + م - ٢٧

(٤٣) م^{٢} + ٢٧ م - ٩٠٠ (٤٤) و^{٢} - ٢٩ و + ١٢٠٠ (٤٥) لا^{٢} + ٧ لا - ٧٨

(٤٦) و^{٢} - ٩٣ و - ١٠٢ (٤٧) و^{٢} - ١٩ و + ٦٠٠ (٤٨) لا^{٢} + ١٢ لا - ٦٤

(٤٩) و^{٢} - ٢٦ و - ١٢٠٠ (٥٠) لا^{٢} + ٨ لا - ١٠٥ (٥١) لا^{٢} - لا ى - ٤٢ ى^{٢}

(٥٢) و^{٢} - ١٢ و ب + ٣٢ ب^{٢} (٥٣) م^{٢} + م ن - ٣٠ ن^{٢} (٥٤) و^{٢} + و ب - ١٢ ب^{٢}

(٥٥) و^{٢} - ٢ و ب - ١٥ ب^{٢} (٥٦) لا^{٢} - ٧ لا ى - ٨ ى^{٢} (٥٧) لا^{٢} + ٣ لا ى - ٤٠ ى^{٢}

(٥٨) ط^{٢} - ١٤ ط ق + ٨٤ ق^{٢} (٥٩) ط^{٢} + ٢ ط ق - ٨٠ ق^{٢} (٦٠) لا^{٢} + ٢٠ لا ى - ٩٦ ى^{٢}

(٦١) و^{٢} + ٤ و^{٢} - ٥ (٦٢) لا^{٢} + ٢ لا^{٢} - ١٥ (٦٣) لا^{٢} + ٣ لا^{٢} - ٢٨

(٦٤) لا^{٤} + ٢ لا^{٢} - ٣ (٦٥) و^{٤} - ١٠ و^{٢} + ١٦ (٦٦) لا^{٤} + ٢٦ لا^{٢} - ٢٧

(٦٧) و^{٦} + ٧ و^{٣} - ٨ (٦٨) لا^{٦} - ٢٠ لا^{٤} + ٦٤ (٦٩) و^{٦} - ١١ و^{٣} - ٨٠

(٧٠) لا^{١٠} - ٧ لا^{٥} - ٨ (٧١) (و^{٢} + ٢ و)^{٣} - (و^{٢} + ٢ و) - ٢

(٧٢) (لا^{٢} + ٣ لا)^{٢} + ٣ (لا^{٢} + ٣ لا) + ٢ (٧٣) (لا^{٢} - ٢ لا)^{٣} - ٢ (لا^{٢} - ٢ لا) - ٣

(٧٤) (و^{٢} - ٣ و)^{٣} - ٣ (و^{٢} - ٣ و) - ٤ (٧٥) (لا^{٢} - ٢ لا)^{٣} - ٤ (لا^{٢} - ٢ لا) - ٥

(٧٦) (لا^{٢} - لا)^{٣} - ٨ (لا^{٢} - لا) + ١٢ (٧٧) (لا^{٢} - ٥ لا)^{٣} + ١٠ (لا^{٢} - ٥ لا) + ٢٤

(٧٨) (و^{٢} + ٧ و)^{٣} - ٨ (و^{٢} + ٧ و) - ١٨٠ (٧٩) (و^{٢} + ٦ و)^{٣} - ٣٢ (و^{٢} + ٦ و) - ٣٢٠

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 192 of 308

(۸۰) $(لا^2-۸لا)^2-۲۹(لا^2-۸لا)+۱۸۰$

(۸۱) $(۳لا+۴ی)^2+(۳لا+۴ی)(لا+۲ی)-۲(لا+۲ی)^2$

(۸۲) $(۲ا-۵ب)^2+۲(۲ا-۵ب)(ا+۲ب)-۳(ا+۲ب)^2$

(۸۳) $(۴م-۳ن)^2+۳(۴م-۳ن)(م+۵ن)-۴(م+۵ن)^2$

(۸۴) $(۵ا+۳ب)^2+۴(۵ا+۳ب)(ا+ب)-۵(ا+ب)^2$

(۸۵) $(۵لا+۷ی)^2-۲(۵لا+۷ی)(لا-ی)-۸(لا-ی)^2$

(۸۶) $(۷ا+۳ب)^2-۳(۷ا+۳ب)(ا-۴ب)-۱۰(ا-۴ب)^2$

(۸۷) $(۹ا-۴ب)^2-۵(۹ا-۴ب)(ا-۳ب)-۶(ا-۳ب)^2$

(۸۸) $(۲م^2+۳ن^2)^2+۵(۲م^2+۳ن^2)(م^2-۲ن^2)-۱۴(م^2-۲ن^2)^2$

(۸۹) $(لا^2+۶لای)^2-۳(لا^2+۶لای)(لای-۶ی^2)+۲(لای-۶ی^2)^2$

(۹۰) $(ا^2-۵اب)^2-۹(ا^2-۵اب)(اب-۴ب^2)+۱۸(اب-۴ب^2)^2$

(۹۱) $۲لا^2+لا-۱۵$ (۹۲) $۶ا^2-ا-۱۵$ (۹۳) $۸م^2-۶م-۹$

(۹۴) $۶لا^2+۷لای-۲۴ی^2$ (۹۵) $۱۰ا^2-۴۱اب+۲۱ب^2$ (۹۶) $۱۲م^2-مn-۲۰n^2$

(۹۷) $۱۲لا^2+۲۸لای-۵ی^2$ (۹۸) $۲۰ا^2+اب-۳۰ب^2$

(۹۹) $۱۸لا^2-۵۱لای+۳۵ی^2$ (۱۰۰) $۲لا^2+۲۳لای-۲۴ی^2$

۷۸ طریق دریافت نمودن مضروبات جملهٔ $لا^2+طلا+ق$ بقاعدهٔ تفاضل دو مربع تام

توضیح مثال فوق بقرار ذیل است :-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 193 of 308

مثال ۱ $لا^2 - ۷لا + ۱۲$ را بمضروبات تفریق کنید:-

$لا^2 - ۷لا + ۱۲ = لا^2 - ۷لا + (\frac{۷}{۲})^2 - (\frac{۷}{۲})^2 + ۱۲$ [از جمع و تفریق $(\frac{۷}{۲})^2$]

$= \{لا^2 - ۷لا + (\frac{۷}{۲})^2\} - (\frac{۴۹}{۴} - ۱۲)$

$= (لا - \frac{۷}{۲})^2 - \frac{۱}{۴}$

$= \{(لا - \frac{۷}{۲}) + \frac{۱}{۲}\} \{(لا - \frac{۷}{۲}) - \frac{۱}{۲}\}$

$= (لا - ۳)(لا - ۴)$

تنبیه باید دانست که برائے حصول مربع تام با $لا^2 - ۷لا$ مربع نصف ۷ (یعنے نصف امثال لا) جمع شدہ است - و این قاعدہ عمومی میباشد که اگر با $لا^2 + ۲لا$ مربع ۱ جمع شود جملہ مذکور مربع تام میگردد-

مثال ۲ $۲لا^2 + ۲لای - ۸ی^2 - ۴ع^2 + ۱۲ای ع$ را بمضروبات تفریق کنید

جملہ مفروضہ $= (لا^2 + ۲لای + ی^2) - (۹ی^2 + ۴ع^2 - ۱۲ای ع)$

$= (لا + ی)^2 - (۳ی - ۲ع)^2$

$= \{(لا + ی) + (۳ی - ۲ع)\}\{(لا + ی) - (۳ی - ۲ع)\}$

$= (لا + ۴ی - ۲ع)(لا - ۲ی + ۲ع)$

مثال ۳ $۳لا^2 + ۱۱لا - ۴$ را بمضروبات تفریق کنید:-

$۳لا^2 + ۱۱لا - ۴ = ۳(لا^2 + \frac{۱۱}{۳}لا - \frac{۴}{۳})$

$= ۳\{لا^2 + \frac{۱۱}{۳}لا + (\frac{۱۱}{۶})^2 - (\frac{۱۱}{۶})^2 - \frac{۴}{۳}\}$

$= ۳\{(لا + \frac{۱۱}{۶})^2 - (\frac{۱۲۱}{۳۶} + \frac{۴}{۳})\}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 194 of 308

$$= ۳\left\{\frac{۱۶۹}{۳۶} - \left(\frac{۱۱}{۶} + لا\right)^۲\right\}$$

$$= ۳\left\{\left(\frac{۱۳}{۶} + \frac{۱۱}{۶} + لا\right)\left\{\frac{۱۳}{۶} - \left(\frac{۱۱}{۶} + لا\right)\right\}\right\}$$

$$= ۳(لا+۴)(لا-\frac{۱}{۳}) = (لا+۴)(۳لا-۱)$$

مثال ۴ $۸لا^۲ - ۱۰لا + ۳$ را بمضروبات تفریق کنید

$$۸لا^۲ - ۱۰لا + ۳ = ۸\left\{لا^۲ - \frac{۱۰}{۸}لا + \frac{۳}{۸}\right\}$$

$$= ۸\left\{لا^۲ - ۲\left(\frac{۵}{۸}\right)لا + \left(\frac{۵}{۸}\right)^۲ - \left(\frac{۵}{۸}\right)^۲ + \frac{۳}{۸}\right\}$$

$$= ۸\left\{\left(لا - \frac{۵}{۸}\right)^۲ - \left(\frac{۳}{۸} - \frac{۲۵}{۶۴}\right)\right\}$$

$$= ۸\left\{\left(لا - \frac{۵}{۸}\right)^۲ - \left(\frac{۱}{۸}\right)^۲\right\}$$

$$= ۸\left\{\left(لا - \frac{۵}{۸}\right) + \frac{۱}{۸}\right\}\left\{\left(لا - \frac{۵}{۸}\right) - \frac{۱}{۸}\right\}$$

$$= ۸\left\{(لا - \frac{۱}{۲})(لا - \frac{۳}{۴})\right\}$$

$$= (۲لا-۱)(۴لا-۳)$$

مثال ۵ $۲ا^۲ + ۵اب - ۱۲ب^۲$ را بمضروبات تفریق کنید

$$۲ا^۲ + ۵اب - ۱۲ب^۲ = ۲(ا^۲ + \frac{۵}{۴}اب - ۶ب^۲)$$

$$= ۲\left\{ا^۲ + \frac{۵}{۴}اب + \left(\frac{۵ب}{۸}\right)^۲ - \left(\frac{۲۵ب^۲}{۶۴} + ۶ب^۲\right)\right\}$$

$$= ۲\left\{(ا + \frac{۵}{۸}ب)^۲ - \frac{۱۲۱}{۶۴}ب^۲\right\}$$

$$= ۲\left\{(ا + \frac{۵}{۸}ب) + \frac{۱۱}{۸}ب\right\}\left\{(ا + \frac{۵}{۸}ب) - \frac{۱۱}{۸}ب\right\}$$

$$= ۲(ا + ۴ب)(ا - \frac{۳ب}{۸})$$

$$= (ا+۴ب)(۲ا-۳ب)$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 195 of 308

مثال ۶ $ولا^2+(ؤ^2+1)لا+و$ را بمضروبات تفریق کنید

$$ولا^2+(ؤ^2+1)لا+و=و\left\{لا^2+\frac{ؤ^2+1}{و}لا+1\right\}$$

$$=و\left\{لا^2+\frac{ؤ^2+1}{و}لا+\left(\frac{ؤ^2+1}{2و}\right)^2-\left(\frac{ؤ^2+2ؤ^2+1}{4و^2}-1\right)\right\}$$

$$=و\left\{\left(لا+\frac{ؤ^2+1}{2و}\right)^2-\frac{ؤ^4-2ؤ^2+1}{4و^2}\right\}$$

$$=و\left\{لا+\frac{ؤ^2+1}{2و}+\frac{ؤ^2-1}{2و}\right\}\left\{لا+\frac{ؤ^2+1}{2و}-\frac{ؤ^2-1}{2و}\right\}$$

$$=و\left\{لا+و\right\}\left\{\frac{1}{و}+لا\right\}$$

$$=(لا+و)(ولا+1)$$

و بطریق فوق اینهم ثابت شده میتواند که

$$ولا^2-(ؤ^2+1)لا+و=(لا-و)(ولا-1)$$

$$ولا^2+(ؤ^2-1)لا-و=(لا+و)(ولا-1)$$

$$ولا^2-(ؤ^2-1)لا-و=(لا-و)(ولا+1)$$

مثال ۷ $4(لا^2+2لا+5)^2+17(لا^2+2لا+5)(لا^2+6لا)+4(لا^2+6لا)^2$ را بمضروبات تفریق کنید

فرض کنید که $ا=لا^2+2لا+5$ و $ب=لا^2+6لا$

پس جملهٔ مفروضه $=4ا^2+17اب+4ب^2$

و چون $4ا^2+17اب+4ب^2=(ا+4ب)(4ا+ب)$ [بقرار قاعده فوق

لهذا جملهٔ مفروضه $=\{(لا^2+2لا+5)+4(لا^2+6لا)\}\{4(لا^2+2لا+5)+(لا^2+6لا)\}$

$$=(5لا^2+26لا+5)(5لا^2+14لا+20)$$

$$=(لا+5)(5لا+1)(5لا^2+14لا+20)$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 196 of 308

مسئلہ (۴۵)

بموجب قاعدہ فقرۂ فوق جملہائے ذیل را بمضروبات تفریق کنید

(۱) $لا^2+۴لا+۳$ (۲) $لا^2+۶لا+۵$ (۳) $لا^2+۸لا+۱۵$

(۴) $لا^2-۱۰لا+۲۱$ (۵) $لا^2-۲لا-۴۸$ (۶) $لا^2-۴لا-۴۵$

(۷) $لا^2-۱۲لا+۳۲$ (۸) $لا^2-۶لا-۵۵$ (۹) $و^2+۲وب-ج^2+۲بج$

(۱۰) $لا^2+۲لا-ی^2+۲ی$ (۱۱) $لا^2+۶لا-ی^2+۴ی+۵$

(۱۲) $و^2+۴وب-۵ب^2-ج^2+۶بج$ (۱۳) $لا^2-۶لای+۵ی^2-ع^2+۴ی ع$

(۱۴) $لا^2-۱۰لای+۱۶ی^2-۴ع^2+۱۲ی ع$ (۱۵) $و^2-۱۲وب-۱۳ب^2-ج^2+۴۲بج$

(۱۶) $لا^2+۱۲لای-۹ع^2+۳۶ی ع$ (۱۷) $لا^2-۱۴لای-۱۵ی^2-۲۵ع^2+۸۰ی ع$

(۱۸) $۲لا^2-۵لا-۳$ (۱۹) $۳لا^2-۵لا-۲$ (۲۰) $۳لا^2+۱۴لا+۸$

(۲۱) $۴لا^2+۷لا-۲$ (۲۲) $۶لا^2+لا-۲$ (۲۳) $۶لا^2-۵لا-۴$

(۲۴) $۶لا^2+۷لا-۳$ (۲۵) $۸لا^2+۲لا-۱۵$ (۲۶) $۴لا^2+۴لا-۳۵$

(۲۷) $۶لا^2-لا-۱۲$ (۲۸) $۳لا^2-۱۶لا+۱۲$ (۲۹) $۲لا^2-۹لا-۳۵$

(۳۰) $۲لا^2+۵لا-۴۲$ (۳۱) $۳لا^2+۱۳لا-۳۰$ (۳۲) $۱۲لا^2+لا-۶$

(۳۳) $۲و^2+۷وب-۱۵ب^2$ (۳۴) $۶لا^2-۱۳لای+۶ی^2$ (۳۵) $۶م^2-۱۱امن-۱۰ن^2$

(۳۶) $۳ط^2+۵طق-۱۲ق^2$ (۳۷) $۸و^2-۱۴وب-۱۵ب^2$ (۳۸) $۱۰م^2+۱۱امن-۶ن^2$

(۳۹) $۱۲لا^2+۱۳لای-۴ی^2$ (۴۰) $۱۵و^2-۱۱وب-۱۲ب^2$ (۴۱) $۲و^2-۵وب+۲ب^2$

(۴۲) $۳و^2-۸وب-۳ب^2$ (۴۳) $۳لا^2+۸لای-۳ی^2$ (۴۴) $۴و^2+۱۵وز-۴$

(۴۵) $۴و^2-۱۷وب+۴ب^2$ (۴۶) $۵لا^2-۲۴لا-۵$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 197 of 308

(۴۷) ۵لا^{۲} - ۲۶لای + ۵ی^{۲} (۴۸) ۶لا^{۲} + ۳۷لا + ۶ (۴۹) ۶ا^{۲} + ۳۵اب - ۶ب^{۲}

(۵۰) ۶ا^{۲} - ۳۵اب - ۶ب^{۲} (۵۱) ۷ا^{۲} - ۵۰اب + ۷ب^{۲} (۵۲) ۷ا^{۲} + ۴۸اب - ۷ب^{۲}

(۵۳) ۷ا^{۲} - ۴۸اب - ۷ب^{۲} (۵۴) ۸لا^{۲} + ۶۳لای - ۸ی^{۲} (۵۵) ۹لا^{۲} - ۸۲لای + ۹ی^{۲}

(۵۶) ۱۰لا^{۲} + ۹۹لای - ۱۰ی^{۲} (۵۷) ۲(ا + ب)^{۲} + ۳(ا + ب) - ۲

(۵۸) ۴(لا^{۲} + ی^{۲})^{۲} - ۳لای (لا^{۲} + ی^{۲}) - ۲لا^{۲}ی^{۲}

(۵۹) ۲(ا^{۲} + ب^{۲})^{۲} + ۵اب (ا^{۲} + ب^{۲}) + ۲ا^{۲}ب^{۲}

(۶۰) ۴(لا^{۲} - ۴لای + ی^{۲})^{۲} + ۵لای (لا^{۲} - ۴لای + ی^{۲}) - ۴لا^{۲}ی^{۲}

(۶۱) ۲لا^{۲} - ۵لا^{۲} - ۱۲ (۶۲) ۸ا^{۲} - ۱۴ا^{۲}ب^{۲} - ۹ب^{۴} (۶۳) ۹ا^{۲} + ۲ا^{۲}ب^{۲} - ۳۲ب^{۴}

(۶۴) ۸لا^{۲} - ۶۵لا^{۲} + ۸ (۶۵) ۴ا^{۲} - ۱۷ا^{۲}ب^{۲} + ۴ب^{۴}

۷۹ طریق معلوم نمودن مضروبات جملہائے جبریہ بقرار ترتیب حدود

مضروبات بعض جملہ بذریعہ ترتیب حدود معلوم میشود مگر برای معلوم نمودن مضروبات جملہای دیگر قاعدہ معینہ نمیباشد۔

لہذا چند مثال برائے افادہ طلبہ نوشتہ شدند تا در معلوم کردن مضروبات جملہا برائے ایشان سہولت حاصل شود مگر تعیین قاعدہ مقررہ در بنیاد شواہد

مثال ۱ (۳لا^{۲} - ۴ب^{۲}) ا + (۳ا^{۲} - ۴لا) ب را مضروبات تفریق کنید

جملہ مفروضہ = ۳لا^{۲}ا - ۴ب^{۲}ا + ۳ا^{۲}ب - ۴لا^{۲}ب

= (۳لا^{۲}ا + ۳ا^{۲}ب) - (۴ب^{۲}ا + ۴لا^{۲}ب)

= ۳ا (لا^{۲} + اب) - ۴ب (اب + لا^{۲})

= (لا^{۲} + اب) (۳ا - ۴ب)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 198 of 308

مثال ۲ $لا^۲ + لای - ی ع^۲ - ع^۲$ را بمضروبات تفریق کنید

حد چهارم با حد اول و حد دوم با حد سوم گرفته شود۔

لہذا $لا^۲ + لای - ی ع^۲ - ع^۲ = (لا^۲ - ع^۲) + (لای - ی ع^۲)$

$= (لا^۲ + ع^۲)(لا^۲ - ع^۲) + ی (لا^۲ - ع^۲)$

$= (لا^۲ - ع^۲)\{لا^۲ + ع^۲ + ی\}$

$= (لا + ع)(لا - ع)\{لا^۲ + ع^۲ + ی\}$

مثال ۳ $لا^۳ + ۷ لا^۲ - ۲۱ لا - ۲۷$ را بمضروبات تفریق کنید

جملۂ مفروضہ $= (لا^۳ - ۲۷) + (۷ لا^۲ - ۲۱ لا)$

$= (لا - ۳)(لا^۲ + ۳ لا + ۹) + ۷ لا (لا - ۳)$

$= (لا - ۳)\{لا^۲ + ۳ لا + ۹ + ۷ لا\}$

$= (لا - ۳)\{لا^۲ + ۱۰ لا + ۹\}$

$= (لا - ۳)(لا + ۱)(لا + ۹)$

مثال ۴ $۴ ا^۲ + ۱۲ اب + ۹ ب^۲ - ۸ ا - ۱۲ اب$ را بمضروبات تفریق کنید

جملۂ مفروضہ $= (۴ لا^۲ + ۱۲ اب + ۹ ب^۲) - (۸ ا + ۱۲ اب)$

$= (۲ ا + ۳ ب)^۲ - ۴ (۲ ا + ۳ ب)$

$= (۲ ا + ۳ ب)\{(۲ ا + ۳ ب) - ۴\}$

$= (۳ ا + ۳ ب)(۲ ا + ۳ ب - ۴)$

مثال ۵ $۲ ا^۲ - ۲ ب ج + ۶ ب^۲ + ا ج - ۷ اب$ را بمضروبات تفریق کنید

ظاہر است کہ حد اول و سوم و پنجم بلحاظ او ب حدود درجۂ دوم میباشند و دوم و چہارم بلحاظ حروف مذکور حدود درجۂ اول لہذا اگر سہ حد اول ایکجا و دو حد دوم را یکجا بنویسیم

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 199 of 308

جملہ مفروضہ $= (۲ا^۲ - ۷ا ب + ۶ ب^۲) + ج (ا - ۲ ب)$

$= (ا - ۲ ب)(۲ ا - ۳ ب) + ج (ا - ۲ ب)$

$= (ا - ۲ ب)(۲ ا - ۳ ب + ج)$

مثال ۶ $لا^۲ - ی^۲ - ع^۲ + ۲ ی ع + لا + ی - ع$ را بمضروبات تفریق کنید

جملہ مفروضہ $= (لا^۲ - ی^۲ - ع^۲ + ۲ ی ع) + (لا + ی - ع)$

$= \{لا^۲ - (ی - ع)^۲\} + (لا + ی - ع)$

$= (لا + ی - ع)(لا - ی + ع) + (لا + ی - ع)$

$= (لا + ی - ع)\{لا - ی + ع + ۱\}$

مثال ۷ $و^۲ لا^۲ + و^۲ - ۲ ا ب لا^۲ + ب^۲ لا^۲ + آ ب^۲ - ۲ و^۲ آ ب$ را بمضروبات تفریق کنید

ظاہر است کہ در حد اول و سوم و چہارم $لا^۲ و^۲$ و در حد دوم و باقیماندہ $و^۲ آ$ مشترک میباشد

لہذا جملہ مفروضہ $= (و^۲ لا^۲ - ۲ ا ب لا^۲ + ب^۲ لا^۲) + (و^۲ + و^۲ آ ب^۲ - ۲ و^۲ آ ب)$

$= لا^۲ (و^۲ - ۲ ا ب + ب^۲) + و^۲ (آ^۲ + ب^۲ - ۲ ا ب)$

$= (و^۲ - ۲ ا ب + ب^۲)(لا^۲ + و^۲)$

$= (ا - ب)^۲ (لا + و)(لا^۲ - لا و + و^۲)$

مثال ۸ $(ا + ب + ج)(ا ب + ب ج + ج ا) - ا ب ج$ را بمضروبات تفریق کنید

جملہائے داخل خطوط قوسی را بقرار قولے و ترتیب بدہید۔

لہذا جملہ مفروضہ $= \{ا + (ب + ج)\}\{ا (ب + ج) + ب ج\} - ا ب ج$

$= آ (ب + ج) + ا (ب + ج)^۲ + ب ج (ب + ج)$

$= (ب + ج)\{آ + ا (ب + ج) + ب ج\} = (ب + ج)(ا + ب)(ا + ج)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 200 of 308

مثال ۹ $آ^۲(ب-ج)+ب^۲(ج-ا)+ج^۲(ا-ب)$ را مضروبات تفریق کنید

$آ^۲(ب-ج)+ب^۲(ج-ا)+ج^۲(ا-ب)$

$=آ^۲(ب-ج)+ا(ب^۲-ج^۲)+بج(ب-ج)$ [ترتیب جملے بلحاظ قوائے آ]

$=(ب-ج)\{آ^۲-ا(ب+ج)+بج\}$

$=(ب-ج)\{-ب^۲(ا-ج)-بج(ا-ج)+ا(آ^۲-ج^۲)\}$ ..... [ترتیب جملے بلحاظ قوائے ب]

$=(ب-ج)(ا-ج)\{-ب^۲-بج+ا(ا+ج)\}$

$=(ب-ج)(ا-ج)\{ج(ا-ب)+(آ^۲-ب^۲)\}$ ..... [ترتیب جملے بلحاظ قوائے ج]

$=(ب-ج)(ا-ج)(ا-ب)(ج+ا+ب)$

تنبیہ باید دانست کہ

(۱) بمجرد ترتیب جملہ بلحاظ قوائے ایک مضروب $ب-ج$ فوراً ظاہر میشود

(۲) بمجرد ترتیب جملہ کہ در خطوط قوسی کلان است مضروب دیگر $ا-ج$ ظاہر میشود

(۳) بمجرد ترتیب جملہ کہ در خطوط قوسی کلان باقی میماند یک مضروب دیگر یعنی $ا-ب$ ظاہر میشود

و در جملہ مفروضہ ترتیب حروف ا و ب و ج ہم ملاحظہ شود چنانچہ ظاہر است کہ اگر حد اول یعنی ا و ب و ج را بحروف ب و ج و ا تبدیل دہیم حد دوم پیدا میشود و ہمچنین اگر حروف حد دوم یعنی ب و ج و ا را بحروف ج و ا و ب تبدیل دہیم حد سوم پیدا میشود لہذا این ترتیب حروف را ترتیب مدور میگویند۔

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 201 of 308

امثلہ (۴۶)

جملہائے ذیل را بمضروبات تفریق کنید:-

(۱) $لا^۲ + لا^۲ + لا + ۱$ (۲) $لا^۲ + لا^۲ - لا - ۱$ (۳) $لا^۲ - لا^۲ - لا + ۱$

(۴) $ب ج (و^۲ + ۱) + و (ب^۲ + ج^۲)$ (۵) $لا^۲ - و ب^۲ + لا ب^۲ - لا^۲ و$

(۶) $و ب (لا^۲ + ی^۲) + لا ی (و^۲ + ب^۲)$ (۷) $لا^۲ + لا ی - ی ع - ع^۲$

(۸) $لا ب - و ج - لا ج + و ب$ (۹) $(۲ لا^۲ + ۳ ب^۲) و - (۲ و^۲ + ۳ لا^۲) ب$

(۱۰) $و (و + ج) - ب (ب + ج)$ (۱۱) $۴ و^۲ + ۸ و ج - ۱۲ ب ج - ۹ ب^۲$

(۱۲) $و^۲ لا^۲ + و ج لا ع - ب^۲ ی^۲ - ب ج ی ع$ (۱۳) $لا^۲ - ی^۲ ع^۲ + ی^۲ لا^۲ - ی^۲ ع^۲$

(۱۴) $۱۶ لا^۲ - ۱۵ و^۲ ب + ۱۲ و ب لا - ۲۵ و^۲$ (۱۵) $و^۲ (و + ۲ ب) + ب^۲ (۲ و + ب)$

(۱۶) $م^۲ - ۲ م^۲ ن + ۲ م ن^۲ - ن^۳$ (۱۷) $و^۲ + ۲ و^۲ ب - ۲ و ب^۲ - ب^۳$

(۱۸) $لا^۲ (لا - ۲ ی) + ی^۲ (۲ لا - ی)$ (۱۹) $و^۲ + ۵ و^۲ + ۱۰ و + ۸$

(۲۰) $لا^۲ - ۱۷ لا^۲ + ۸۵ لا - ۱۲۵$ (۲۱) $۸ و^۲ + ۱۸ و^۲ ب - ۲۷ و ب^۲ - ۲۷ ب^۳$

(۲۲) $لا^۲ - ۲ لا ی + ی^۲ - لا + ی$ (۲۳) $۴ و^۲ - ۴ و ب + ب^۲ - ۶ و + ۳ ب$

(۲۴) $لا^۲ - ۲ و لا^۲ + ۲ و^۲ لا^۲ - ۲ و^۳ لا + و^۴$ (۲۵) $و^۲ - ۳ و^۲ ب + ۴ و ب^۲ - ۶ و ب^۳ + ۴ ب^۴$

(۲۶) $و^۲ + ۳ و ب + ۲ ب^۲ + و ج + ۳ ب ج$ (۲۷) $لا^۲ - ۴ لا ی + ۳ ی^۲ + لا ع - ۳ ی ع$

(۲۸) $م^۲ + ۲ ط م - ۵ م ن - ۴ ط ن + ۶ ن^۲$ (۲۹) $و^۲ - ۱۰ و ب - ۱۵ ب ج + ۲۱ ب^۲ + ۵ و ج$

(۳۰) $۲ لا^۲ + ۴ و (۴ ب - ۳ و) + لا (۴ ب + ۵ و)$ (۳۱) $و^۲ - ۳ و (۲ ب - ۱) + ۴ ب (۲ ب - ۳)$

(۳۲) $۳ لا (لا + ۲) - ۲ ی (۴ لا - ۱) - ۳ ی^۲$ (۳۳) $و^۲ - ب^۲ ج^۲ - ۲ ب ج + و - ب ج$

(۳۴) $لا^۲ - ۴ ی^۲ - ۹ ع^۲ + ۱۲ ی ع + ۴ لا - ۸ ی + ۱۲ ع$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 202 of 308

(۳۵) $۹لا^۲-۴ع^۲-۲۴لای+۱۶ی^۲+۲۰ی-۱۵لا+۱۰ع$

(۳۶) $۲و^۲لا^۲-۵و^۲لا^۲+۳و^۲-۲بےلا^۲+۵و^۲بےلا^۲-۳و^۲بے$

(۳۷) $۲لا^۲+(۲و-۳ب)لا^۲-(۲ب+۳و ب)لا+۳ب^۲$

(۳۸) $(و^۲+بے^۲)لا^۲-و^۲ب(۲و+ب)+و(۲ب لا^۲-و^۲)$

(۳۹) $و^۲(ب-ج)+بے^۲(ج-ا)+ج^۲(ا-ب)$

(۴۰) $و^۲(ب+ج)+بے^۲(ج+ا)+ج^۲(ا+ب)+۲ا ب ج$

(۴۱) $و^۲(بے^۲-ج^۲)+بے^۲(ج^۲-و^۲)+ج^۲(و^۲-بے^۲)$

(۴۲) $و^۴(ب-ج)+بے^۴(ج-ا)+ج^۴(ا-ب)$

(۴۳) $و^۴(بے^۲-ج^۲)+بے^۴(ج^۲-و^۲)+ج^۴(و^۲-بے^۲)$

(۴۴) $و^۵(ب-ج)+بے^۵(ج-ا)+ج^۵(ا-ب)$

۸۰ مسئلہ متفرقہ

مثال ۱ $و^۲+بے^۲+ج^۲-۳ا ب ج$ را بر $ا+ب+ج$ تقسیم کنید

چون $بے^۲+ج^۲=(ب+ج)^۳-۳ب ج(ب+ج)$

$\therefore و^۲+بے^۲+ج^۲-۳ا ب ج=و^۲+(ب+ج)^۳-۳ب ج(ب+ج)-۳ا ب ج$

$=\{و^۲+(ب+ج)^۲\}-۳ب ج\{ا+(ب+ج)\}$

$=\{ا+(ب+ج)\}\{و^۲-و(ب+ج)+(ب+ج)^۲\}-۳ب ج(ا+ب+ج)$

$=(ا+ب+ج)\{و^۲-ا ب-ا ج+بے^۲+۲ب ج+ج^۲-۳ب ج\}$

$=(ا+ب+ج)(و^۲-ا ب-ا ج+بے^۲+ج^۲+۲ب ج-۳ب ج)$

$=(ا+ب+ج)(و^۲+بے^۲+ج^۲-ا ب-ا ج-ب ج)$

$\therefore$ خارج قسمت مطلوب $=و^۲+بے^۲+ج^۲-ا ب-ا ج-ب ج$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 203 of 308

مثال ۲ $۲لا^۳+۷لا^۲+۱۴لا+۸$ را بمضروبات تفریق کنید

اگر در مثال فوق بنظر دقت ملاحظه کنیم واضح میگردد که جملهٔ مفروضه بایچنین دو حصه تقسیم کرده میتوانیم که هریک از انها بر $لا+۲$ بدون باقی تقسیم میشود

(۱) $(لا^۳+۸)+۷لا(لا+۲)$ (۲) $لا^۲(لا+۲)+۵لا(لا+۲)+۴(لا+۲)$

پس بقرار طریق دوم $لا^۳+۷لا^۲+۱۴لا+۸=(لا+۲)(لا^۲+۵لا+۴)$

$=(لا+۲)(لا+۱)(لا+۲)$

تنبیه - باید دانست که اگر $لا=-۱$ یا -۲ یا -۴ باشد قیمت جملهٔ مفروضه در هر حالت صفر خواهد بود

مثال ۳ $لا^۳+۶لا^۲+۱۱لا+۶$ را بمضروبات تفریق کنید

بعد از تحقیق معلوم میشود که جملهٔ مفروضه بایچنین دو حصه منقسم شده میتواند که هر حصه بر $لا+۳$ بدو طریق ذیل بدون باقی تقسیم میشود :-

(۱) $لا^۲(لا+۳)+۳لا(لا+۳)+۲(لا+۳)$ و (۲) $لا^۲(لا^۲+۶لا+۹)+۲(لا+۳)$

پس بموجب طریق دوم $لا^۳+۶لا^۲+۱۱لا+۶=لا(لا+۳)^۲+۲(لا+۳)$

$=(لا+۳)\{لا(لا+۳)+۲\}$

$=(لا+۳)(لا^۲+۳لا+۲)$

$=(لا+۳)(لا+۱)(لا+۲)$

تنبیه درین مثال نیز ظاهر است که اگر $لا=-۳$ یا -۱ یا -۲ باشد در هر حالت قیمت جملهٔ مفروضه صفر خواهد بود -

مثال ۴ $۲لا^۳-۵لا^۲+۶$ را بمضروبات تفریق کنید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 204 of 308

بعد از ملاحظہ معلوم میشود کہ جملہ مفروضہ بایں چنین دو حصہ منقسم شدہ میتواند
کہ ہر حصہ بر لا-۱ بدو طریق ذیل بدون باقی تقسیم میشود :-

(۱) لا (لا^{۲} - ۲لا + ۱) - ۶ (لا - ۱) (۲) لا^{۲} (لا - ۱) - لا (لا - ۱) - ۶ (لا - ۱)

پس بطریق اول لا^{۳} - ۲لا^{۲} - ۵لا + ۶ = لا (لا - ۱)^{۲} - ۶ (لا - ۱)

= (لا - ۱) {لا (لا - ۱) - ۶}

= (لا - ۱) (لا^{۲} - لا - ۶)

= (لا - ۱) (لا - ۳) (لا + ۲)

تنبیہ درین مثال نیز اگر لا = ۱ یا ۳ و یا - ۲ باشد قیمت جملہ مفروضہ صفر خواہد بود
پس ظاہر است کہ ہر گاہ در یک جملہ جبریہ ۱ بجاے لا نوشتہ شود
و قیمت جملہ صفر باشد در انصورت لا - ۱ یک مضروب جملہ مذکور میباشد
و مثال ذیل بقرار اصول فوق حل میشود :-

مثال ۵ لا^{۳} + لا^{۲} - ۲۱لا - ۳۸ را بمضروبات تفریق کنید -

بعد از امتحان معلوم میشود کہ اگر - ۲ بجای لا نوشتہ شود جملہ مفروضہ صفر میباشد
لہذا لا + ۲ یک مضروب جملہ مفروضہ خواہد بود

∴ لا^{۳} + لا^{۲} - ۲۱لا - ۳۸ = لا^{۲} (لا + ۲) - لا (لا + ۲) - ۱۹ (لا + ۲)

= (لا + ۲) (لا^{۲} - لا - ۱۹)

مثال ۶ ۸لا^{۳} + ۱۶لا - ۹ را بمضروبات تفریق کنید
ظاہر است کہ جملہ مفروضہ بایں چنین دو حصہ منقسم شدہ میتواند کہ ہر حصہ آن
بر ۲لا - ۱ بدو طریق ذیل بدون باقی تقسیم میشود -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 205 of 308

(۱) $(۸لا^۲-۱)+۸(۲لا-۱)$ و (۲) $۲لا(۴لا^۲-۱)+۹(۲لا-۱)$

پس حسب طریق اول $۸لا^۲+۱۶لا-۹=(۸لا^۲-۱)+۸(۲لا-۱)$

$=(۲لا-۱)\{(۴لا^۲+۲لا+۱)+۸\}$

$=(۲لا-۱)(۴لا^۲+۲لا+۹)$

مثال ۷ $ا^۲+۷اب-۲۲ب^۲$ را بمضروبات تفریق کنید

ظاہر است کہ جملہ مفروضہ بایں چنین دو حصہ منقسم شدہ میتواند کہ ہر حصہ آن بر $ا-۲ب$ بدو طریق ذیل بدون باقی تقسیم میشود :-

(۱) $ا^۲-۸ب^۲+۷ب(ا-۲ب)$ (۲) $ا(ا^۲-۴ب^۲)+۱۱اب(ا-۲ب)$

پس بطریق (۱) $ا^۲+۷اب-۲۲ب^۲=(ا^۲-۸ب^۲)+۷ب(ا-۲ب)$

$=(ا-۲ب)\{(ا^۲+۲اب+۴ب^۲)+۷ب\}$

$=(ا-۲ب)(ا^۲+۲اب+۱۱ب^۲)$

مثال ۸ $لا^۲+۲(ا^۲+ب^۲)+۳ا(لا-ب)(۳لا+۵ا)$ را بمضروبات تفریق کنید

جملہ مفروضہ را نظر بقوائے متناقصہ لا تنظیم بدہید

پس جملہ مفروضہ $=لا^۲+۳(ا-ب)لا+(۲ا^۲-۵اب+۲ب^۲)$

$=لا^۲+۳(ا-ب)لا+(۲ا-ب)(ا-۲ب)$

$=لا^۲+\{(۲ا-ب)+(ا-۲ب)\}لا+(۲ا-ب)(ا-۲ب)$

$=\{لا+(۲ا-ب)\}\{لا+(ا-۲ب)\}$

$=(لا+۲ا-ب)(لا+ا-۲ب)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 206 of 308

مثال ۹ $لا^2 - ۶لای + ۸ی^2 - ۶ع + ۲ی ع$ را بمضروبات تفریق کنید

جملہ مفروضہ $= (لا^2 - ۶لای + ۹ی^2) - (ی^2 + ع^2 - ۲ی ع)$

$= (لا - ۳ی)^2 - (ی - ع)^2$

$= \{(لا - ۳ی) + (ی - ع)\}\{(لا - ۳ی) - (ی - ع)\}$

$= (لا - ۲ی - ع)(لا - ۴ی + ع)$

مثال ۱۰ $(ا^2 - ب^2)(لا^2 - ی^2) + ۴ا ب لای$ را بمضروبات تفریق کنید

جملہ مفروضہ $= ا^2 لا^2 - ا^2 ی^2 - ب^2 لا^2 + ب^2 ی^2 + ۴ا ب لای$

$= (ا^2 لا^2 + ب^2 ی^2 + ۲ا ب لای) - (ا^2 ی^2 + ب^2 لا^2 - ۲ا ب لای)$

$= (ا لا + ب ی)^2 - (ا ی - ب لا)^2$

$= \{(ا لا + ب ی) + (ا ی - ب لا)\}\{(ا لا + ب ی) - (ا ی - ب لا)\}$

$= \{(ا - ب)لا + (ا + ب)ی\}\{(ا + ب)لا - (ا - ب)ی\}$

مثال ۱۱ $لا^3 + ۶لا^2 + ۴لا^2 - ۱۵لا + ۶$ را بمضروبات تفریق کنید

جملہ مفروضہ $= (لا^3 + ۶لا^2 + ۹لا^2) - (۵لا^2 + ۱۵لا) + ۶$

$= (لا^2 + ۳لا)^2 - ۵(لا^2 + ۳لا) + ۶$

$= \{(لا^2 + ۳لا) - ۲\}\{(لا^2 + ۳لا) - ۳\}$

$= (لا^2 + ۳لا - ۲)(لا^2 + ۳لا - ۳)$

مثال ۱۲ $لا^4 + ۲لا^3 ی + ۳لا^2 ی^2 + ۲لای^3 + ی^4$ را بمضروبات تفریق کنید

جملہ مفروضہ $= (لا^4 + ۲لا^3 ی + ی^4) + لا^2 ی^2 + (۲لا^3 ی + ۲لای^3)$

$= (لا^2 + ی^2)^2 + (لای)^2 + ۲(لای)(لا^2 + ی^2)$

$= \{(لا^2 + ی^2) + لای\}^2$

$= (لا^2 + لای + ی^2)^2$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 207 of 308

مثال ۱۳ (لا-۱)(لا-۲)(لا+۳)(لا+۴)+۴ را بمضروبات تفریق کنید

$(لا-۱)(لا-۲)(لا+۳)(لا+۴) = \{(لا-۱)(لا+۳)\}\{(لا-۲)(لا+۴)\}$

$= (لا^۲+۲لا-۳)(لا^۲+۲لا-۸)$

پس اگر $لا^۲+۲لا = ع$ باشد

جملهٔ مفروضه $= (ع-۳)(ع-۸)+۴$

$= ع^۲-۱۱ع+۲۸$

$= (ع-۴)(ع-۷)$

$= (لا^۲+۲لا-۴)(لا^۲+۲لا-۷)$

تنبیه طالب علم را باید که این امر را بغور ملاحظه کند که لا-۱ در لا+۳ و لا+۴ در لا-۲ چرا ضرب شده است

مثال ۱۴ اگر لا+ی = او لای = ب۲ باشد قیمت جملهای ذیل را معلوم کنید

(۱) $لا^۲+ی^۲$ (۲) $لا^۲-لا ی-لا ی^۲+ی^۲$

(۱) $لا^۲+ی^۲ = (لا^۲+ی^۲)^۲-۲لا^۲ی^۲$

$= \{(لا+ی)^۲-۲لای\}^۲-۲لا^۲ی^۲$

پس قیمت مطلوب $= (ا^۲-۲ب^۲)^۲-۲ب^۴$

$= ا^۴-۴ا^۲ب^۲+۲ب^۴$

(۲) $لا^۲-لا^۲ی-لا ی^۲+ی^۳ = لا^۲(لا-ی)-ی^۲(لا-ی)$

$= (لا-ی)(لا^۲-ی^۲)$

$= (لا-ی)^۲(لا+ی)$

$= \{(لا+ی)^۲-۴لای\}(لا+ی) = (ا^۲-۴ب^۲)ا$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 208 of 308

مثال ۱۵ قیمت $لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ + ۲$ را معلوم کنید اگر $لا^۲ + ۲ = ۲لا$ باشد

$$لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ + ۲ = (لا^۴ + لا^۳ + لا^۲) - ۲(لا^۳ - ۱)$$
$$= لا^۲(لا^۲ + لا + ۱) - ۲(لا - ۱)(لا^۲ + لا + ۱)$$
$$= (لا^۲ + لا + ۱)\{لا^۲ - ۲(لا - ۱)\}$$
$$= (لا^۲ + لا + ۱)(لا^۲ - ۲لا + ۳)$$

پس قیمت مطلوب $= (لا^۲ + لا + ۱) \times ۰$

$= ۰$

مثال ۱۶ قیمت $ا^۴ + ب^۴ + ج^۴ - ۲ب^۲ج^۲ - ۲ج^۲ا^۲ - ۲ا^۲ب^۲$ را معلوم کنید

اگر $ا + ب = ج$

جملہ مفروضہ $= ا^۴ - ۲(ب^۲ + ج^۲)ا^۲ + ب^۴ + ج^۴ - ۲ب^۲ج^۲$

$$= \{ا^۴ - ۲(ب^۲ + ج^۲)ا^۲ + (ب^۲ + ج^۲)^۲\} - (ب^۲ + ج^۲)^۲ + ب^۴ + ج^۴ - ۲ب^۲ج^۲$$
$$= \{ا^۲ - (ب^۲ + ج^۲)\}^۲ - ۴ب^۲ج^۲$$
$$= \{ا^۲ - ب^۲ - ج^۲)\}^۲ - ۴ب^۲ج^۲$$
$$= (ا^۲ - ب^۲ - ج^۲ + ۲ب ج)(ا^۲ - ب^۲ - ج^۲ - ۲ب ج)$$
$$= \{ا^۲ - (ب - ج)^۲\}\{ا^۲ - (ب + ج)^۲\}$$
$$= (ا + ب - ج)(ا - ب + ج)(ا + ب + ج)(ا - ب - ج)$$

پس جملہ مفروضہ $= ۰$ زیرا کہ $ا + ب = ج$

مسئلہ (۴۷)

تقسیم کنید

(۱) $ا^۳ + ب^۳ - ج^۳ + ۳ا ب ج$ را بر $ا + ب - ج$ (۲) $لا^۳ - ی^۳ - ۱ - ۳لای$ را بر $لا - ی - ۱$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 209 of 308

(۳) $لا^۳ - ۸ی^۳ + ۲۷ع^۳ + ۱۸لای ع$ را بر $لا - ۲ی + ۳ع$

(۴) $۸و^۳ - ۲۷ب^۳ ج^۳ - ۱۸وب ج$ را بر $۴و^۲ + ۹ب^۲ ج^۲ + ۶وب + ۳وج - ۳ب ج$

(۵) $لا^۴ - ۲۶لا^۲ - ۲۷$ را بر $(لا^۲ + ۳لا + ۹)(لا^۲ - لا + ۱)$

(۶) $(و^۲ - ب ج)^۲ + ۲۷ب ج$ را بر $و^۲ - ۵وب ج + ۱۳ب^۲ ج^۲$

(۷) $۱۲۵ - ۸و^۳ + ب^۳ + ۳۰وب$ را بر $(ا + ب)^۲ + (ا + ۵)^۲ + ۲و^۲ - ۵ب$

(۸) $۲لا^۲ - لا^۳ + لا + ۴$ را بر $لا + ۱$ (۹) $لا^۴ - ۴لا^۳ + ۷لا^۲ - ۱۱لا + ۱۰$ را بر $لا - ۲$

(۱۰) $لا^۴ - ۳لا^۳ - ۱۳لا^۲ + ۱۳لا - ۶$ را بر $لا + ۳$ (۱۱) $لا^۴ + ۴لا^۲ - ۳۹$ را بر $لا - ۳$

(۱۲) $و^۳ - ۴و^۲ ب + ۲۴ب^۳$ را بر $و + ۲ب$

(۱۳) $و^۳ - ۵و^۲ ب + ۸وب^۲ - ۷ب^۳$ را بر $و - ۳ب$

(۱۴) $لا^۴ + لا^۳ - ۱۰لا^۲ + ۷لا - ۴$ را بر $لا + ۴$ (۱۵) $لا^۳ + ۳لای^۲ - ۷ی^۳$ را بر $لا - ۴ی$

جملہائے ذیل را بمصنروبات تفریق کنید :-

(۱۶) $لا^۳ + ۸لا^۲ + ۱۹لا + ۱۲$ (۱۷) $لا^۳ + ۹لا^۲ + ۲۶لا + ۲۴$ (۱۸) $لا^۳ - ۶لا^۲ + ۱۱لا - ۶$

(۱۹) $لا^۳ + ۵لا^۲ - ۲لا - ۲۴$ (۲۰) $لا^۳ - ۴لا^۲ + لا + ۲$ (۲۱) $لا^۳ + ۵لا^۲ - ۲لا - ۶$

(۲۲) $لا^۳ - ۶لا^۲ + ۱۳لا - ۱۰$ (۲۳) $لا^۳ - ۳لا^۲ - ۹لا^۲ + ۱۲لا + ۲۰$

(۲۴) $لا^۳ - ۳لا^۲ - لا^۲ + ۱۳لا - ۱۰$ (۲۵) $لا^۳ - ۵لا^۲ + لا^۲ + ۱۳لا + ۶$

(۲۶) $لا^۳ + ۵لا^۲ - ۸لا^۲ - ۳۰لا + ۳۶$ (۲۷) $لا^۳ - ۷لا^۲ + ۹لا^۲ + ۲۶لا - ۵۶$

(۲۸) $لا^۳ - ۷لا^۲ + ۱۳لا - ۱۵$ (۲۹) $لا^۳ - ۵لا + ۱۲$ (۳۰) $لا^۳ - ۶لا^۲ + ۳۲$

(۳۱) $۲لا^۳ - ۳لا^۲ - ۴$ (۳۲) $لا^۳ - ۹لای^۲ - ۱۰ی^۳$ (۳۳) $و^۳ + ۴و^۲ ب - ۹ب^۳$

(۳۴) $۵و^۳ - ۳و^۲ ب - ۲۸ب^۳$ (۳۵) $۸لا^۳ + ۴لا - ۳$ (۳۶) $۲لا^۳ + ۵لا^۲ - ۴لا - ۳$

(۳۷) $لا^۳ - ۳لا - ۲$ (۳۸) $۲و^۲ - وب - ب^۲$ (۳۹) $۳لا^۳ + ۸لا^۲ - ۸لا - ۳$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 210 of 308

(۴۰) $لا^2 - ٦لاي^2 + ٩ي^2$ (۴۱) $لا^2 + بلا - (و^2 - ٣وب + ٢ب^2)$

(۴۲) $لا^2 + ٤وبلاي^2 - (و^2 - ب^2)ي^2$ (۴۳) $و^2 + ٢(لا^2 + ي^2)اب^2 + (لا^2 - ي^2)ب^4$

(۴۴) $و^2 + (لا + ي)و - ٢لا^2 + ٥لاي - ٢ي^2$ (۴۵) $لا(لا + ا) - ٢و^2 + ٣ب(و + لا) + ٢ب^2$

(۴۶) $لا^2 + ٤لاي + ٣ي^2 + ٢ي ع - ع^2$ (۴۷) $٤و^2 - ٤وب - ٣ب^2 + ١٢ابج - ٩ج^2$

(۴۸) $لا^2 + ٦لا^2 + ٨لا^2 + ٦لا - ٩$ (۴۹) $و^2 - ٤وب - ٥ب^2 + ٦ابج - ب^2$

(۵۰) $٤لا^4 - ٢٠لا^3 + ٢٤لا^2 + ٦لا - ٩$ (۵۱) $لا^4 - ٢لا^3 + ٢لا^2 - ٢لا + ١$

(۵۲) $و^2 - ٩و^2 + ٣٠و - ٢٥$ (۵۳) $و^2 - ٢وبلا - (ج - ب^2)لا^2 + بجلا$

(۵۴) $لا^2ي^2 + لا^2ي^2 - ع^2 + ٢لاي ع + ١$ (۵۵) $لا^2(ي^2 - ع^2) + ٤لاي ع - ي^2 + ع^2$

(۵۶) $(و^2 - ب^2)(لا^2 + ي^2) + ٣(و^2 + ب^2)لاي$ (۵۷) $لا^4 - ٤لا^3 - لا^2 + ١٠لا + ٤$

(۵۸) $و^4 - ٦و^3 + ١٥و^2 - ١٨و + ٥$ (۵۹) $٤لا^4 + ١٢لا^3 - ٥لا^2 - ٢١لا + ١٢$

(۶۰) $لا^4 - ٥لا^3ي + ٦لا^2ي^2 - ٥لاي^3 + ي^4$ (۶۱) $لا^4 - ٥لا^3 + ١٤لا^2 - ٢٠لا + ١٦$

(۶۲) $و^4 - ٧و^3ب + ١٤و^2ب^2 - ١٤ب^3 + ٤ب^4$ (۶۳) $لا^4 + ٤لا^3 - ١١لا^2 + ٢٠لا + ٢٥$

(۶۴) $لا^4 + ٤و^3ب - ١٠و^2ب^2 + ٤وب^3 + ب^4$ (۶۵) $لا^4 + ٨لا^3 + ٢٤لا^2 + ٣٢لا - ٢٠$

(۶۶) $(لا + ١)(لا + ٣)(لا - ٤)(لا - ٦) + ١٣$ (۶۷) $(لا + ٢)(لا + ٣)(لا + ٤)(لا + ٥) - ٣٦٠$

(۶۸) $لا(٢لا + ١)(لا - ٢)(٢لا - ٣) - ٦٣$ کنید

(۶۹) قیمت $لاي(لا + ي) + ي ع(ي + ع) + ع لا(ع + لا) + ٣لاي ع$ را معلوم

اگر $لا = و(ب - ج)$ وی $= ب(ج - ا)$ وع $= ج(ا - ب)$

(۷۰) قیمت $(ي - ع)(ي^2 - ع^2) - لا\{(ي - ع)^2 + لا(ي + ع)\} + لا^2$ را معلوم کنید

اگر $لا = و^2 - ب^2$ وی $= ب^2 - ج^2$ وع $= و^2 - ج^2$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 211 of 308

(۷۱) قیمت لا^{۲}-۲(ی-۲)لا-۳ی^{۲}+۲۰ی-۳۲ را معلوم کنید اگر لا+ی=۴

(۷۲) قیمت لا^{۲}-ی^{۲}+۴لا+۱۴ای-۴۵ را معلوم کنید اگر لا+ی=۲۵ ولا-ی=۱۲

(۷۳) قیمت لا^{۶}+ی^{۶}-ع^{۶}+۳لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲} را معلوم کنید اگر لا=ا^{۲}-ب^{۲} وی=۲اب وع=ا^{۲}+ب^{۲} باشد

(۷۴) قیمت ۸لای(لا^{۲}+ی^{۲}) را معلوم کنید اگر لا+ی=۶۳ ولا-ی=۲۶

(۷۵) قیمت لا^{۵}+ی^{۵} را معلوم کنید اگر لا+ی=ا ولای=ب^{۲}

(۷۶) قیمت لا^{۲}+ی^{۲}+ع^{۲}-۳لای ع را معلوم کنید اگر لا=۶۵۸ وی=۶۶۸ وع=۶۷۴ باشد

باب ششم

عاد اعظم یا قاسم مشترک اعظم

۸۱ **تعریف** مضروب مشترک دو یا زیاده جمله جبریه آن جمله میباشد که هر یکے ازانها را بدون باقی تقسیم کند۔

تنبیه مراد از جمله در فقره فوق جمله منطق و صحیح میباشد

مضروب اصلی یک جمله آنست که بمضروبات تفریق نمیشود حاصل ضرب مضروبات اصلیه مشترکه دو یا زیاده جمله را قاسم مشترک اعظم یا عاد اعظم میگویند مثلاً چون ۶اب(لا^{۲}-۱)=۲×۳×ا×ا×ب×(لا+۱)×(لا-۱)

و ۱۵اب(لا^{۲}-۳لا+۲)=۳×۵×ا×ب×(لا-۱)×(لا-۲)

لهذا مضروبات اصلیه مشترکه دو جمله فوق ۳ وا وب ولا-۱ میباشد بنابرین قاسم مشترک اعظم جملهاے مذکور ۳اب(لا-۱) است۔

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 212 of 308

تنبیہ ۱ باید دانست کہ در مثال فوق علاوہ از ۳ اب (لا-۱) مضروبات مشترکہ ۳ اوب (لا-۱) واب و ۳ (لا-۱) و ۳ اب نیز میباشند مگر مضروبات اصلیہ نیستند

تنبیہ ۲ اگر ا = ط × ق و ب = ط × ق باشد و ق ہیچ مضروب مشترک نداشتہ باشند عاد اعظم ا و ب عبارت از عاد اعظم ط و ط میباشد

تنبیہ ۳ اگر ا = م × ن و ب = م × ن باشد عاد اعظم ا و ب = (عاد اعظم م و م) × (عاد اعظم ن و ن)

۸۲ طریق دریافت نمودن قاسم مشترک جملہائے مفرد

جملہائے مفرد بمضروبات اصلیہ مشترک تحلیل شدہ میتوانند بنابرین قاسم مشترک اعظم آنہا بآسانی دریافت شدہ میتواند

مثال ۱ قاسم مشترک اعظم آب^{۲} ج^{۳} و آ^{۲} ب^{۳} ج^{۲} و آ^{۳} ب^{۵} ج^{۲} را دریافت کنید

مضروبات اصلیہ مشترک جملہائے فوق ا و ب و ج ہستند و کلانترین قوای مشترک مضروبات فوق ا^{۲} ب^{۳} ج^{۲} میباشند لہذا قاسم مشترک اعظم مطلوب = آ^{۲} ب^{۳} ج^{۲}

مثال ۲ قاسم مشترک اعظم ۲۴ ا^{۲} ب^{۲} لا^{۲} ی^{۲} و ۳۶ ا^{۲} لا^{۲} ع^{۲} و ۲۴۰ ب^{۲} لا^{۲} ی^{۲} ع را معلوم کنید :-

چون ۲۴ ا^{۲} ب^{۲} لا^{۲} ی^{۲} = ۳ × ۲^{۳} × ا^{۲} ب^{۲} لا^{۲} ی^{۲}

و ۳۶ ا^{۲} لا^{۲} ع^{۲} = ۲ × ۳^{۲} × ا^{۲} لا^{۲} ع^{۲}

و ۲۴۰ ب^{۲} لا^{۲} ی^{۲} ع^{۲} = ۳ × ۵ × ۲^{۴} × ب^{۲} لا^{۲} ی^{۲} ع^{۲}

پس ظاہر است کہ مضروبات اصلیہ مشترکہ ۳ و ۲ و لا میباشند و کلانترین قوای مشترکہ مضروبات فوق ۳ و ۲ و لا میباشند لہذا قاسم مشترک اعظم مطلوب = ۳ × ۲^{۲} × لا^{۲} = ۱۲ لا^{۲}

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 213 of 308

مسئلہ (۴۸)

قاسم مشترک اعظم جملہائے ذیل را معلوم کنید

(۱) وَ ب ج و آ ب

(۲) ۱۲ آ ب و ۲۰ آ ج

(۳) ۹ لا ی ع ج و ۲۴ لا ی ج

(۴) ۲۰ و لا ی ص و ۷۵ ا ی ج

(۵) ۱۸ م ن ج و ۴۵ م ن ج

(۶) ۱۶ و لا ی و ۴۰ ا ی ج لا و ۲۸ لا و

(۷) ۲۴ م ن ط و ۶۰ م ن ط و ۸۴ م ط ج

(۸) ۴۵ لا ی ع ج و ۷۵ لا ی ع ج و ۹۰ لا ی ع ج

(۹) ۳۶ آ ب ج لا و ۵۴ و ج لا و ۹۰ آ ب ج

(۱۰) ۷۲ و ب ج ص و ۹۶ ب ج د و ۱۲۰ ج د و ص

(۱۱) ۴۸ و لا ی ع ج و ۶۰ لا ی ع ب و ۷۲ ی ع ب ا و ۸۴ ع ب و لا

(۱۲) ۷۵ م ن ط و ق و ۹۰ م ن ط و ق و ۱۰۵ م ن ط و ص و ۱۳۵ م ن ط و ق

(۱۳) ۵۴ آ ب ج د و ۷۲ و ب ج د و ۱۰۸ آ ب ج د و ۱۲۶ و ب ج د ص

(۱۴) ۱۸ آ لا ی ص و ۴۲ و ی ع ج و ۶۰ لا ی ع ه و ۷۸ و لا ع ج

(۱۵) ۳۲ و ب لا ی ع ج و ۴۰ و لا ی ع ج و ۵۶ ب لا ی ع ج و ۷۲ لا و ی ع ج

و ۹۶ ب و لا ی ج

۸۳ طریق دریافت نمودن قاسم مشترک اعظم جملہائے مرکب کہ مضروبات اصلیہ آنہا بآسانی معلوم شدہ میتواند۔

درینصورت نیز بحکم فقرہ ۸۲ عمل خواہد شد:۔

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 214 of 308

مثال ۱ قاسم مشترک اعظم $أ^{٢}ب^{٢}+٢أ^{٣}ب^{٢}$ و $أ^{٣}ب-٤أ^{٢}ب^{٣}$ را معلوم کنید

$$أ^{٢}ب^{٢}+٢أ^{٣}ب^{٢}=أ^{٢}ب^{٢}(١+٢ب)$$

$$و\ أ^{٣}ب-٤أ^{٢}ب^{٣}=أ^{٢}ب(أ^{٢}-٤ب^{٢})$$

$$=أ^{٢}ب(١+٢ب)(١-٢ب)$$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب $=أ^{٢}ب(١+٢ب)$

مثال ۲ قاسم مشترک اعظم $لا^{٢}ى^{٢}+لا^{٢}ى^{٣}$ و $لا^{٢}ى+٢لا^{٢}ى^{٢}+لا^{٢}ى^{٣}$ را معلوم کنید

$$لا^{٢}ى^{٢}+لا^{٢}ى^{٣}=لا^{٢}ى^{٢}(لا^{٢}+ى^{٢})=لا^{٢}ى^{٢}(لا+ى)(لا^{٢}-لا ى+ى^{٢})$$

$$و\ لا^{٢}ى+٢لا^{٢}ى^{٢}+لا^{٢}ى^{٣}=لا^{٢}ى(لا^{٢}+٢لا ى+ى^{٢})$$

$$=لا^{٢}ى(لا+ى)^{٢}$$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب $=لا^{٢}ى(لا+ى)$

مثال ۳ قاسم مشترک اعظم $٢٤(لا^{٣}-٢و\ لا^{٢}-٨و^{٢}لا)$ و $٥٤(لا^{٣}-و لا^{٢}-٦و^{٢}لا)$ را معلوم کنید

$$جملهٔ اول=٣\times٨\times لا^{٢}(لا^{٢}-٢و لا-٨و^{٢})$$

$$=٣\times٢^{٢}\times لا^{٢}(لا+٢و)(لا-٤و)$$

$$و جملهٔ دوم=٦\times٩\times لا^{٢}(لا^{٢}-و لا-٦و^{٢})$$

$$=٢\times٣^{٣}\times لا^{٢}(لا+٢و)(لا-٣و)$$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب $=٣\times٢\times لا^{٢}(لا+٢و)$

$$=٦لا^{٢}(لا+٢و)$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 215 of 308

مثال ۴۸ قاسم مشترک اعظم $۲x^2-۱۶x^2$ و $x^2+۲x^2-۱۰x^2+۸x^2$ را معلوم کنید

جملهٔ اول $=(x^2+۴x^2)(x-۴x^2)$

$=(x^2+۴x^2)(x+۲x^2)(x-۲x^2)$

وجملهٔ دوم $=(x-۲x^2)(x^2+۳x^2-۴x^2)$

$=(x-۲x^2)(x-x^2)(x+۴x^2)$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب $=(x-۲x^2)$

تنبیه اگرچه مضروبات جملهٔ دوم ظاهر نیست مگر قیاساً معلوم میشود که یکے از مضروبات جملهٔ اول مضروب جملهٔ دوم نیز خواهد بود و بعد از امتحان ظاهر میشود که $x-۲x^2$ مضروب جملهٔ دوم است

امثله (۴۹)

قاسم مشترک اعظم جملهائے ذیل را معلوم کنید۔

(۱) x^2-x^2 و $x^2+۲x^2+x^2$ (۲) $x^2y^2-x^2y^2$ و $x^2y^2+x^2y^2$

(۳) $۶(x^2-۹)$ و $۱۵(x^2+۲x+۱)$ (۴) $۱۲(x^2-x^2y^2)$ و $۲۰(x^2y^2+x^2y^2)$

(۵) $m^2n^2-۲m^2n^2+m^2n^2$ و $(m^2n-mn^2)^2$ (۶) $۴x^2-۹x^2$ و $۴x^2+۶x^2$

(۷) $۱۸x^2y^2-۳۲x^2y^2$ و $۱۸x^2y^2+۲۴x^2y^2$

(۸) $۹x^2y^2-۳۶x^2y^2$ و $۲۴x^2y^2-۴۸x^2y^2$

(۹) $۶x^2y^2-۲۴x^2y^2$ و $۴x^2y+۳۲x^2y^2$

(۱۰) $۴۸x^2(x+y)^2(x^2-y^2)$ و $۶۴(x^2-x^2y)(x^2+x^2y)$

(۱۱) $۲۴(x^2-x^2)$ و $۴۰(x^2+x^2+x^2)$ (۱۲) $۵۶(x^2-x^2)$ و $۷۲(x^2+۳x^2+۲x^2)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 216 of 308

(۱۳) ۳۰ (و۲ + ۴ و ب + ۳ ب۲) و ۴۲ (و۲ + و ب - ۶ ب۲)

(۱۴) ۲۸ (لا۲ - ۳ لا - ۱۰ الا) و ۵۲ (لا۲ - ۸ لا + ۱۵ الا)

(۱۵) لا ی + ۳ لا ی۲ - ۱۸ الا ی۲) و لا ی۲ + ۱۰ الا ی۳ + ۲۴ لا ی۴

(۱۶) و۲ لا۲ - ۴ و۲ لا۲ - ۱۲ و۲ لا۵ و و۲ لا۲ + ۸ و۲ لا۳ + ۱۲ و۲ لا۴

(۱۷) ۴ لا۲ + ۱۲ الا۲ + ۹ لا و ۴ لا۲ - ۲ لا - ۱۲

(۱۸) و۲ - و ب - ۲ ب۲ و و۲ - و ب - ۴ و ب۲ + ۴ ب۳

(۱۹) لا۲ + ۳ لا - ۱۰ و لا۲ - لا۲ - ۱۴ لا + ۲۴

(۲۰) ۵۴ (لا۲ + ۸ و۲) و ۹۰ (لا۲ + ۷ و لا۲ + ۱۶ و۲ لا + ۱۲ و۳)

(۲۱) (و۲ - ب۲) (و + ب)۲ و و۲ - ب۴ و ۳ و۲ + ۲ و ب - ۵ و ب۲

(۲۲) (۲ لا - ۳)۲ (لا۲ + لا - ۲) و ۴ لا۲ - لا - ۱۸ و ۲ لا۲ - ۲۳ لا - ۵۴

(۲۳) ۸ (۲۷ و۳ ب + و ب۳) و ۱۲ (۶ و ب۲ - ۷ و ب۳ - ۳ و۲ ب۲) و ۴۰ (۳ و ب۲ + ۱۳ و ب۳ + ۱۴ ب۴)

(۲۴) لا۲ - ۱۳ الا۲ + ۳۶ و ۳ لا۲ + ۱۳ الا۲ - ۸ لا - ۱۲ و ۴ لا۲ + ۱۷ الا۲ + ۹ لا - ۱۸

۸۴ قاعدهٔ عمومیهٔ دریافت نمودن قاسم مشترک اعظم جملهای کثیر الحدود که هیچیک از مضروبات مشترکهٔ آن نه وحدت واحد نباشد

فرض کنید که قاسم مشترک اعظم دو جملهٔ او ب مطلوبست اولاً جملهای مفروضه را بلحاظ قوای متناقصهٔ یک حرف مشترک تنظیم کنید و نیز فرض کنید که کلانترین قوت حرف مذکور در جملهٔ ا از کلانترین قوت همان حرف در جملهٔ ب کم نباشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 217 of 308

پس ا را بر ب تقسیم کنید و فرض کنید که ق خارج قسمت و ج باقی میباشد
لہذا ج = ا - ب ق ..... (۱) یا ا = ب ق + ج ..... (۲)
از (۱) ظاہر است کہ ہر مضروب مشترک ا و ب مضروب ج نیز میباشد
(زیرا کہ اگر ا = ط ا و ب = ط ب باشد ج = ط (ا - ب ق) میشود)
پس اگر ع قاسم مشترک اعظم ا و ب باشد مضروب ب ج نیز خواہد بود
لہذا مضروب مشترک ب و ج نیز میباشد۔
پس ظاہر است کہ قاسم مشترک اعظم ب و ج یا ع میباشد
یا جملہ دیگرے کہ درجۂ آن از ع زیادہ باشد (ل)
لیکن از (۲) ظاہر است کہ مضروب مشترک ب و ج مضروب ا نیز میباشد
لہذا مضروب مشترک ا و ب نیز میباشد بنابرین ظاہر است کہ
قاسم مشترک اعظم ب و ج نیز مضروب مشترک ا و ب است۔
لہذا درجۂ آن از درجۂ ع زیادہ شدہ نمیتواند۔
پس از روے (ل) قاسم مشترک اعظم ب و ج ع میباشد وہو المطلوب
بطریق فوق اگر ب بر ج تقسیم شود و د باقی جدید بودہ قاسم مشترک اعظم
ج و د بعینہ قاسم مشترک اعظم ب و ج میباشد۔
پس ج را بر د تقسیم کنید و فرض کنید کہ باقی ہیچ نماندہ است
پس ظاہر است کہ د عاد اعظم ج و د است و بنابرین عاد اعظم مطلوب میباشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 218 of 308

نتیجه ۱ چون قاسم مشترک اعظم هر مقسوم علیه و مقسوم آن قاسم مشترک اعظم مطلوب میباشد ظاهر است که برای سهولت عمل مقسوم علیه را در یک ذو حدّ واحد ضرب یا بر یک ذوحدّ واحد تقسیم کرده میتوانیم بشرط اینکه ذوحدّ واحد مذکور مضروب مقسوم نباشد و همین طریق مقسوم را در یک ذوحدّ واحد ضرب یا بر یک ذوحدّ تقسیم کرده میتوانیم بشرط اینکه ذوحدّ واحد مذکور مضروب مقسوم علیه نباشد [بحکم تنبیه ۵ فقره ۸۱]

نتیجه ۲ اگر درحین عمل تقسیم ا بر ب قبل از تکمیل عمل تقسیم و ق خارج قسمت جزوی و ح باقی آن باشد پس قاسم مشترک اعظم ب و ح نیز قاسم مشترک اعظم ب و ح خواهد بود پس بحکم نتیجه اول لوقت تقسیم ح بر ب یا ب بر ح بشرطیکه درجهٔ ح از درجهٔ ب زیاده نباشد ح را لوقت ضرورت بر یک ذوحدّ واحد تقسیم یا در ان ضرب کرده میتوانیم بشرط اینکه ذوحدّ واحد مذکور مضروب ب نباشد و بهمین منوال ب را بر یک ذوحدّ واحد تقسیم یا در ان ضرب کرده میتوانیم بشرط اینکه ذوحدّ واحد مذکور مضروب ح نباشد پس از نتایج فوق قاعده ذیل اخذ میشود - برای دریافت نمودن قاسم مشترک اعظم دو جمله جبریه آنها را بلحاظ قوای متناقصهٔ یک حرف مشترک تنظیم کنید بعد ازان آن جمله را که درجه ان زیاده باشد بر جمله دیگر تقسیم کنید (و اگر برابر باشند یکی را بر دیگر تقسیم کنید) پس اگر باقی بماند آنرا مقسوم علیه و مقسوم علیه اول را مقسوم بسازید و همین عمل را جاری بدارید تا اینکه عمل تقسیم تکمیل یابد پس مقسوم علیه اخیر قاسم مشترک اعظم مطلوب خواهد بود - و نیز هر مقسوم علیه در یک ذوحدّ واحد ضرب یا بر ان تقسیم شده میتواند بشرط اینکه

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 219 of 308

ذوحد واحد مذکور مضروب آن مقسوم نباشد و همچنین مقسوم نیز در یک ذوحد واحد ضرب یا بران تقسیم شده میتواند بشرطیکه ذوحد واحد مذکور مضروب آن مقسوم علیه نباشد

مثال اقاسم مشترک اعظم ۳لا۲-۷لا۲-۸لا-۸ و ۲لا۲-۳لا۲-۷لا-۱۲ را معلوم کنید

جمله دوم را در ۳ ضرب کنید و حاصل ضرب را بر جمله اول تقسیم کنید

۲لا۲-۳لا۲-۷لا-۱۲

۳

۲) ۳لا۲-۷لا۲-۸لا-۸ (۶لا۲-۹لا۲-۵۱لا-۳۶

۶لا۲-۱۴لا۲-۳۶لا-۱۶

۵لا۲-۱۵لا-۲۰

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب بعینه قاسم مشترک اعظم ۳لا۲-۷لا۲-۸لا-۸ و ۵لا۲-۱۵لا-۲۰ [= ۵(لا۲-۳لا-۴)] میباشد - یعنی قاسم مشترک اعظم مطلوب قاسم مشترک اعظم ۳لا۲-۷لا۲-۸لا-۸ و لا۲-۳لا-۴ میباشد (بحکم نتیجه اول)

لهذا عمل بطریق ذیل جاری خواهد شد :-

۵لا۲-۱۵لا-۲۰) ۳لا۲-۷لا۲-۸لا-۸ (۳لا+۲

لا۲-۳لا-۴) ۳لا۲-۹لا۲-۱۲لا

۲لا۲-۶لا-۸

۲لا۲-۶لا-۸

×

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب = لا۲-۳لا-۴

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 220 of 308

مثال ۲ قاسم مشترک اعظم ۲۲لا۲ - ۷۸لا - ۱۶لا و ۲۹لا۲ - ۷۸لا - ۲۲لا معلوم کنید

جملہ اول = ۲لا(۱۱لا۲ - ۳۹لا - ۸) وجملہ دوم = ۲لا(لا۲ - ۳۹لا - ۲۲)

پس بموجب تنبیہ ۷ فقرہ ۸۱ قاسم مشترک اعظم مطلوب = (قاسم مشترک اعظم ۲لا و ۲لا) × (قاسم مشترک اعظم ۱۱لا۲ - ۳۹لا - ۸ و لا۲ - ۳۹لا - ۲۲)

پس قاسم مشترک اعظم مضروبات ذوحدود کثیرہ را معلوم کنید

لا۲ - ۳۹لا - ۲۲) ۱۱لا۲ - ۳۹لا - ۸ (۱۱

۱۱لا۲ - ۴۲۹لا - ۲۴۲

۳-) - ۳۹لا۲ + ۴۲۹لا + ۲۳۴

---

۱۳) ۱۳لا۲ - ۱۴۳لا - ۷۸

لا۲ - ۱۱لا - ۶

لا۲ - ۳۹لا - ۲۲ (لا

لا۲ - ۱۱لا - ۶

---

۱۱) ۱۱لا۲ - ۳۳لا - ۲۲

لا۲ - ۳لا - ۲) لا۲ - ۱۱لا - ۶ (لا + ۳

لا۲ - ۳لا - ۲

۳لا۲ - ۹لا - ۶

۳لا۲ - ۹لا - ۶

×

وچون قاسم مشترک اعظم مضروبات ذوحدود کثیرہ = لا۲ - ۳لا - ۲

لہذا قاسم مشترک اعظم مطلوب = ۲لا(لا۲ - ۳لا - ۲)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 221 of 308

مثال ۳ قاسم مشترک اعظم $۱۲ل^۲و^۲+۵۴ل^۲و^۲+۶ل^۲و^۲-۷۲ل^۲و^۲$ و $۸ل^۲و+۶۰ل^۲و^۲+۱۸۰ل^۲و^۲+۲۷ل^۲و^۲$ را معلوم کنید:-

جملۂ اول $=۶ل^۲و^۲(۲ل^۲+۹ل^۲و+ل^۲و^۲-۱۲و^۲)$

جملۂ دوم $=۴ل^۲و^۲(۲ل^۲+۱۵ل^۲و+۴۰ل^۲و^۲+۴۵ل^۲و^۲+۱۸۰و^۲)$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب = قاسم مشترک اعظم مضروبات ذُحدود کثیره × قاسم مشترک اعظم $(۶ل^۲و^۲ و ۴ل^۲و^۲)$

$۲ل^۲+۹ل^۲و+ل^۲و^۲-۱۲و^۲ \overline{)۲ل^۲+۱۵ل^۲و+۴۰ل^۲و^۲+۴۵ل^۲و^۲+۱۸۰و^۲} (ل^۲$

$۲ل^۲+۹ل^۲و+ل^۲و^۲-۱۲و^۲$

$۶ل^۲و+۳۹ل^۲و^۲+۵۷ل^۲و^۲+۱۸۰و^۲ \overline{)۳}$

$۲ل^۲+۱۳ل^۲و+۱۹ل^۲و^۲+۶و^۲ (۱$

$۲ل^۲+۹ل^۲و+ل^۲و^۲-۱۲و^۲ \overline{)۲ل^۲+۹ل^۲و+ل^۲و^۲-۱۲و^۲}$

$۴ل^۲و^۲+۱۸ل^۲و^۲+۱۸و^۲ \overline{)۳}$

$۲ل^۲+۹ل^۲و+۹و^۲$

$۲ل^۲+۹ل^۲و+و^۲ \overline{)۲ل^۲+۹ل^۲و+ل^۲و^۲-۱۲و^۲} (ل^۲$

$۲ل^۲+۹ل^۲و+۹ل^۲و^۲$

$-۸ل^۲و^۲-۱۲و^۲ \overline{)-۴}$

$۲ل^۲+۳و$

$۲ل^۲+۳و \overline{)۲ل^۲+۹ل^۲و+۹و^۲} (ل^۲+۳و$

$۲ل^۲+۳ل^۲و$

$۶ل^۲و+۹و^۲$

$۶ل^۲و+۹و^۲$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب $=(۲ل^۲+۳و)۲ل^۲و^۲$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 222 of 308

مثال ۴ قاسم مشترک اعظم $۴ل^۴ + ۱۱ل^۳ + ۲۷ل^۲ + ۱۷ل + ۵$ و $۶ل^۴ + ۱۴ل^۳ + ۳۶ل^۲ + ۱۴ل + ۱۰$ را معلوم کنید:-

جملہ دوم $= ۲(۳ل^۴ + ۷ل^۳ + ۱۸ل^۲ + ۷ل + ۵)$ وچون عدد ۲ مضروب جملہ اول نمیباشد لہذا قاسم مشترک اعظم مطلوب بعینہ قاسم مشترک اعظم جملہ اول و $۳ل^۴ + ۷ل^۳ + ۱۸ل^۲ + ۷ل + ۵$ میباشد:-

$۴ل^۴ + ۱۱ل^۳ + ۲۷ل^۲ + ۱۷ل + ۵$

۳

$۳ل^۴ + ۷ل^۳ + ۱۸ل^۲ + ۷ل + ۵$) $۱۲ل^۴ + ۳۳ل^۳ + ۸۱ل^۲ + ۵۱ل + ۱۵$ (۴

$۱۲ل^۴ + ۲۸ل^۳ + ۷۲ل^۲ + ۲۸ل + ۲۰$

$۵ل^۳ + ۹ل^۲ + ۲۳ل - ۵$

$۳ل^۴ + ۷ل^۳ + ۱۸ل^۲ + ۷ل + ۵$

۵

$۵ل^۳ + ۹ل^۲ + ۲۳ل - ۵$) $۱۵ل^۴ + ۳۵ل^۳ + ۹۰ل^۲ + ۳۵ل + ۲۵$ (۳ل

$۱۵ل^۴ + ۲۷ل^۳ + ۶۹ل^۲ - ۱۵ل$

$۸ل^۳ + ۲۱ل^۲ + ۵۰ل + ۲۵$

۵

$۴۰ل^۳ + ۱۰۵ل^۲ + ۲۵۰ل + ۱۲۵$ (۸

$۴۰ل^۳ + ۷۲ل^۲ + ۱۸۴ل - ۴۰$

$۳۳ل^۲ + ۶۶ل + ۱۶۵$ (۳۳

$ل^۲ + ۲ل + ۵$

$ل^۲ + ۲ل + ۵$) $۵ل^۳ + ۹ل^۲ + ۲۳ل - ۵$ (۵ل - ۱

$۵ل^۳ + ۱۰ل^۲ + ۲۵ل$

$- ل^۲ - ۲ل - ۵$

$- ل^۲ - ۲ل - ۵$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب $= ل^۲ + ۲ل + ۵$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 223 of 308

مثال ۵ قاسم مشترک اعظم $۴x^۴-۱۶x^۳+۱۰۸$ و $۶x^۴-۱۴x^۳-۴۰x^۲+۳۶$ معلوم کنید

جلد اول $= ۲(x^۴-۴x^۳+۲۷)$ وجلد دوم $= ۲(۳x^۴-۷x^۳-۲۰x^۲+۱۸)$

∴ قاسم مشترک اعظم مطلوب = قاسم مشترک اعظم مضروبات ذوحدود کثیره

(قاسم مشترک اعظم ۲ و ۲)

$x^۴-۴x^۳+۲۷ \overline{)۳x^۴-۷x^۳-۲۰x^۲+۱۸} \quad (۳x+۱۲$

$۳x^۴-۱۲x^۳+۸۱x$

$۱۲x^۳-۷x^۲-۱۰۲x-۸۱x+۱۸$

$۱۲x^۳-۴۸x^۲+۳۲۴$

$۴۱x^۲-۱۰۲x-۸۱x-۳۰۶$

$x^۴-۴x^۳+۲۷ \overline{)۴۱x^۲-۱۶۴x^۳+۱۱۰۷} \quad (x$

$۴۱x^۲-۱۰۲x-۸۱x-۳۰۶$

$-۶۲x^۳+۸۱x^۲+۳۰۶x+۱۱۰۷$

$-۶۲x^۳+۲۴۸x^۲-۱۶۲x$

$-۱۶۷x^۲+۴۶۸x+۱۱۰۷$

$-۹ \overline{)۱۶x^۲-۹x^۲-۳۴x-۱۲۳} \quad (۱۶$

$۱۶x^۲-۹x^۲-۳۴x-۱۲۳$

$۱۶x^۲-۳۲x^۲-۱۲۹۶x-۴۸۶$

$۲۳x^۲+۱۲۹۶x+۴۸۶$

$۲۳x^۲-۹۲x-۲۷۶$

$x^۲+۲x+۳ \overline{)۴۱x^۲-۱۰۲x-۳۰۶} \quad (۴۱x-۱۰۲$

$۴۱x^۲+۸۲x^۲+۱۲۳x$

$-۱۰۲x^۲-۲۰۴x-۳۰۶$

$-۱۰۲x^۲-۲۰۴x-۳۰۶$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب $= ۲(x^۲+۲x+۳)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 224 of 308

مسئلہ (۵۰)

قاسم مشترک اعظم جملہائے ذیل را معلوم کنید

(۱) $۲لا^{۲} + ۵لا - ۳$ و $۲لا^{۲} + ۳لا^{۲} - ۳۲لا + ۱۵$

(۲) $۳لا^{۲} + ۱۶لا - ۱۲$ و $۳لا^{۲} + ۴لا^{۲} - ۲۸لا + ۱۶$

(۳) $۲لا^{۲} - ۳ولا - ۲۰و^{۲}$ و $۲لا^{۲} + ۳ولا^{۲} - ۴۵و^{۲}لا - ۱۰۰و^{۳}$

(۴) $۳لا^{۳} + ۷لا^{۲} - ۱۴لا^{۲} - ۲۴لا$ و $۶لا^{۳} - ۱۰لا^{۲} - ۲۴لا^{۲}$

(۵) $۶و^{۲} - ۱۱و^{۲} - ۳و + ۲$ و $۳و^{۲} + ۲۰و^{۲} + ۲۳و - ۱۰$

(۶) $۶و^{۲} - ۲۵و^{۲}ب + ۳۲وب^{۲} - ۱۲ب^{۳}$ و $۴و^{۳} + ۱۲و^{۲}ب - ۷وب^{۲} - ۳۰ب^{۳}$

(۷) $۳لا^{۳} + ۵لا^{۲} + ۵لا + ۲$ و $۲لا^{۳} + ۵لا^{۲} + ۵لا + ۳$

(۸) $۴لا^{۳} - ۷لا^{۲}ی + ۷لای^{۲} - ۳ی^{۳}$ و $۳لا^{۳} - ۷لا^{۲}ی + ۷لای^{۲} - ۴ی^{۳}$

(۹) $۶لا^{۳} + ۷لا^{۲} + ۵لا + ۲$ و $۴لا^{۳} - ۱۸لا^{۲} - ۸لا - ۱۰$

(۱۰) $۳لا^{۳} + ۱۰لا^{۲} + ۷لا + ۱$ و $۲لا^{۳} + ۳لا^{۲} - ۷لا - ۳$

(۱۱) $۴لا^{۳} + ۱۳لا^{۲} - ۸لا - ۳$ و $۳لا^{۳} + ۱۳لا^{۲} + ۹لا + ۲$

(۱۲) $۱۲و^{۲} + ۱۱ولا + ۶ولا^{۲} + لا^{۳}$ و $۱۲و^{۲} + ۱۷ولا + ۹ولا^{۲} + لا^{۳}$

(۱۳) $۳۵و^{۳} + ۳۱و^{۲}لا + ۱۳ولا^{۲} + ۲لا^{۳}$ و $۶۵و^{۳} + ۵۴و^{۲}لا + ۲۲ولا^{۲} + ۳لا^{۳}$

(۱۴) $۷۰لا^{۳} - ۹ولا^{۲} + ۱۱و^{۲}لا + ۶و^{۳}$ و $۹۱لا^{۳} - ۲۵ولا^{۲} + ۲۰و^{۲}لا + ۴و^{۳}$

(۱۵) $۷۵لا^{۳} - ۳۵لا^{۲} + ۲۴لا + ۴$ و $۸۵لا^{۳} - ۳۶لا^{۲} + ۲۵لا + ۶$

(۱۶) $۱۵لا^{۳} - ۳۴لا^{۲} + ۲لا + ۲$ و $۴۹لا^{۳} - ۴۹لا^{۲} + ۵لا + ۳$

(۱۷) $۴لا^{۵} + ۲لا^{۴} + ۱۴و^{۲}لا^{۳} + ۱۰و^{۳}لا^{۲} + ۲۴و^{۴}لا$ و $۶لا^{۵} + ۲۱لا^{۴} + ۳۰و^{۲}لا^{۳} + ۳۴و^{۳}لا^{۲}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 225 of 308

(۱۸) ۴ل⁴ + ۳۲ل³ + ۷۲ل² + ۴۴ل + ۸ و ۶ل⁴ + ۵۴ل³ + ۱۳۸ل² + ۱۷۸ل + ۱۲

(۱۹) ۲ل⁴ − ۱۹ل³ + ۲۱ل − ۶ و ۶ل³ + ۲۱ل² + ۳ل − ۶

(۲۰) ۱۲ل⁴ − ۳۰ل³ + ۱۲۶ل + ۹۰ و ۱۵ل³ − ۲۵ل² + ۱۴۵ل − ۷۵

(۲۱) ۸ل⁴ + ۱۱۷ل³ + ۱۶۲ل² + ۷۲ل + ۹ و ۱۲ل³ + ۶۸ل² + ۷۲ل + ۱۰۸ل + ۲۰۰

(۲۲) ل⁴ − ۵ل³ + ۶ل + ۱۲ و ل³ − ۸ل² − ۲۴ل − ۳۲

(۲۳) ل⁴ + ۵ل³ + ۳ل² − ۱۱۴ل − ۴۰۰ و ل³ − ۴ل² + ۴۵ل + ۷۵

(۲۴) ۴ل⁵ − ۸ل⁴ + ۳۸ل³ − ۲۴ل² + ۲۴ل و ۶ل⁴ + ۲۴ل³ − ۱۲ل² − ۳۴ل + ۹۶

(۲۵) ۹ل⁴ − ۱۸ل³ − ۱۳ل² − ۳۸ل − ۱۲ و ۶ل⁴ + ۴ل³ + ۵ل² + ۴ل + ۸

(۲۶) ۲ل⁴ − ۱۱ل³ − ۹ و ۴ل³ + ۱۱ل² + ۸۱

(۲۷) ۳۲ل⁴ + ۱۰۴ل³ − ۲۰۰ل² − ۱۲۲ل + ۳۰ و ۶۰ل³ + ۱۰۰ل² − ۴۵ل + ۵۰۰

(۲۸) ل⁴ + ۲ل³ − ۵ل² − ۷ل + ۳ و ۳ل³ − ۳ل² − ۱۸ل + ۱۲ل + ۳

۸۵ چند قاعدهٔ دیگر در باب معلوم کردن قاسم مشترک اعظم جملهای جبریه

فرض کنید که اوب دو جملهٔ جبریه است و نیز فرض کنید که اوب هیچ جمله ذو حد واحد مضروب مشترک ندارد پس اگر م و ن و ط و ق این قسم چهار عدد باشند که م ق − ن ط صفر نباشد پس در انصورت قاسم مشترک اعظم اوب بعینه قاسم مشترک اعظم م ا + ن ب و ط ا + ق ب میباشد بشرط اینکه مضروبات مشترک عددی قبل از عمل جدا شوند۔ و دلیل قواعد سابقه بقرار ذیل است :-

فرض کنید که ع قاسم مشترک اعظم اوب و ع قاسم مشترک اعظم م ا + ن ب

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 226 of 308

وط ا + و ب میباشد (بعد از جدا کردن مضروبات عددی مشترکه) وچون
هر مضروب مشترک ا و ب مضروب م ا + ن ب وط ا + و ب میباشد
لهذا ع مضروب مشترک م ا + ن ب وط ا + و ب است
پس ظاهر است که ع یا مساوی ع یا در جه ع از درجه ع زیادتر خواهد بود.... (ل)
وباز چون و (م ا + ن ب) - ن (ط ا - و ب) = (م و - ن ط) ا
و م (ط ا + و ب) - ط (م ا + ن ب) = (م و - ن ط) ب
لهذا ظاهر است که هر مضروب مشترک م ا + ن ب وط ا + و ب
مضروب (م ق - ن ط) ا ونیز مضروب (م و - ن ط) ب میباشد
وچون (م و - ن ط) مقدار عددیست
لهذا هر مضروب مشترک دو جمله فوق (بغیر مضروبات عددی) مضروب ا
ونیز مضروب ب میباشد بنابرین ع مضروب مشترک ا و ب است
وبهمین دلیل درجه آن از ع زیاده شده نمیتواند پس از روی (ل) ع = ع
نتیجه ۱ قاسم مشترک اعظم ا و ب بعینه قاسم مشترک اعظم ا + ب و ا - ب است
زیرا که در اینصورت م = ا ون = ا وط = ا و و - ا
نتیجه ۲ قاسم مشترک اعظم ا و ب بعینه قاسم مشترک اعظم ا ± ب و ب است
زیرا که م = ا ون = ± ا وط = ۰ و و = ا
وهمچنین قاسم مشترک اعظم ا ب مساوی قاسم مشترک اعظم ا ± ب و ا میباشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 227 of 308

مثال ۱ قاسم مشترک اعظم $لا^۴+لا^۳-۵لا^۲-۳لا+۲$ و $لا^۳-۳لا^۲+لا^۲+۳لا-۲$ معلوم کنید

فرض کنید کہ $ا=لا^۴+لا^۳-۵لا^۲-۳لا+۲$ و $ب=لا^۳-۳لا^۲+لا^۲+۳لا-۲$

پس $ا+ب=۲لا^۳-۲لا^۲-۴لا$ $=۲لا(لا^۲-لا-۲)$

و $ا-ب=۴لا^۳-۶لا^۲-۶لا+۴$ $=۲(۲لا^۳-۳لا^۲-۳لا+۲)$

پس ازروی نتیجۂ اول قاسم مشترک اعظم مطلوب یعنہ قاسم مشترک اعظم $لا(لا^۲-لا-۲)$ و $۲لا^۳-۳لا^۲-۳لا+۲$ میباشد یعنی قاسم مشترک اعظم $(لا^۲-لا-۲)$ و $۲لا^۳-۳لا^۲-۳لا+۲$

فرض کنید کہ $ا=لا^۲-لا-۲$ و $ب=۲لا^۳-۳لا^۲-۳لا+۲$

پس $ا+ب=۲لا^۲-۲لا^۲-۴لا$ $=۲لا(لا^۲-لا-۲)$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب = قاسم مشترک اعظم $ا$ و $ا+ب$ [بقرار نتیجہ دوم]

$=لا^۲-لا-۲$

مثال ۲ قاسم مشترک اعظم $۴لا^۴+۱۱لا^۳+۲۷لا^۲+۱۷لا+۵$ و $۳لا^۴+۷لا^۳+۱۸لا^۲+۷لا+۵$ را معلوم کنید:-

فرض کنید کہ $ا=۴لا^۴+۱۱لا^۳+۲۷لا^۲+۱۷لا+۵$ و $ب=۳لا^۴+۷لا^۳+۱۸لا^۲+۷لا+۵$

لہذا $ا-ب=لا^۴+۴لا^۳+۹لا^۲+۱۰لا$ $=لا(لا^۳+۴لا^۲+۹لا+۱۰)$

و $۳ا-۴ب=۵لا^۳+۹لا^۲+۲۳لا-۵$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب = قاسم مشترک اعظم $لا^۳+۴لا^۲+۹لا+۱۰$ و $۵لا^۳+۹لا^۲+۲۳لا-۵$

و نیز فرض کنید کہ $ا=لا^۳+۴لا^۲+۹لا+۱۰$ و $ب=۵لا^۳+۹لا^۲+۲۳لا-۵$

پس $ا+۲ب=۱۱لا^۳+۲۲لا^۲+۵۵لا$ $=۱۱لا(لا^۲+۲لا+۵)$

و $۵ا-ب=۱۱لا^۳+۲۲لا+۵۵$ $=۱۱(لا^۳+۲لا+۵)$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب = قاسم مشترک اعظم $لا(لا^۲+۲لا+۵)$

و $لا^۲+۲لا+۵$ میباشد یعنی $=لا^۲+۲لا+۵$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 228 of 308

مثال ۳ قاسم مشترک اعظم $۲لا^۳-۱۱لا^۲+۹$ و $۳لا^۳+۱۷لا^۲+۲۰$ چه باشد

فرض کنید که $ا = ۲لا^۳-۱۱لا^۲+۸۱$ و $ب = ۲لا^۳-۱۱لا+۹$

لہذا $ا-۲ب = ۱۱لا^۲+۲۲لا+۹۹ = ۱۱(لا^۲+۲لا+۹)$

و $ا+۹ب = ۲۲لا^۳+۱۱لا^۲-۹۹لا = ۱۱لا(۲لا^۲+لا-۹)$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب = قاسم مشترک اعظم $لا^۲+۲لا+۹$ و $لا(۲لا^۲+لا-۹)$

= قاسم مشترک اعظم $لا^۲+۲لا+۹$ و $۲لا^۳+لا^۲-۹$

و نیز فرض کنید که $ا = لا^۲+۲لا+۹$ و $ب = ۲لا^۲+لا-۹$

$\therefore ا+ب = لا^۲+۲لا^۲+۳لا = لا(لا^۲+۲لا+۳)$

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب = قاسم مشترک اعظم $۲لا^۲+لا-۹ = ب$ و $لا^۲+۲لا+۳ = ج$ فرضاً

و چون $ب+۳ج = ۲لا^۲+۴لا^۲+۶لا = ۲لا(لا^۲+۲لا+۳)$

$\therefore$ قاسم مشترک اعظم مطلوب = قاسم مشترک اعظم $ج$ و $ب+۳ج = لا^۲+۲لا+۳$

مسئلہ (۵۱)

قاسم مشترک اعظم جملہائے ذیل را معلوم کنید:

(۱) $لا^۲-۳لا^۲-۴لا+۱۲$ و $لا^۲-۷لا^۲+۱۶لا-۱۲$

(۲) $۲لا^۲-۷لا^۲+۱۷لا-۱۲$ و $۳لا^۲-۲لا^۲-۳۴لا^۲+۴۱لا-۱۲$

(۳) $۴لا^۲+۱۳لا^۲+۱۹لا+۴$ و $۳لا^۲+۵لا^۲+۵لا-۴$

(۴) $۳لا^۲-۵لا^۲+۷$ و $۶لا^۲-۷لا^۲-۵لا^۲+۱۴لا+۷$

(۵) $۶لا^۲-۱۱لا^۲+۱۶لا^۲-۲۲لا+۸$ و $۶لا^۲-۱۱لا^۲-۸لا^۲+۲۲لا-۸$

(۶) $۲لا^۲+۱۹لا^۲+۲۰لا^۲-۳۱لا+۸$ و $۲۴لا^۲-۷۴لا^۲+۶۲لا^۲-۱۶$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 229 of 308

(۷) ۳لا⁴-۷لا³-۲۷لا²-۶لا+۲ و ۳لا³-۱۳لا²-۴۰لا-۹+۳

(۸) ۵لا⁴-۱۸لا³-۷لا²+۱۲لا+۳ و ۵لا³-۲۳لا²-۹لا+۱۶+۴

(۹) ۲لا⁴-۵لا³-۱۷لا²-۲لا+۲ و ۶لا³+۲۳لا²+۳۴لا+۲۱-۲لا-۲

(۱۰) ۶لا³+۹لا²-۱۳لا-۴لا+۹-۳ و ۹لا³+۱۲لا²-۱۸لا-۵لا+۱۲-۴

(۱۱) لا³-لا²+۸ و لا³-لا²+۴ (۱۲) ۳لا³+۱۳۹لا²-۴۴ و ۳۹لا³+۱۳۹لا²-۱۴

طریق معلوم کردن قاسم مشترک اعظم سه جمله جبریه یا زیاده

فرض کنید که اوب وج سه جمله جبریه است که قاسم مشترک اعظم انها مطلوب است مثلاً فرض کنید که ص قاسم مشترک اعظم اوب است و ع قاسم مشترک اعظم ص و ج پس چون ص حاصل ضرب همه مضروبات اصلیه و مشترکه اوب میباشد لهذا هر مضروب یا قاسم ص قاسم اوب نیز خواهد بود-

بنابرین هر قاسم مشترک ص و ج قاسم مشترک اوب وج نیز خواهد بود-

پس ع قاسم مشترک اوب وج نیز میباشد لهذا قاسم مشترک اعظم مطلوب یا مساوی ع یا مساوی آن جمله خواهد بود که درجه آن از درجه ع زیاده تر نباشد.... (م)

وچون هر قاسم مشترک اوب قاسم ص نیز میباشد

بنابرین هر قاسم مشترک اوب وج قاسم مشترک ص و ج نیز خواهد بود-

∴ قاسم مشترک اعظم مطلوب قاسم مشترک ص و ج میباشد بنابرین درجه آن از ع زیاده تر شده نمیتواند پس از روی (م) قاسم مشترک اعظم مطلوب = ع

و نیز از دلائل فوق ظاهر است که اگر درجه چهارم باشد قاسم مشترک اعظم

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 230 of 308

اوب وج ود بعینہ قاسم مشترک اعظم ع ود میباشد پس قاعدہ ذیل حاصل شد

قاعدہ معلوم کردن قاسم مشترک اعظم چند جملہ اوب وج ود وغیرہ اینست

کہ اولاً قاسم مشترک اعظم اوب را معلوم کنید وبعد ازان قاسم مشترک اعظم

این حاصل وج را معلوم کنید وعلی ہذا القیاس

پس حاصل اخیر قاسم مشترک اعظم مطلوب خواہد بود۔

مثال قاسم مشترک اعظم ۲لا⁴-۷لا³-۱۷لا²+۵۸لا-۲۴ و۳لا³+۱۴لا²

-۱۱لا-۷۰لا+۲۴ و۵لا²+۹لا-۷۴لا²-۱۸۱لا+۱۸ را معلوم کنید

اول قاسم مشترک اعظم دو جملہ اول را معلوم کنید

مثلاً فرض کنید کہ ا=۲لا⁴-۷لا³-۱۷لا²+۵۸لا-۲۴ و ب=۳لا³+۱۴لا²-۱۱لا-۷۰لا+۲۴

∴ ا+ب=۵لا²+۷لا-۲۸لا-۱۲ =لا(۵لا²+۷لا-۲۸لا-۱۲)

و-۳ا+۲ب=۴۹لا²+۲۹لا-۳۱۴لا+۱۲۰

پس قاسم مشترک اعظم اوب بعینہ قاسم مشترک اعظم ۵لا²+۷لا-۲۸لا-۱۲

و۴۹لا²+۲۹لا-۳۱۴لا+۱۲۰ میباشد

و نیز فرض کنید آ=۵لا²+۷لا-۲۸لا-۱۲ و ب=۴۹لا²+۲۹لا-۳۱۴لا+۱۲۰

∴ ۱۰آ+ب=۹۹لا²+۹۹لا-۵۹۴لا =۹۹لا(لا²+لا-۶)

پس قاسم مشترک اعظم اوب بعینہ قاسم مشترک اعظم ۵لا²+۷لا-۲۸لا-۱۲=(آ)

ولا²+لا-۶=ج فرضاً میباشد۔

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 231 of 308

وچون أ - ۲ ج = ۵ لا۲ + ۵ لا۲ - ۳۰ لا = ۵ لا (لا۲ + لا - ۶) قاسم مشترک اعظم
أ و ب = قاسم مشترک اعظم ج و أ - ۲ ج = لا۲ + لا - ۶
پس قاسم مشترک اعظم مطلوب مساوی قاسم مشترک اعظم لا۲ + لا - ۶
و ۵ لا۲ + ۹ لا۲ - ۴۷ لا۲ - ۸۱ لا + ۱۸۰ میباشد واین قاسم مشترک اعظم بطریق ذیل معلوم میشود

لا۲ + لا - ۶) ۵ لا۲ + ۹ لا۲ - ۴۷ لا۲ - ۸۱ لا + ۱۸۰ (۵ لا۲ + ۴ لا - ۳

۵ لا۲ + ۵ لا۲ - ۳۰ لا۲

۴ لا۲ - ۱۷ لا۲ - ۸۱ لا

۴ لا۲ + ۴ لا۲ - ۲۴ لا

- ۳) - ۲۱ لا۲ - ۵۷ لا + ۱۸

۷ لا۲ + ۱۹ لا - ۶ (۷

۷ لا۲ + ۷ لا - ۴۲

۱۲) ۱۲ لا + ۳۶

لا + ۳

لا + ۳) لا۲ + لا - ۶ (لا - ۲

لا۲ + ۳ لا

- ۲ لا - ۶

- ۲ لا - ۶

×

پس قاسم مشترک اعظم مطلوب = لا + ۳

مثله (۵۲)

قاسم مشترک اعظم جملهای ذیل را معلوم کنید :-

(۱) ۲ لا۲ + ۷ لا۲ - ۵ لا - ۴ و لا۲ + ۸ لا۲ + ۱۱ لا - ۲۰ و ۲ لا۲ + ۱۹ لا۲ + ۴۹ لا + ۲۰

(۲) ۲ لا۲ + ۳ لا۲ + ۸ لا۲ + ۱۵ لا - ۱۰ و ۲ لا۲ - ۵ لا۲ + ۱۲ لا۲ - ۲۵ لا + ۱۰ و ۲ لا۲ - ۵ لا۲ + ۱۰ لا۲ - ۲۰ لا + ۸

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 232 of 308

(۳) $۲ل^{۳}+۷ل^{۲}-۱۹ل^{۲}-۱۴ل+۳۰۰$ و $۳ل^{۳}+۵ل^{۲}-۱۶ل^{۲}-۱۰۰ل+۲۴$ و $۲ل^{۳}+۵ل^{۲}-۱۰ل^{۲}+۵ل-۱۲$

(۴) $۲ل^{۳}-۴ل^{۲}-۶۹ل^{۲}-۱۲ل-۳۵$ و $۲ل^{۳}-۶ل^{۲}-۵۵ل^{۲}-۳۰۰ل-۲۸$ و $۲ل^{۳}+۸ل^{۲}+۴۱ل^{۲}+۱۹ل+۲۰$

(۵) $۳ز^{۲}+۲۸وب+۵۲اب^{۲}-۴۸ب^{۳}$ و $۳ز^{۲}+۴وب-۲۸وب^{۲}+۱۶اب^{۳}$
و $۳وز^{۲}+۱۰اوب-۴۴وب^{۲}+۲۴ب^{۳}$

(۶) $۶ز^{۲}+۵وب-۳۴وب^{۲}+۱۵اب^{۳}$ و $۶ز^{۲}-۳۷وب+۷۵اب^{۲}-۲۰ب^{۳}$
و $۳وز^{۲}-۸اوب-۳۱وب^{۲}+۶۰ب^{۳}$

(۷) $۳ل^{۳}+۱۱ل^{۲}-۳۲ل^{۲}-۴۴ل+۸۰$ و $۳ل^{۳}-ل^{۲}-۵۲ل^{۲}+۱۲۴ل-۸۰$

و $۳ل^{۳}+۲ل^{۲}-۲۰۰ل^{۲}-۸ل+۳۲$ و $۳ل^{۳}+۲ل^{۲}-۸۳ل^{۲}-۵۰۰ل+۲۰۰$

(۸) $۶ل^{۵}+۱۴ل^{۴}-۵۳ل^{۳}-۳۷ل^{۲}+۶۶ل+۲۴$ و $۶ل^{۵}-۲۸ل^{۴}+۱۷ل^{۳}+۵۴ل^{۲}-۳۹ل-۱۸$

و $۶ل^{۵}+۸ل^{۴}-۷۹ل^{۳}-۳۶ل^{۲}+۱۰۵ل+۳۶$ و $۲ل^{۵}-۲ل^{۴}-۳۱ل^{۳}+۵۱ل^{۲}+۴۲ل-۷۲$

باب دہم

ذو اضعاف اقل یا مثل مشترک اصغر

۸۷ تعریف

ہرگاہ یک جملہ جبریہ بر جملہ دیگر بدون باقی تقسیم شود جملہ اول را مثل جملہ دوم میگویند
و نیز ہرگاہ یک جملہ جبریہ بر دو یا زیادہ جملہ جبریہ بدون باقی تقسیم شود جملہ اول مثل
مشترک جملہاے دیگر میگویند۔ از امثال مشترکہ دو یا زیادہ جملہ جبریہ آن مثل را
کہ اقل امثال مشترکہ باشد ذو اضعاف اقل یا مثل مشترک اصغر میگویند

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 233 of 308

مثلاً امثال مشترک ا و ب ہر یکی از ا ب و ۲ ا ب و ا ب² و ا² ب وغیرہ میباشد
لیکن از امثال مذکور ا ب اقل امثال مشترک میباشد لہذا ا ب مثل مشترک اصغر ا و ب میباشد

۸۸ طریق دریافت نمودن مثل مشترک اصغر جملہائے بسیط یا جملہائے مرکب کہ بآسانی مضروبات تفریق شدہ میتوانند

در صورتہائے فوق مثل مشترک اصغر بیک نظر نوشتہ شدہ میتواند امثلہ ذیل تشریح طریق عمل را میکنند

مثال ۱ مثل مشترک اصغر ۴ ا² ب ج و ۶ ا ب² را معلوم کنید

جملہ اول = ۲ × ا² × ب × ج جملہ دوم = ۲ × ۳ × ا × ب² × د

لہذا ۲² × ۳ × ا² × ب² ج × د مضروبات اصلیہ مثل مشترک اصغر جملہائے مفروضہ میباشد

∴ مثل مشترک اصغر مطلوب = ۲² × ۳ × ا² × ب² ج × د = ۱۲ ا² ب² ج د

مثال ۲ مثل مشترک اصغر ۲۴ لا³ ی ع و ۱۸ لا³ ی² ع و ۷۲ لا³ ی ع² را دریافت کنید

جملہ اول = ۲³ × ۳ × لا³ × ی × ع وجملہ دوم = ۲ × ۳² × لا × ی² × ع²

وجملہ سوم = ۳ × لا³ × ی² × ع²

لہذا ۲³ × ۳² × لا³ × ی² × ع² مضروبات اصلیہ مثل مشترک جملہائے مفروضہ میباشد

∴ مثل مشترک اصغر مطلوب = ۲³ × ۳² × لا³ × ی² × ع² = ۲۱۶ لا³ ی² ع²

مثال ۳ مثل مشترک اصغر ۴ لا (لا + ا)² و ۶ لا (لا − ا) و ۹ لا (لا − ا)² را معلوم کنید

جملہ اول = ۲² × لا (لا + ا)² وجملہ دوم = ۳ × ۳ × لا × لا × (لا + ا) (لا − ا)

وجملہ سوم = ۳² × لا² × (لا − ا) (لا + ا لا + ا²)

لہذا ۲² × ۳² × لا² × (لا + ا)² (لا − ا) (لا + ا لا + ا²) مضروبات اصلیہ مثل
مشترک اصغر جملہائے مفروضہ میباشد۔

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 234 of 308

∴ مثل مشترک اصغر مطلوب = ۲² × ۳² × و² × لآ (لا + و)² (لا − و) × (لآ + ولا + و²)

= ۳۶ و² لآ (لا + و²) (لآ − و²)

مثال ۴ مثل مشترک اصغر لآ − ۳لا + ۲ و ولآ + ۲ لآ − ۳لا و + لآ − ۶ لآ را دریافت کنید

جملہ اول = (لا − ۱) (لا − ۲) جملہ دوم = لا (لآ + ۲لا − ۳) = لا (لا − ۱) (لا + ۳)

و جملہ سوم = لآ (لآ + لا − ۶) = لآ (لا − ۲) (لا + ۳)

لہذا لآ (لا − ۱) (لا − ۲) (لا + ۳) مضروبات اصلیہ مثل مشترک اصغر جملہائے مفروضہ میباشد

∴ مثل مشترک اصغر مطلوب = لآ (لا − ۱) (لا − ۲) (لا + ۳)

مثال ۵ مثل مشترک اصغر لآ − ۳لآ + ۳لا − ۱ و لآ − لآ − لا + ۱

و لآ − ۲لآ + ۲لا − ۱ و لآ − ۲لآ + ۲لآ − ۲لا + ۱ را معلوم کنید:-

لآ − ۳لآ + ۳لا − ۱ = (لا − ۱)³ و لآ − لآ − لا + ۱ = لآ (لا − ۱) − (لا − ۱)

= (لا − ۱) (لآ − ۱) = (لا − ۱)² (لا + ۱)

و لآ − ۲لآ + ۲لا − ۱ = (لآ − ۱) − ۲لا (لآ − ۱) = (لآ − ۱) {(لآ + ۱) − ۲لا}

= (لآ − ۱) (لا − ۱)² = (لا − ۱)² (لا + ۱)

و لآ − ۲لآ + ۲لآ − ۲لا + ۱ = لآ (لآ − ۲لا + ۱) + (لآ − ۲لا + ۱) = (لآ − ۲لا + ۱) (لآ + ۱)

= (لا − ۱)² (لآ + ۱)

لہذا (لا − ۱)² (لا + ۱) (لآ + ۱) مضروبات اصلیہ مثل مشترک اصغر جملہائے مفروضہ میباشد

∴ مثل مشترک اصغر مطلوب = (لا − ۱)² (لا + ۱) (لآ + ۱)

امثلہ (۵۳)

مثل مشترک اصغر جملہائے ذیل را معلوم کنید:-

(۱) وآب و اب² (۲) وآب² و آب ج (۳) ۶ لآی² و ۱۰ لای² (۴) ۴ مآن² و ۱۴ امآن² جا

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 235 of 308

(۵) ۸لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲} و ۱۲لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲} (۶) ۴و^{۲}ب^{۲}ج^{۲} و ۱۰او^{۲}ب^{۲}ج^{۲} و ۱۴او^{۲}ب^{۲}ج^{۲}

(۷) ۸و^{۲}ب^{۲}ج^{۲} و ۱۲او^{۲}ب^{۲}ج^{۲} و ۲۰و^{۲}ب^{۲}ج^{۲} (۸) ۶لا^{۲}ی^{۲} و ۹لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲} و ۱۲او^{۲}لا^{۲}ی^{۲} و ۱۵او^{۲}لا^{۲}ع^{۲}

(۹) او^{۲}ب^{۲} - او^{۲}ب^{۲} و او^{۲}ب^{۲} + او^{۲}ب^{۲} (۱۰) ۴(لا - ی)^{۲} و ۶(لا^{۲} - ی^{۲}) و ۸(لا + ی)^{۲}

(۱۱) لا^{۲} - ۴لا + ۳ و لا^{۲} - ۵لا + ۶ (۱۲) و^{۲} + ۲و^{۲}لا - ۳و^{۲}لا^{۲} و و^{۲} + و^{۲}لا - ۶و^{۲}لا^{۲}

(۱۳) و^{۲} (و^{۲} - ۴) و و^{۲} + ۲و^{۲} - ۸و^{۲} (۱۴) ۴و^{۲}لا^{۲} و ۲و^{۲}لا (لا^{۲} - و^{۲}) و ۶و^{۲}لا^{۲} (لا^{۲} + و^{۲})

(۱۵) ۱۲ (لا^{۲} + ۳لا - ۱۰) و ۱۶ (لا^{۲} + ۴لا - ۱۲) (۱۶) لا^{۲} + ۲لا - ۱۵ او لا^{۲} + ۹لا + ۲۰ و لا^{۲} + ۴لا - ۲۱

(۱۷) ۱۲و^{۲} - ۲۷و^{۲}ب^{۲} و ۲و^{۲} + او ب - ۳ب^{۲} و ۲و^{۲} - او ب - ۳ب^{۲}

(۱۸) ۸و^{۲} + ۲۷ب^{۲} و ۸و^{۲} - ۲۷ب^{۲} و ۱۶و^{۲} + ۳۶و^{۲}ب^{۲} + ۸۱ب^{۲}

(۱۹) ۸لا^{۲} - ۵۰لا^{۲}ی^{۲} و ۱۲لا^{۲} + ۲۴لا^{۲}ی^{۲} - ۱۵لا^{۲}ی^{۲} و ۱۶لا^{۲} - ۴۸لا^{۲}ی^{۲} + ۲۰ی^{۲}

(۲۰) ۴لا^{۲} - ۱۲او لا + ۹و^{۲} و ۶لا^{۲} - ۷او لا - ۳و^{۲} و ۶لا^{۲} - ۱۱او لا + ۳و^{۲}

(۲۱) ۲لا^{۲} + ۶لا + ۹ و ۴لا^{۲} - ۱۲لا^{۲} + ۱۸لا و ۴لا^{۲} + ۸۱

(۲۲) ۹و^{۲} - ۶او لا + لا^{۲} و ۶و^{۲} + ۱۰او لا - ۴لا^{۲} و ۹و^{۲} - ۱۲او لا + ۶لا^{۲}

(۲۳) ۸لا^{۲} - ۱۲لا^{۲} + ۶لا - ۱ و ۸لا^{۲} - ۴لا^{۲} - ۱۲لا + ۱ و ۲لا^{۲} + ۵لا - ۳

(۲۴) لا^{۲} - ۶لا ی + ۸ی^{۲} و لا^{۲} - ۷لا ی + ۱۲ی^{۲} و لا^{۲} + ۲لا ی - ۱۵ی^{۲} و لا^{۲} + لا ی - ۲۰ی^{۲}

(۲۵) ۶لا^{۲} - لا - ۱ و ۳لا^{۲} + ۷لا + ۲ و ۲لا^{۲} + ۳لا - ۲

(۲۶) ۱ + ۴لا + ۴لا^{۲} - ۱۶لا^{۲} و ۱ + ۲لا - ۸لا^{۲} - ۱۶لا^{۲}

(۲۷) ۹لا^{۲} - ۲۸لا^{۲} + ۳ و ۲۷لا^{۲} - ۱۲لا^{۲} + ۱ و ۲۷لا^{۲} + ۶لا^{۲} - ۱ و لا^{۲} - ۶لا^{۲} + ۹

برائے حل این مثال اخیر اولاً مضروبات جملۂ اخیر را معلوم کنید و بوساطت آن مضروبات جملۂ اول را دریافت کنید :-

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 236 of 308

۸۹ طریق دریافت نمودن مثل مشترک اصغر دو جمله که مضروبات اصلیه آنها ظاهر نباشد۔

فرض کنید که اوب دو جمله جبریه است و قاسم مشترک اعظم آنها = ع است
پس اوب را بر ع تقسیم کنید و فرض کنید که خارج قسمت اوب میباشند

لهذا ا = اَ ع و ب = بَ ع

وچون اَ بَ هیچ یک مضروب اصلی مشترک ندارند۔ لهذا هر مثل مشترک
اوب بالضرور بر اَ × ع × بَ بطور مضروب شامل میباشد

لهذا مثل مشترک اصغر مطلوب = اَ ع بَ

وچون اَ ع بَ = اَ (ع بَ) = $\frac{ا}{ع}$ × ب

یا = (اَ ع) بَ = ا × $\frac{ب}{ع}$

لهذا مثل مشترک اصغر مطلوب = $\frac{ا}{ع}$ × ب

یا = ا × $\frac{ب}{ع}$

پس برائے دریافت نمودن مثل مشترک اصغر دو جمله جبریه یکی را
بر قاسم مشترک اعظم آنها تقسیم کنید و خارج قسمت را در جمله دوم ضرب بکنید

نتیجه اگر ص مثل مشترک اصغر اوب باشد ظاهر است که

ص × ع = ا × ب پس حاصل ضرب مثل مشترک اصغر
و قاسم مشترک اعظم دو جمله جبریه مساوی حاصل ضرب دو جمله مفروضه خود میباشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 237 of 308

مثال مثل مشترک صغر ۶لا۲+۲۵لا+۱۶لا+۷ و ۶لا۲-۱۱لا-۸لا-۵ را دریابید

۶لا۲-۱۱لا-۸لا-۵) ۶لا۲+۲۵لا۲+۱۶لا+۷ (۱

۶لا۲-۱۱لا۲-۸لا-۵

۱۲) ۳۶لا۲+۲۴لا+۱۲

۳لا۲+۲لا-۱

۳لا۲+۲لا+۱) ۶لا۲-۱۱لا۲-۸لا-۵ (۲لا-۵

۶لا۲+۴لا۲+۲لا

-۱۵لا۲-۱۰لا-۵

-۱۵لا۲-۱۰لا-۵

×

∴ قاسم مشترک اعظم جملہائے مفروضہ = ۳لا۲+۲لا+۱

ومثل مشترک اصغر مطلوب = $\frac{۶لا۲-۱۱لا۲-۸لا-۵}{۳لا۲+۲لا+۱}$ (۶لا۲+۲۵لا۲+۱۶لا+۷)

= (۲لا-۵)(۶لا۲+۲۵لا۲+۱۶لا+۷)

= ۱۲لا۳+۲۰لا۲-۹۳لا۲-۶۶لا-۳۵

مسئلہ (۵۴)

مثل مشترک اصغر جملہائے ذیل را معلوم کنید:-

(۱) ۳لا۲+۲لا۲-۱۱لا+۴ و ۳لا۲+۱۴لا۲+۱۳لا-۸

(۲) ۶لا۲+۱۷لا۲+۹لا-۴ و ۶لا۲-۷لا۲-۲۷لا+۸

(۳) ۱۲لا۲-۴لا۲-۲۵لا+۱۲ و ۱۲لا۲-۲۸لا۲+۷لا+۱۲

(۴) ۹لا۲-۱۲لا۲-۱۵لا+۲۰ و ۱۵لا۲+۱۲لا۲-۲۵لا-۲۰

(۵) ۴لا۲-۱۰لا۲-۱۸لا+۴۵ و ۶لا۲+۸لا۲-۲۷لا-۳۶

(۶) ۴لا۲+۴لا۲+۷لا۲+۱۱لا+۴ و ۶لا۲+۷لا۲+۴لا۲+۵لا+۲

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 238 of 308

(۷) ۸لا^{۳}-۶لا^{۲}-۸لا+۹لا-۶ و ۱۶لا^{۳}-۱۲لا^{۲}+۲۰لا^{۲}-۹لا+۶

(۸) ۴لا^{۳}+۸لا^{۲}+۲۱لا^{۲}+۱۸لا+۲۷ و ۳لا^{۳}+۶لا^{۲}+۷لا^{۲}+۱۶لا+۲۴

(۹) اگر ع قاسم مشترک اعظم وص مثل مشترک اصغر دو جملہ لاوی باشد ونیز اگر ع ص =لا+ی باشد پس ثابت کنید کہ ع^{۲}+ص^{۲}=لا^{۲}+ی^{۲}

۹۰ طریق دریافت نمودن مثل مشترک اصغر سہ جملہ یا زیادہ کہ مضروبات آنہا ظاہر نباشد۔

فرض کنید کہ اوب وج سہ جملہ جبریہ وص مثل مشترک اصغر اوب وق مثل مشترک اصغر ص وج است

پس ظاہر است کہ ہر مثل مشترک ص وج مثل مشترک اوب وج نیز میباشد.....(۱)

ونیز ہر مثل مشترک اوب وج مثل مشترک ص وج نیز میباشد.....(۲)

از (۱) ظاہر است کہ ق مثل مشترک اوب وج است۔ لہذا ق یا یک جملہ دیگر کہ درجہ آن از ق کمتر باشد مثل مشترک اصغر اوب وج خواہد بود وچون آن جملہ کہ درجہ آن از ق کمتر باشد مثل مشترک صغر اوب وج شدہ نمیتواند زیرا کہ از (۲) ظاہر است کہ مثل مشترک اصغر اوب وج مثل مشترک ص وج ست پس مثل مشترک اصغر مطلوب = ق خواہد بود۔

بنابرین برائے دریافت نمودن مثل مشترک اصغر چند جملہ اول اوب وج ودو وغیرہ اولا مثل مشترک اصغر اوب را معلوم کنید بعد ازان مثل مشترک اصغر این حاصل وج را وعلے ہذا القیاس پس حاصل اخیر مثل مشترک اصغر مطلوب خواہد بود

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 239 of 308

مثال مثل مشترک صغر ۶لا۲-۱۱لا+۳ و۴لا۲-۴لا-۳ و۶لا۲+۲۵لا-۹ را دریافت کنید

۶لا۲-۱۱لا+۳) ۶لا۲+۲۵لا-۹ (۱

۶لا۲-۱۱لا+۳

۳۶لا-۱۲) ۱۲

۳لا-۱

۳لا-۱) ۶لا۲-۱۱لا+۳ (۳-۲لا

۶لا۲-۲لا

-۹لا+۳

-۹لا+۳

قاسم مشترک اعظم ۶لا۲-۱۱لا+۳ × ۳ و۶لا۲+۲۵لا-۹ = ۳لا-۱

لہذا مثل مشترک صغر دو جملہ فوق = $\frac{۶لا۲-۱۱لا+۳}{۳لا-۱}$ (۶لا۲+۲۵لا-۹)

= ۶(۳-۲لا)(لا۲+۲۵لا-۹)

= ۱۲لا۲+۳۲لا۲-۹۳لا+۲۷

وچون مثل مشترک صغر این جملہ و ۴لا۲-۴لا-۳ را معلوم شود

۴لا۲-۴لا-۳) ۱۲لا۲+۳۲لا۲-۹۳لا+۲۷ (۳لا+۱۱

۱۲لا۲-۱۲لا۲-۹لا

۴۴لا۲-۸۴لا+۲۷

۴۴لا۲-۴۴لا-۳۳

-۴۰لا+۶۰) -۲۰

۳-۲لا

۳-۲لا) ۴لا۲-۴لا-۳ (۱+۲لا

۴لا۲-۶لا

۳-۲لا

۳-۲لا

پس قاسم مشترک اعظم این دو جملہ = ۳-۲لا

لہذا مثل مشترک آنہا = $\frac{۴لا۲-۴لا-۳}{۳-۲لا}$ (۱۲لا۲+۳۲لا۲-۹۳لا+۲۷)

= (۱+۲لا)(۱۲لا۲+۳۲لا۲-۹۳لا+۲۷)

= ۲۴لا۲+۷۶لا۲-۱۵۴لا۲-۳۹لا+۲۷

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 240 of 308

امثله (۵۵)

مثل مشترک اصغر جملهای ذیل را معلوم کنید :-

(۱) $۳لا^{۲}-۱۰لا-۸$ و $۴لا^{۲}-۲۰لا+۹$ و $۶لا^{۲}+لا-۲$

(۲) $۳لا^{۲}-۲۳لا-۸$ و $۶لا^{۲}-۷لا-۳$ و $۲لا^{۲}-۱۱لا+۱۲$

(۳) $۶لا^{۲}-۱۹لا+۱۰$ و $۱۲لا^{۲}-۱۱لا+۲$ و $۸لا^{۲}+۱۰لا-۳$

(۴) $۲لا^{۲}+۴لا^{۲}+لا^{۲}+۶لا-۳$ و $۴لا^{۲}+۸لا^{۲}-۷لا^{۲}-۶لا+۳$ و $۸لا^{۲}+۴لا^{۲}-۲لا^{۲}-۳لا-۳$

باب یازدهم

کسور

۹۱ تعریف

برای هر قسم قیمت عددی او ب کسر جبری $\frac{ا}{ب}$ ان مقدار است که اگر در ب ضرب شود حاصل ا میباشد یعنی از $\frac{ا}{ب}$ مراد ا ÷ ب میباشد و در کسر جبری $\frac{ا}{ب}$ ا را **صورت** و ب را **مخرج** میگویند

تنبیه از تعریف فوق ظاهر است که کسر جبری محض آن خارج قسمت میباشد که در ان مقسوم بالای یک خط عرضی نوشته میشود و مقسوم علیه زیر خط و نیز مقسوم را که بصورت فوق نوشته شود صورت میگویند و مقسوم علیه را مخرج

۹۲ اگر صورت و مخرج کسور جبریه را در یک مقدار غیر معین ضرب نموده یا بران تقسیم شود در قیمت کسور مذکور هیچ تفاوت پیدا نمیشود

اثبات این امر که برای هر قیمت عددی ا و ب و م $\frac{ا}{ب} = \frac{ام}{بم}$ میباشد

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 241 of 308

فرض کنید کہ لا = $\frac{ا}{ب}$ ∴ لا × ب = $\frac{ا}{ب}$ × ب = ا ..... (بحکم تعریف فقرہ ۹۱)

∴ لا × م × ب = ا × م یا لا × ب م = ام لہذا لا = ام ÷ ب م یعنی $\frac{ا}{ب}$ = $\frac{ام}{ب م}$

و نیز برعکس آن چون $\frac{ام}{ب م}$ = $\frac{ا}{ب}$ ∴ $\frac{ام}{ب م}$ = $\frac{ام ÷ م}{ب م ÷ م}$ وہو المراد

نتیجہ = $\frac{ا}{ب}$ = $\frac{ا \times (-1)}{ب \times (-1)}$ = $\frac{-ا}{-ب}$

یعنے اگر علامات صورت و مخرج یک کسر جبری تبدیل شود در قیمت کسر ہیچ فرق واقع نمیشود :-

۹۳ طریق اختصار کسور جبریہ

کسر مختصر آنست کہ صورت و مخرج آن ہیچ مضروب مشترک نداشتہ باشد

پس مفہوم اختصار یک کسر جبری اینست کہ یک کسر دیگر مساوی کسر مفروض اینقسم معلوم شود کہ صورت و مخرج آن ہیچ مضروب مشترک نداشتہ باشد

ظاہر است کہ اگر صورت و مخرج کسر بر قاسم مشترک اعظم آنہا تقسیم شود کسر مذکور مختصر میشود :-

تنبیہ اگر مضروبات صورت و مخرج ظاہر باشند پس برای اختصار کسر ہمینقدر کافیست کہ مضروبات مشترک صورت و مخرج برداشتہ شود -

مثال ۱ $\frac{۴ ا^۲ ب^۳ ج^۲}{۱۰ ا ب^۲ ج^۲}$ را مختصر کنید :-

$\frac{۴ ا^۲ ب^۳ ج^۲}{۱۰ ا ب^۲ ج^۲}$ = $\frac{۲ \times ۲ \times ا^۲ \times ب^۲ \times ج^۲}{۲ \times ۵ \times ا \times ب^۲ \times ج^۲}$

= $\frac{۲ ا}{۵ ب}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 242 of 308

مثال ۲ $\frac{و^2 ب^2 (و^2 - ب^2)}{3 و ب^2 (و^2 + ب^2)}$ را مختصر کنید

$$\frac{و^2 ب^2 (و^2 - ب^2)}{3 و ب^2 (و^2 + ب^2)} = \frac{و^2 ب^2 (و + ب)(و - ب)}{3 و ب^2 (و + ب)(و^2 - و ب + ب^2)} = \frac{و (و - ب)}{3 ب (و^2 - و ب + ب^2)}$$

مثال ۳ $\frac{ل^2 + 3 ل - 40}{ل^2 + 4 ل - 32}$ را مختصر کنید

صورت $= (ل + 8)(ل - 5)$ و مخرج $= (ل + 8)(ل - 4)$

$\therefore$ کسر مفروض $= \frac{(ل + 8)(ل - 5)}{(ل + 8)(ل - 4)} = \frac{ل - 5}{ل - 4}$

مثال ۴ $\frac{2 و^2 + 3 و ل - 2 و ب - 3 ب ل}{3 و^2 - 2 و ل - 3 و ب + 2 ب ل}$ را مختصر کنید:-

صورت $= 2 و (و - ب) + 3 ل (و - ب) = (2 و + 3 ل)(و - ب)$

و مخرج $= 3 و (و - ب) - 2 ل (و - ب) = (3 و - 2 ل)(و - ب)$

$\therefore$ کسر مفروض $= \frac{(2 و + 3 ل)(و - ب)}{(3 و - 2 ل)(و - ب)} = \frac{2 و + 3 ل}{3 و - 2 ل}$

مثال ۵ $\frac{3 ل^3 - 27 و ل^2 - 87 و^2 ل - 27 و^3}{2 ل^3 + 10 و ل^2 - 4 و^2 ل - 48 و^3}$ را مختصر کنید

صورت $= 3 (ل^2 - 9 و ل^2 + 26 و^2 ل - 24 و^3)$ و مخرج $= 2 (ل^2 + 5 و ل^2 - 2 و^2 ل - 24 و^3)$

قاسم مشترک اعظم ان دونوں کا معلوم کرنا:-

$$ل^2 + 5 و ل^2 - 2 و^2 ل - 24 و^3$$
$$ل^2 - 9 و ل^2 + 26 و^2 ل - 24 و^3$$

$14 و ل^2 - 28 و^2 ل$) $14 و ل^2 - 28 و^2 ل$

$ل - 2 و$

$ل - 2 و$) $ل^2 - 9 و ل^2 + 26 و^2 ل - 24 و^3$ ($ل^2 - 7 و ل + 12 و^2$

$ل^2 - 2 و ل^2$

$- 7 و ل^2 + 26 و^2 ل$

$- 7 و ل^2 + 14 و^2 ل$

$12 و^2 ل - 24 و^3$

$12 و^2 ل - 24 و^3$

$\therefore$ قاسم مشترک اعظم $= ل - 2 و$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 243 of 308

لهذا حاصل مطلوب $= \frac{\{۳(لا^۲-۹لا+۲۶)(لا^۲-۲۴)\}\div(لا-۱۲)}{\{۲(لا^۲+۵لا-۲۰)(لا^۲-۲۴)\}\div(لا-۱۲)}$

$= \frac{۳(لا^۲-۷لا+۱۲)}{۲(لا^۲+۷لا+۱۲)}$

مثال ۶ $\frac{۲لا^۳-لا^۲-۹لا^۲+۱۳لا-۵}{۷لا^۳-۱۹لا^۲+۱۷لا-۵}$ را مختصر کنید

قاسم مشترک اعظم صورت و مخرج را بطریق ذیل معلوم کنید

$۲لا^۳-لا^۲-۹لا^۲+۱۳لا-۵$

$۷لا^۳-۱۹لا^۲+۱۷لا-۵$

$۲لا \overline{)۲لا^۳-۸لا^۲+۱۰لا^۲-۴لا}$

$لا^۲-۴لا^۲+۵لا-۲$

$لا^۲-۴لا^۲+۵لا-۲ \overline{)۷لا^۳-۱۹لا^۲+۱۷لا-۵(۷}$

$۷لا^۳-۲۸لا^۲+۳۵لا-۱۴$

$۹ \overline{)۹لا^۲-۱۸لا+۹}$

$لا^۲-۲لا+۱$

$لا^۲-۲لا+۱ \overline{)لا^۳-۴لا^۲+۵لا-۲(لا-۲}$

$لا^۳-۲لا^۲+لا$

$-۲لا^۲+۴لا-۲$

$-۲لا^۲+۴لا-۲$

$\times$

∴ قاسم مشترک اعظم مطلوب $= لا-۲لا+۱$

لهذا حاصل مطلوب $= \frac{(۲لا^۳-لا^۲-۹لا^۲+۱۳لا-۵)\div(لا^۲-۲لا+۱)}{(۷لا^۳-۱۹لا^۲+۱۷لا-۵)\div(لا-۲لا+۱)}$

$= \frac{۲لا^۲+۳لا-۵}{۷لا-۵}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 244 of 308

مسئلہ (۵۶)

کسور ذیل را مختصر کنید :-

(۱) $\frac{۲ و^۳ ب^۳}{۴ و^۴ ب^۴}$ (۲) $\frac{۶ لا^۳ ی^۳}{۸ لا ی^۳}$ (۳) $\frac{۴ و^۳ لا ی^۳}{۱۰ و لا ی^۳}$

(۴) $\frac{۱۵ لا^۳ ی^۴ ع^۳}{۲۵ لا^۴ ی^۴ ع^۳}$ (۵) $\frac{۱۸ و^۳ ب ج^۳ د^۵}{۲۷ و^۴ ب ج^۳ د^۳}$ (۶) $\frac{۱۶ لا^۳ و^۳ ی^۴ ع^۵}{۴۰ و^۴ ع^۴ لا^۳ ی^۳}$

(۷) $\frac{۷۰ و^۳ ب^۳ ج^۴ د^۷}{۱۰۵ ج^۳ د^۳ و^۴ ب^۳}$ (۸) $\frac{۳۹ م^۳ ن^۵ ط^۳ ق}{۶۵ ط^۳ م^۳ ن ق^۹}$ (۹) $\frac{لا^۲ - و^۲}{لا^۲ + و لا}$

(۱۰) $\frac{لا^۲ - ۳ لا}{۹ لا - لا^۲}$ (۱۱) $\frac{۴ لا^۲ - ۹ و^۲}{۴ لا^۲ + ۶ و لا}$ (۱۲) $\frac{۳ و^۲ - ۱۲ و ب}{۴۸ ب^۲ - ۳ و^۲}$

(۱۳) $\frac{۳ و لا - ۱۲ و^۲}{لا^۲ - ۱۶ و^۲}$ (۱۴) $\frac{۲ لا^۲ - ۴ و^۲ لا^۲}{لا^۲ - ۴ و لا^۲ + ۴ و^۳}$ (۱۵) $\frac{۴ لا^۲ + ۸ لا}{لا^۲ + ۵ لا + ۶}$

(۱۶) $\frac{لا^۲ + ۲ لا - ۸}{لا^۲ + لا - ۱۲}$ (۱۷) $\frac{لا^۲ + ۲ لا - ۱۵}{لا^۲ + ۹ لا + ۲۰}$ (۱۸) $\frac{و^۲ - ۳ و ب - ۴ ب^۲}{و^۲ - ۴ و ب - ۵ ب^۲}$

(۱۹) $\frac{و^۳ - و^۲ ب + و ب^۲}{و^۳ + ب^۳}$ (۲۰) $\frac{۱ - ۷ لا + ۱۲ لا^۲}{۱ - ۸ لا + ۱۵ لا^۲}$ (۲۱) $\frac{لا^۲ - ۶ لا ی + ۵ ی^۲}{لا^۲ + ۲ لا ی - ۳۵ ی^۲}$

(۲۲) $\frac{۱ - ۹ و^۲ + ۱۴ و^۴}{۱ - ۴ و^۲ - ۲۱ و^۴}$ (۲۳) $\frac{لا^۳ - ۸ لا^۲ - ۶۵ لا}{لا^۳ + لا^۲ - ۲۰ لا}$ (۲۴) $\frac{۳ و^۳ لا + ۹ و^۲ لا^۲ + ۲۷ و لا^۳}{و^۳ - ۲۷ لا^۳}$

(۲۵) $\frac{۲ لا^۳ - لا^۲ - ۶ لا}{۳ لا^۳ - ۲ لا^۲ - ۸ لا}$ (۲۶) $\frac{۳ لا^۳ - ۵ و لا^۲ + ۲ و^۳ لا}{۳ لا^۳ + و لا^۲ - ۲ و^۳ لا}$ (۲۷) $\frac{۳ لا^۳ - ۱۶ و لا^۲ + ۵ و^۳ لا}{۳ لا^۳ + ۲۲ و لا^۲ + ۷ و^۳ لا}$

(۲۸) $\frac{۶ لا^۳ - ۷ لا^۲ - ۲ لا}{۹ لا^۳ + ۶ لا^۲ - ۸ لا}$ (۲۹) $\frac{۲ لا^۳ + ۳ و لا^۲ - ۲۰ و^۳ لا}{۳ لا^۳ + ۵ و لا^۲ - ۲۸ و^۳ لا}$ (۳۰) $\frac{۱۰ - ۱۷ و لا + ۳ و^۲ لا^۲}{۵ - ۲۶ و لا + ۵ و^۲ لا^۲}$

(۳۱) $\frac{لا^۲ - (۱ + ب) لا - و ب}{لا^۲ + ب لا^۲ + و لا + و ب}$ (۳۲) $\frac{۶ و ج + ۱۰ ب ج + ۹ و لا + ۱۵ ب لا}{۶ ج^۲ + ۹ ج لا - ۲ ج - ۳ لا}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 245 of 308

(۳۳) $\frac{۸ب لا + ۱۲ اب + ۶ لای + ۹ ای}{۱۲ ب لا + ۸ اب + ۹ لای + ۶ ای}$ (۳۴) $\frac{۲ا^۲ + اب - ب^۲}{ا^۲ + اب - ب^۲}$

(۳۵) $\frac{لا^۴ + ۴لا^۲ + لا - ۶}{لا^۲ + لا - ۲}$ (۳۶) $\frac{ا^۲ - ب^۲ - ۲ب ج - ج^۲}{ا^۲ + ۲اب + ب^۲ + ج^۲}$ (۳۷) $\frac{لا^۲ - ۷لا + ۶}{لا^۴ + ۲لا^۳ - ۱۳لا + ۱۰}$

(۳۸) $\frac{ا^۲ - ۲اب + ۳ب^۲}{ا^۴ - ۵اب + ۵اب - ۴ب^۴}$ (۳۹) $\frac{لا^۲ + (۲ب^۲ - ا^۲) لا + ب^۲}{لا^۴ + ۲ا لا^۳ + ا^۲ لا^۲ - ب^۴}$

(۴۰) $\frac{۳لا^۴ + ۴لا^۳ای - ۷لا^۲ای^۲ + ۲ای^۴}{۲لا^۴ + ۹لا^۳ای + ۸لا^۲ای^۲ - ۵ای^۴}$ (۴۱) $\frac{۱ + ۳لا - لا^۲ - ۳لا^۳}{۱ - لا + ۲لا^۲ + لا^۳ + ۳لا^۴}$

(۴۲) $\frac{لا^۴ - لا^۳ - لا + ۱}{لا^۴ - ۲لا^۳ - لا^۲ - ۲لا + ۱}$ (۴۳) $\frac{لا^۲ + لا^۲ + ۲۵}{لا^۴ - ۹لا^۲ + ۳۰لا - ۲۵}$

(۴۴) $\frac{۲لا^۲ + ۳ا لا^۲ + ۵ا^۲ لا - ۳ا^۳}{۴لا^۳ - ۱۲ا لا^۲ + ۱۹ا^۲ لا - ۱۵ا^۳}$ (۴۵) $\frac{۲لا^۲ + لا^۲ - ۳لا^۲ + ۲لا + ۳}{۳لا^۳ + لا^۲ - ۴لا^۲ + ۳لا + ۴}$

(۴۶) $\frac{۹لا^۲ - ۷ا لا - ۲ا^۲}{۹لا^۲ + ۶ا لا^۲ - ۵ا^۲ لا - ۲ا^۳}$ (۴۷) $\frac{۳ا^۲ - ۱۶اب + ۴۴ب^۲}{۳ا^۳ + ۶اب - ۱۲۴اب^۲ - ۶۳ب^۳}$

(۴۸) $\frac{۹لا^۴ + ۳۰لا^۳ + ۱۲لا^۲ - ۶لا - ۴۵}{۸لا^۴ + ۲۸لا^۳ + ۱۶لا^۲ - ۴لا - ۴۸}$ (۴۹) $\frac{۶ا^۲ - ۹اب + اب^۲ + ۳اب^۲ - ب^۳}{۴ا^۳ - ۶اب + ۳اب^۲ - ب^۳}$

(۵۰) $\frac{۲۴لا^۵ + ۱۶لا^۴ای - ۲۸لا^۳ای^۲ - ۲۴لا^۲ای^۳ - ۱۲لای^۴}{۴۵لا^۴ای + ۳۰لا^۳ای^۲ - ۱۵لا^۲ای^۳ - ۲۰لای^۴ - ۱۰ای^۵}$

۹۴ توحید مخرج کسور جبریہ

فرض کنید $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ج}{د}$ و $\frac{ف}{ی}$ وغیرہ کسور جبریہ میباشد وص مثل مشترک اصغر مخارج ب و د و ف وغیرہ

پس چون صورت و مخرج یک کسر جبری در یک مقدار غیر معین ضرب شود در قیمت کسر مذکور هیچ فرق واقع نمیشود -

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 246 of 308

لهذا $\frac{ا}{ب} = \frac{ا \times (ص \div ب)}{ب \times (ص \div ب)} = \frac{ا \times (ص \div ب)}{ص}$

و $\frac{ی}{ف} = \frac{ی \times (ص \div ف)}{ف \times (ص \div ف)} = \frac{ی \times (ص \div ف)}{ص}$

و علی ہذا القیاس

پس کسور ستون سوم مساوی ستون اول میباشند و متحد المخرج نیز میباشند لہذا برائے توحید مخرج کسور قاعدہ ذیل مقرر است۔

اولاً مثل مشترک اصغر ہمہ مخارج کسور مفروضہ را معلوم کنید بعد ازاں صورت و مخرج ہر کسر را در ان خارج قسمت ضرب کنید کہ از تقسیم مثل مشترک اصغر مذکور بر ہر یک از مخارج مذکورہ حاصل میشود۔

مثال ۱ $\frac{ا}{ا+ب}$ و $\frac{ا^۲}{ا(ا-ب)}$ و $\frac{ب^۲}{ب(ا^۲-ب^۲)}$ را متحد المخرج بسازید

مثل مشترک اصغر مخارج $= ا ب (ا^۲ - ب^۲)$ و خارج قسمت ہائیکہ از تقسیم این مثل مشترک اصغر بر مخارج مختلفہ حاصل میشوند حسب ذیل میباشند

$ا ب (ا - ب)$ و $ب (ا + ب)$ و $ا$

لہذا $\frac{ا}{ا+ب} = \frac{ا \times ا ب (ا - ب)}{(ا+ب) \times ا ب (ا-ب)} = \frac{ا ا ب (ا-ب)}{ا ب (ا^۲ - ب^۲)}$

$\frac{ا^۲}{ا(ا-ب)} = \frac{ا^۲ \times ب (ا+ب)}{ا (ا-ب) \times ب (ا+ب)} = \frac{ا ا ب (ا+ب)}{ا ب (ا^۲ - ب^۲)}$

$\frac{ب^۲}{ب(ا^۲-ب^۲)} = \frac{ا^۲ \times ا}{ب (ا^۲ - ب^۲) \times ا} = \frac{ا ا ا}{ا ب (ا^۲ - ب^۲)}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 247 of 308

مثال ۲ $\frac{لا-۱}{لا^۲-۵لا+۶}$ و $\frac{لا-۲}{لا^۲-۴لا+۳}$ و $\frac{لا-۳}{لا^۲-۳لا+۲}$ را متحد المخرج بسازید

مخارج مختلفه حسب ذیل هستند $(لا-۲)(لا-۳)$ و $(لا-۱)(لا-۳)$ و $(لا-۱)(لا-۲)$

∴ مثل مشترک اصغر مخارج $= (لا-۱)(لا-۲)(لا-۳)$

و خارج قسمتهائے مختلفه کہ از تقسیم مثل مشترک اصغر بر مخارج مختلفه حاصل میشوند $لا-۱$ و $لا-۲$ و $لا-۳$ میباشند

لہذا $\frac{لا-۱}{لا^۲-۵لا+۶} = \frac{(لا-۱)(لا-۱)}{(لا^۲-۵لا+۶)(لا-۱)} = \frac{لا^۲-۲لا+۱}{لا^۳-۶لا^۲+۱۱لا-۶}$

$\frac{لا-۲}{لا^۲-۴لا+۳} = \frac{(لا-۲)(لا-۲)}{(لا^۲-۴لا+۳)(لا-۲)} = \frac{لا^۲-۴لا+۴}{لا^۳-۶لا^۲+۱۱لا-۶}$

$\frac{لا-۳}{لا^۲-۳لا+۲} = \frac{(لا-۳)(لا-۳)}{(لا^۲-۳لا+۲)(لا-۳)} = \frac{لا^۲-۶لا+۹}{لا^۳-۶لا^۲+۱۱لا-۶}$

مسئلہ (۵۷)

کسور ذیل را متحد المخرج بسازید :-

(۱) $\frac{ا}{۲ب}$ و $\frac{۳ج}{۴د}$ و $\frac{ی}{ف}$ (۲) $\frac{لا^۲}{۲ب ج}$ و $\frac{ی^۲}{۳ج ا}$ و $\frac{۱۶}{۴ا ب}$

(۳) $\frac{ا ب}{۴لا ی^۲}$ و $\frac{ب ج}{۶لا^۲ ی}$ و $\frac{ج ا}{۱۰لا^۲}$ (۴) $\frac{ا}{ا-ب}$ و $\frac{ب}{ا+ب}$ و $\frac{ج}{ا(ا+ب)}$

(۵) $\frac{لا^۲}{ا^۲+۲ا ب}$ و $\frac{ی^۲}{ا-۲ب}$ (۶) $\frac{۲ا}{ا-ب}$ و $\frac{ا ج}{ا ب-ا^۲}$

(۷) $\frac{۲ا}{ا-ب}$ و $\frac{۳ب}{ب-ا}$ و $\frac{۴ج}{ا+ب}$ (۸) $\frac{۲لا}{ا^۲(ا+لا)}$ و $\frac{۳ی}{ب^۲(ا-لا)}$ و $\frac{۶۴}{ج^۲(ا^۲-لا^۲)}$

(۹) $\frac{ا^۲}{۲لا ی-۲ی^۲}$ و $\frac{ب^۲}{۲لا^۲-۳لا ی}$ و $\frac{ج^۲}{۴لا ی-۹ی^۲}$ (۱۰) $\frac{ا^۲}{لا^۲+لا+۱}$ و $\frac{ب^۲}{لا^۲-لا+۱}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 248 of 308

(۱۱) $\frac{۳}{لا^۲-لا-۲}$ و $\frac{۴}{لا^۲+لا-۶}$ (۱۲) $\frac{ا-۲ب}{(ا-۲ب)(ا+۴ب)}$ و $\frac{ج}{ا+۸ب}$

(۱۳) $\frac{ا}{ا-۳ب}$ و $\frac{ب}{ا^۲+۳ا ب+۹ب^۲}$ و $\frac{ج}{ا^۳-۷-۲ب^۳}$

(۱۴) $\frac{ا}{ب(ا-ب ج)}$ و $\frac{ب}{ا(ا-ب ج)}$ و $\frac{ج}{ا^۲+ب-ج-۲ا ب}$

(۱۵) $\frac{ج-ا}{(ا-ب)(ب-ج)}$ و $\frac{ا-ج}{(ا-ب)(ب-ج)}$ و $\frac{ب-ج}{(ج-ا)(ا-ب)}$

۹۵ جمع کسور جبریہ

بحکم نتیجہ سوم فقرہ نمبر چہل و ششم

$ا(ب+ج+د+ی)=ا ب+ا ج+ا د+ا ی$ (برای ہر قیمت ا و ب و ج و د و ی)

∴ بر عکس آن $\frac{ا ب+ا ج+ا د+ا ی}{ا}=ب+ج+د+ی$

$=\frac{ا ب}{ا}+\frac{ا ج}{ا}+\frac{ا د}{ا}+\frac{ا ی}{ا}$

لہذا اگر ط و ق و س بجائے ب و ج و د و ی نوشتہ شود

$\frac{ط+ق+س}{ا}=\frac{ط}{ا}+\frac{ق}{ا}+\frac{س}{ا}$ (برای ہر قیمت ط و ق و س و ا)

پس مجموع چند کسر جبری کہ متحد المخرج باشند مساوی آن کسر میباشد کہ صورت آن مساوی مجموع ہمہ صورتہای کسور مذکور و مخرج آن مساوی مخرج کسور مفروضہ باشد

پس برای جمع کسور جبریہ اولاً آنہا را متحد المخرج بسازید بعد از ان مجموع آنہا را بطریق فوق معلوم کنید

مثال اقیمت $\frac{ا}{ا-ب}+\frac{ب}{ب-ا}$ را معلوم کنید :-

چون $\frac{ب}{ب-ا}=\frac{ب}{(ب-ا)}\times\frac{(-۱)}{(-۱)}=\frac{-ب}{ا-ب}$

$\therefore \frac{ا}{ا-ب}+\frac{ب}{ب-ا}=\frac{ا}{ا-ب}+\frac{-ب}{ا-ب}=\frac{ا+(-ب)}{ا-ب}=\frac{ا-ب}{ا-ب}=۱$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 249 of 308

مثال ۲ قیمت $\frac{لا}{لا+و} + \frac{و}{لا-و}$ را معلوم کنید

چون مثل مشترک اصغر مخارج $= لا^۲ - و^۲$

$$\therefore \frac{لا}{لا+و} = \frac{لا(لا-و)}{لا^۲-و^۲} \quad و \quad \frac{و}{لا-و} = \frac{و(لا+و)}{لا^۲-و^۲}$$

لہذا قیمت مطلوب $= \frac{لا(لا-و)}{لا^۲-و^۲} + \frac{و(لا+و)}{لا^۲-و^۲} = \frac{لا(لا-و)+و(لا+و)}{لا^۲-و^۲} = \frac{لا^۲+و^۲}{لا^۲-و^۲}$

مثال ۳ قیمت $\frac{۱}{و+ب} + \frac{ب}{و^۲-ب^۲} - \frac{و}{و^۲+ب^۲}$ را معلوم کنید

چون در یہ مثال ہمہ کسور بآسانی متحد المخرج نمیشوند لہذا صورت عمل بطریق ذیل خواہد بود

$$\frac{۱}{و+ب} + \frac{ب}{و^۲-ب^۲} = \frac{(و-ب)+ب}{و^۲-ب^۲} = \frac{و}{و^۲-ب^۲}$$

$$\therefore \text{قیمت مطلوب} = \frac{و}{و^۲-ب^۲} - \frac{و}{و^۲+ب^۲} = \frac{و(و^۲+ب^۲)-و(و^۲-ب^۲)}{و^۴-ب^۴} = \frac{۲وب^۲}{و^۴-ب^۴}$$

مثال ۴ $\frac{۱}{لا-۲} - \frac{۱}{لا+۲} - \frac{۴}{لا^۲+۴} + \frac{۳۲}{لا^۴+۱۶}$ را مختصر کنید

$$\text{پس } \frac{۱}{لا-۲} - \frac{۱}{لا+۲} = \frac{(لا+۲)-(لا-۲)}{لا^۲-۴} = \frac{۴}{لا^۲-۴}$$

$$\text{و } \frac{۴}{لا^۲-۴} - \frac{۴}{لا^۲+۴} = \frac{۴(لا^۲+۴)-۴(لا^۲-۴)}{لا^۴-۱۶} = \frac{۳۲}{لا^۴-۱۶}$$

$$\text{و } \frac{۳۲}{لا^۴-۱۶} + \frac{۳۲}{لا^۴+۱۶} = \frac{۳۲(لا^۴+۱۶)+۳۲(لا^۴-۱۶)}{لا^۸-۲۵۶} = \frac{۶۴لا^۴}{لا^۸-۲۵۶}$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 250 of 308

مثال ۵ $\frac{1}{ا+ب} - \frac{1}{ا+۲ب} - \frac{1}{ا+۳ب} + \frac{1}{ا+۴ب}$ را مختصر کنید

جملہ مفروضہ $= \left\{\frac{1}{ا+ب} - \frac{1}{ا+۲ب}\right\} - \left\{\frac{1}{ا+۳ب} - \frac{1}{ا+۴ب}\right\}$

وچون $\frac{1}{ا+ب} - \frac{1}{ا+۲ب} = \frac{(ا+۲ب)-(ا+ب)}{(ا+ب)(ا+۲ب)} = \frac{ب}{(ا+ب)(ا+۲ب)}$

و $\frac{1}{ا+۳ب} - \frac{1}{ا+۴ب} = \frac{(ا+۴ب)-(ا+۳ب)}{(ا+۳ب)(ا+۴ب)} = \frac{ب}{(ا+۳ب)(ا+۴ب)}$

لہذا $\frac{ب}{(ا+ب)(ا+۲ب)} - \frac{ب}{(ا+۳ب)(ا+۴ب)} = \frac{ب(ا+۳ب)(ا+۴ب) - ب(ا+ب)(ا+۲ب)}{(ا+ب)(ا+۲ب)(ا+۳ب)(ا+۴ب)}$

وصورت کسر مذکور $= ب(ا^۲+۷ا ب+۱۲ب^۲) - ب(ا^۲+۳ا ب+۲ب^۲)$

$= ب(۴ا ب+۱۰ب^۲) = ۲ب^۲(۲ا+۵ب)$

پس قیمت مطلوب $= \frac{۲ب^۲(۲ا+۵ب)}{(ا+ب)(ا+۲ب)(ا+۳ب)(ا+۴ب)}$

مسئلہ (۵۸)

قیمت کسور ذیل معلوم کنید :-

(۱) $\frac{ا+ب}{ا} + \frac{ا-ب}{ب}$ (۲) $\frac{لا-ی}{لای} + \frac{ی-ع}{یع} + \frac{ع-لا}{ع لا}$ (۳) $\frac{ا}{ا-لا} + \frac{لا}{لا-ا}$

(۴) $\frac{ا+ب}{ا-ب} - \frac{ا-ب}{ا+ب}$ (۵) $\frac{ا^۲+ب^۲}{ا^۲-ب^۲} - \frac{ا-ب}{۲(ا+ب)^۲}$ (۶) $\frac{۴لا^۲+۹ی^۲}{۲لا-۳ی} - \frac{۲لا-۳ی}{۲لا+۳ی}$

(۷) $\frac{ا}{(ا+ب)^۲} - \frac{ب}{ا^۲-ب^۲}$ (۸) $\frac{ا^۲+ا ب+ب^۲}{ا+ب} + \frac{ا^۲-ا ب+ب^۲}{ا-ب}$ (۹) $\frac{۱}{(ا-ب)(ب-ج)} + \frac{۱}{(ب-ج)(ج-ا)}$

(۱۰) $\frac{۱}{لا^۲-۳لا+۲} + \frac{۱}{لا^۲-۵لا+۶}$ (۱۱) $\frac{۱}{لا^۲+۷لا+۱۰} + \frac{۱}{لا^۲+۱۳لا+۴۰}$ (۱۲) $\frac{۱}{۲لا+۳ی} - \frac{(۲لا-۳ی)^۲}{۸لا^۲+۲۷ی^۲}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 251 of 308

(۱۳) $\frac{(و+ب)}{و-ب} - \frac{و-ب}{و+ب} + \frac{۲و^۲ب}{ب^۲-و^۲}$ (۱۴) $\frac{۱}{و+۲ب} + \frac{۱}{و-۲ب} + \frac{۳و}{۴ب^۲-و^۲}$

(۱۵) $\frac{ل+ی}{ل-ی} + \frac{ل-ی}{ل+ی} - \frac{۲(ل^۲-ی^۲)}{ل^۲+ی^۲}$ (۱۶) $\frac{و-۲ل}{و+۲ل} - \frac{و+۲ل}{و-۲ل} + \frac{۸و ل}{و^۲+۴ل^۲}$

(۱۷) $\frac{۳ل+۱}{ل-۳} - \frac{ل-۳}{۳ل+۹} + \frac{۵ل^۲+۴۲ل}{۱۸-۳ل^۲}$ (۱۸) $\frac{۴و-ب}{۱-۴وب} - \frac{۴و+ب}{۱+۴وب} - \frac{۴ب(۱-۴و^۲)}{۱۶و^۲ب^۲-۱}$

(۱۹) $\frac{ل}{ل-۲و} + \frac{ل}{ل+۲و} + \frac{ل^۲}{ل^۲+۴و^۲}$ (۲۰) $\frac{ب}{و-ب} + \frac{ب}{و+ب} + \frac{۲وب}{و^۲+ب^۲} + \frac{۴و^۲ب}{و^۴-ب^۴}$

(۲۱) $\frac{ل}{۳ل-ی} + \frac{ل}{۳ل+ی} + \frac{۶ل^۲}{۹ل^۲+ی^۲}$ (۲۲) $\frac{۱}{ل-۳و} - \frac{۱}{ل+۳و} - \frac{۲ل+۶و}{ل^۲+۹و^۲} - \frac{ل-۹و}{ل^۴-۸۱و^۴}$

(۲۳) $\frac{(و+ب)^۲}{ب(و-ب)^۲} - \frac{و}{ب} - ۲$ (۲۴) $\frac{۱}{ل-۱} - \frac{۱}{ل+۱} + \frac{۱}{ل-۲} - \frac{۱}{ل+۲}$

(۲۵) $\frac{۱}{ل-و} - \frac{۲}{ل+و} + \frac{۲ل+و}{ل^۲+و^۲}$ (۲۶) $\frac{۲}{و-۲ل} - \frac{۱}{ل+و} - \frac{۳}{و-ل} + \frac{۱}{ل+۳و} + \frac{۳}{و+ل} + \frac{۱}{ل-۳و}$

(۲۷) $\frac{۲}{ل-۱} - \frac{ل}{ل^۲+۱} - \frac{۱}{ل+۱}$ (۲۸) $\frac{۳}{ل^۳-۱} + \frac{و-ج}{(ل-ب)(ل-و)} + \frac{ب-ج}{(ب-و)(ل-ب)}$

(۲۹) $\frac{۱}{ل^۳-۳ل+۲} + \frac{۱}{ل^۳-۵ل+۶} + \frac{۲}{ل^۳-۸ل+۱۵}$

(۳۰) $\frac{۱}{ل^۲+۵ول+۴و^۲} + \frac{۱}{ل^۲+۱۱ول+۲۸و^۲} + \frac{۲}{ل^۲+۲۰ول+۹۱و^۲}$

(۳۱) $\frac{۱}{ل^۳+۲ل^۲+۲ل} + \frac{۲ل}{ل^۴+۳ل^۲+۴} + \frac{۴ل^۲}{ل^۴+ل^۲+۱}$ (۳۲) $\frac{۱}{۱-ل+ل^۲} - \frac{۱}{۱+ل+ل^۲} - \frac{۲ل}{۱+ل^۲+ل^۴}$

(۳۳) $\frac{۱}{۱+ل+ل^۲} - \frac{۱}{۱-ل+ل^۲} + \frac{۲ل^۲}{۱-ل^۲+ل^۴}$ (۳۴) $\frac{۱}{ل-۲} - \frac{ل-۲}{ل^۲+۲ل+۴} + \frac{۶ل}{ل^۳+۸}$

(۳۵) $\frac{۱}{۲ل^۲-۶ول+۹و^۲} + \frac{۱}{۲ل^۲+۶ول+۹و^۲} + \frac{۱۲ول}{۴ل^۴-۸۱و^۴}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 252 of 308

فرض کنید کہ $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ج}{د}$ دو کسر است وقیمت $\frac{ا}{ب} \times \frac{ج}{د}$ مطلوب

فرض کنید کہ لا $= \frac{ا}{ب} \times \frac{ج}{د}$

لہذا لا $\times$ ب $\times$ د $= \frac{ا}{ب} \times \frac{ج}{د} \times$ ب $\times$ د $= \frac{ا}{ب} \times$ ب $\times \frac{ج}{د} \times$ د $=$ ا $\times$ ج

یعنی لا $\times$ ب د $=$ ا ج $\therefore$ لا $= \frac{ا ج}{ب د}$ یعنی $\frac{ا}{ب} \times \frac{ج}{د} = \frac{ا ج}{ب د}$

لہذا $\frac{ا}{ب} \times \frac{ج}{د} \times \frac{ی}{ف} = \frac{ا ج}{ب د} \times \frac{ی}{ف} = \frac{ا ج ی}{ب د ف}$

و $\frac{ا}{ب} \times \frac{ج}{د} \times \frac{ی}{ف} \times \frac{ر}{س} = \frac{ا ج ی}{ب د ف} \times \frac{ر}{س} = \frac{ا ج ی ر}{ب د ف س}$

وعلے ہذا القیاس

پس حاصل ضرب چند کسر آن کسر باشد کہ صورت آن مساوی حاصل ضرب صورتہائے کسور مفروضہ ومخرج آن مساوی حاصل ضرب مخارج کسور مفروضہ باشد

نتیجہ چون ج $= \frac{ج}{ا}$ لہذا $\frac{ا}{ب} \times \frac{ج}{ا} = \frac{ا ج}{ب}$

مثال ۱ $\frac{لا^۲}{ی ع}$ و $\frac{ی^۲}{ع ی}$ و $\frac{ع^۲}{لا ی}$ را در یکدیگر ضرب کنید

حاصل ضرب مطلوب $= \frac{لا^۲ \times ی^۲ \times ع^۲}{ی ع \times ع لا \times لا ی} = \frac{لا^۲ \times ی^۲ \times ع^۲}{ی^۲ \times ع^۲ \times لا^۲} =$ ا

مثال ۲ $\frac{لا(ا-لا)}{ا^۲+۲ا لا+لا^۲}$ را در $\frac{ا(ا+لا)}{ا^۲-۲ا لا+لا^۲}$ ضرب کنید

حاصل ضرب مطلوب $= \frac{لا(ا-لا) \times ا(ا+لا)}{(ا^۲+۲ا لا+لا^۲)(ا^۲-۲ا لا+لا^۲)} = \frac{لا ا(ا-لا)(ا+لا)}{(ا+لا)^۲(ا-لا)^۲}$

$= \frac{ا لا}{(ا+لا)(ا-لا)} = \frac{ا لا}{ا^۲-لا^۲}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 253 of 308

مثال ۳ $\frac{۱-لا^۲}{۱+ی}$ و $\frac{۱-ی^۲}{لا+لا^۲}$ و $۱+\frac{لا}{۱-لا}$ را در یکدیگر ضرب کنید۔

چون $۱+\frac{لا}{۱-لا}=\frac{۱-لا+لا}{۱-لا}=\frac{۱}{۱-لا}$

∴ حاصل ضرب مطلوب $=\frac{(۱+لا)(۱-لا)}{۱+ی}\times\frac{(۱+ی)(۱-ی)}{لا(۱+لا)}\times\frac{۱}{۱-لا}$

$=\frac{(۱+لا)(۱-لا)(۱+ی)(۱-ی)}{لا(۱+ی)\times(۱+لا)\times(۱-لا)}=\frac{۱-ی}{لا}$

امثلہ (۵۹)

کسور ذیل را در یکدیگر ضرب کنید :-

(۱) $\frac{۲و^۲}{۳اب}$ و $\frac{۹ب^۲}{۱۶اوج}$ و $\frac{۸ج^۲}{۹بوج}$ (۲) $\frac{۴اب^۲}{۳ج^۲}$ و $\frac{۹ج^۲}{۱۶د^۲}$ و $\frac{۳۴د^۲}{۲۷ب^۲}$

(۳) $\frac{لا^۳}{ی ع}$ و $\frac{ی^۲}{ع لا}$ و $\frac{ع^۳}{لا ی}$ (۴) $\frac{۷او^۲ب ج^۲}{۱۲لا ی ع}$ و $\frac{۴لا^۲ ی^۲ ع^۳}{۲۱او^۲ب^۲ج^۲}$

(۵) $\frac{۱۲م^۲ن^۲}{۷لا ی ع}$ و $\frac{۳۵لا ی ع}{۹۶م^۲ن}$

مختصر کنید :-

(۶) $\frac{لا+۱}{لا-۱}\times\frac{لا^۲+لا-۲}{لا^۲+لا}$ (۷) $\frac{و^۲-۹ب^۲}{و^۲+۳اب}\times\frac{۳و^۲}{و^۲-۳اب}$

(۸) $\frac{و^۲-ب^۲}{و^۲+اب}\times\frac{(و+ب)^۲}{و^۲+اب+ب^۲}$ (۹) $\frac{و^۳+۸لا^۳}{و^۲-۲اولا}\times\frac{و^۲-۴اولا+۴لا^۲}{و^۲-۲اولا+۴لا^۲}$

(۱۰) $\frac{لا^۲+۴لا+۳}{لا^۲-۴}\times\frac{لا^۲-۳لا-۱۸}{لا^۲-۸لا+۱۲}$ (۱۱) $\frac{لا^۲-۳لا+۲}{لا^۲-۹}\times\frac{لا^۲-۷لا+۱۰}{لا^۲-۲لا-۱۵}$

(۱۲) $\frac{لا^۲-۴لا+۳}{لا^۲-۶لا+۵}\times\frac{لا^۲-۷لا-۱۰}{لا^۲-۵لا+۶}$ (۱۳) $\frac{و^۲-ب^۲}{و^۲-۲اب+ب^۲}\times\frac{و-ب}{و^۲+اب}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 254 of 308

(۱۴) $\frac{۲لا^۲-۵لا+۲}{۳لا^۲-۵لا-۲} \times \frac{۳لا^۲+لا}{۲لا-۲}$ (۱۵) $\frac{لا^۲-۶لا-۱۶}{لا^۲-۴لا-۲۱} \times \frac{لا^۲-۱۱لا+۲۸}{لا^۲-۱۲لا+۳۲}$

(۱۶) $\frac{و^۲-لا^۲}{و+ب} \times \frac{و^۲-ب^۲}{وlا+لا^۲} \times \left(\frac{و+وlا}{و-لا}\right)$

(۱۷) $\left(\frac{لا^۲}{و^۲}-\frac{لا}{و}+۱\right)\left(\frac{lا^۲}{و^۲}+\frac{لا}{و}+۱\right)$ (۱۸) $\left(\frac{۴و}{۳lا}+\frac{۳lا}{۲ب}\right)\left(\frac{۲ب}{۳lا}+\frac{۳lا}{۴و}\right)$

(۱۹) $\left(\frac{و}{ب}+\frac{ب}{و}\right)\left(\frac{ج}{د}+\frac{د}{ج}\right)-\left(\frac{و}{ب}-\frac{ب}{و}\right)\left(\frac{ج}{د}-\frac{د}{ج}\right)$

(۲۰) $\frac{۲لا^۲-۷لا+۳}{۲لا^۲+۷لا-۴} \times \frac{۳لا^۲+۱۱لا-۴}{۳لا^۲+۸لا-۳} \times \frac{۲لا^۲+لا-۱۵}{۲لا^۲-۱۱لا+۱۵}$

(۲۱) $\frac{ب^۲-ج^۲-و^۲+۲وج}{ج^۲+و^۲-ب^۲+۲وج} \times \frac{ب^۲+ج^۲-و^۲-۲بج}{و^۲-ب^۲+ج^۲-۲وج}$

(۲۲) $\frac{ب^۲-ج^۲-و^۲+۲وج}{ب^۲-ج^۲+و^۲+۲وب} \times \frac{و^۲-ب^۲+ج^۲-۲وج}{و^۲+ب^۲-ج^۲-۲وب}$

۹۷ تقسیم کسور

فرض کنید کہ $\frac{و}{ب}$ و $\frac{ج}{د}$ دو کسر است و قیمت $\frac{و}{ب} \div \frac{ج}{د}$ مطلوب است

نیز فرض کنید کہ لا $= \frac{و}{ب} \div \frac{ج}{د}$

لہذا لا $\times \frac{ج}{د} = \frac{و}{ب} \div \frac{ج}{د} \times \frac{ج}{د}$

$= \frac{و}{ب}$ $= \frac{و}{ب}$ $\{\because$ م ÷ ن × ن = م برای ہر قیمت م و ن$\}$

$\therefore$ لا $\times \frac{ج}{د} \times \frac{د}{ج} = \frac{و}{ب} \times \frac{د}{ج}$

یعنی لا $= \frac{و}{ب} \times \frac{د}{ج}$ $\left[\because \frac{ج}{د} \times \frac{د}{ج} = ۱\right]$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 255 of 308

پس برای تقسیم یک کسر بر کسر دیگر کسر اول را در عکس کسر دوم ضرب کنید

نتیجہ $\frac{ا}{ب} \div ج = \frac{ا}{ب} \div \frac{ج}{۱} = \frac{ا}{ب} \times \frac{۱}{ج} = \frac{ا}{ب ج}$

مثال ۱ $\frac{ا^۲ + ب^۲}{ا^۲ - ب^۲} \div \frac{ا^۲ - ا ب + ب^۲}{ا - ب}$ را مختصر کنید

حاصل مطلوب $= \frac{ا^۲ + ب^۲}{ا^۲ - ب^۲} \times \frac{ا - ب}{ا^۲ - ا ب + ب^۲}$

$= \frac{(ا^۲ + ب^۲)(ا - ب)}{(ا^۲ - ب^۲)(ا^۲ - ا ب + ب^۲)}$

$= \frac{(ا + ب)(ا^۲ - ا ب + ب^۲)(ا - ب)}{(ا + ب)(ا - ب)(ا^۲ - ا ب + ب^۲)}$

$= ۱$

مثال ۲ $\frac{لا^۲ + لا - ۲}{لا^۲ + ۷ لا + ۱۲} \div \frac{لا^۲ - ۳ لا - ۱۰}{لا^۲ + لا - ۱۲} \times \frac{لا^۲ - ۴ لا - ۵}{لا^۲ - ۴ لا + ۳}$ را مختصر کنید

حاصل مطلوب $= \frac{لا^۲ + لا - ۲}{لا^۲ + ۷ لا + ۱۲} \times \frac{لا^۲ + لا - ۱۲}{لا^۲ - ۳ لا - ۱۰} \times \frac{لا^۲ - ۴ لا - ۵}{لا^۲ - ۴ لا + ۳}$

$= \frac{(لا - ۱)(لا + ۳)}{(لا + ۳)(لا + ۴)} \times \frac{(لا + ۴)(لا - ۳)}{(لا - ۵)(لا + ۲)} \times \frac{(لا - ۵)(لا + ۱)}{(لا - ۱)(لا - ۳)}$

$= \frac{(لا - ۱)(لا + ۲)(لا + ۴)(لا - ۳)(لا - ۵)(لا + ۱)}{(لا + ۳)(لا + ۴)(لا - ۵)(لا + ۲)(لا - ۳)(لا - ۱)}$

$= \frac{لا + ۱}{لا + ۳}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 256 of 308

مثال ۴

$$\frac{\frac{ا}{ا-ب}-\frac{ا}{ا+ب}}{\frac{ب}{ا-ب}-\frac{ب}{ا+ب}} \div \frac{\frac{ا+ب}{ا-ب}+\frac{ا-ب}{ا+ب}}{\frac{ا+ب}{ا-ب}-\frac{ا-ب}{ا+ب}} \times \frac{ا^2}{ا^2+ب^2}$$

پس

$$= \frac{\frac{ا(ا+ب)-ا(ا-ب)}{(ا-ب)(ا+ب)}}{\frac{ب(ا+ب)-ب(ا-ب)}{(ا-ب)(ا+ب)}}$$

$$= \frac{۲ا ب}{ا^2-ب^2}$$

$$= \frac{۲ا ب}{ا^2-ب^2} \div \frac{۲ب^2}{ا^2-ب^2}$$

$$= \frac{۲ا ب}{ا^2-ب^2} \times \frac{ا^2-ب^2}{۲ب^2}$$

(۱)..... $= \frac{ا}{ب}$

و

$$\frac{\frac{ا+ب}{ا-ب}+\frac{ا-ب}{ا+ب}}{\frac{ا+ب}{ا-ب}-\frac{ا-ب}{ا+ب}} = \frac{(ا+ب)^2+(ا-ب)^2}{(ا+ب)^2-(ا-ب)^2}$$

$$= \frac{۲(ا^2+ب^2)}{۴ا ب}$$

$$= \frac{۲(ا^2+ب^2)}{ا^2-ب^2} \times \frac{ا^2-ب^2}{۴ا ب}$$

(۲)..... $= \frac{ا^2+ب^2}{۲ا ب}$

پس (۱) و (۲) ظاہر ہے کہ جملہ مفروضہ

$$= \frac{ا}{ب} \div \frac{ا^2+ب^2}{۲ا ب} \times \frac{ا^2}{ا^2+ب^2}$$

$$= \frac{ا}{ب} \times \frac{۲ا ب}{ا^2+ب^2} \times \frac{ا^2}{ا^2+ب^2}$$

$$= \frac{۲ا^2}{(ا^2+ب^2)^2}$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 257 of 308

مسئلہ (۶۰)

کسور ذیل را مختصر کنید:-

(۱) $\frac{۴ اب ج}{۱۵ لا ی^{۲}} \div \frac{۸ اب ج}{۲۵ لا ی^{۶}}$ (۲) $\frac{ا^{۲}+اب}{ا-ب} \div \frac{اب}{ا^{۲}-ب^{۲}}$

(۳) $\frac{لا^{۲}-۴۹}{لا^{۲}-۲۵} \div \frac{لا+۷}{لا+۵}$ (۴) $\frac{ا^{۲}-ب^{۲}}{ا^{۲}+۲اب+ب^{۲}} \div \frac{ا^{۲}+ب^{۲}}{ا+ب}$

(۵) $\frac{م^{۲}-۹ن^{۲}}{م^{۲}+۵من+۶ن^{۲}} \div \frac{م^{۲}-۲من-۳ن^{۲}}{م^{۲}-ن^{۲}}$ (۶) $\frac{م^{۲}-ن^{۲}}{م+ن} \div \frac{م^{۲}+من+ن^{۲}}{م-ن}$

(۷) $\left(\frac{۲لا+ی}{لا+ی}-۱\right)$ بـ $\left(۱-\frac{ی}{لا+ی}\right)$ (۸) $\left(\frac{ا}{ا+ب}+\frac{ب}{ا-ب}\right) \div \left(\frac{ا}{ا-ب}-\frac{ب}{ا+ب}\right)$

(۹) $\left(\frac{لا+ی}{لا-ی}+\frac{لا-ی}{لا+ی}\right) \div \left(\frac{لا+ی}{لا-ی}-\frac{لا-ی}{لا+ی}\right)$ (۱۰) $\frac{لا^{۲}-۴}{لا^{۲}+۳لا-۱۸} \div \frac{لا^{۲}-۵لا-۱۴}{لا^{۲}-۳۶}$

(۱۱) $\left\{۱-\frac{۲ط ف}{ط^{۲}+ف^{۲}}\right\} \div \left\{\frac{ط^{۲}-ف^{۲}}{ط-ف}-۳ط ف\right\}$

(۱۲) $\frac{ا^{۲}+ب^{۲}+۳اب(ا+ب)}{(ا+ب)^{۲}-۴اب} \div \frac{(ا-ب)^{۲}+۴اب}{ا^{۲}-ب^{۲}-۳اب(ا-ب)}$

(۱۳) $\frac{لا^{۲}+ی^{۲}}{(لا-ی)^{۲}+۳لا ی} \div \frac{(لا+ی)^{۲}-۳لا ی}{لا^{۲}-ی^{۲}} \times \frac{لا ی}{لا^{۲}-ی^{۲}}$

(۱۴) $\frac{ا(ا-ب)^{۲}+۴اب^{۲}}{اب+ب^{۲}} \div \frac{ا^{۲}-ب^{۲}}{اب} \times \frac{ب(ا+ب)^{۲}-۴اب^{۲}}{ا^{۲}-اب}$

(۱۵) $\frac{لا^{۲}-لا-۳۰}{لا^{۲}-۳۶} \div \frac{لا^{۲}+۳لا-۱۰}{لا^{۲}+۲لا-۸} \div \frac{لا+۴}{۲لا^{۲}+۱۳لا}$

(۱۶) $\frac{لا^{۲}+۳لا-۱۰۸}{لا^{۲}-۶۴} \div \frac{لا^{۲}+۶لا-۷۲}{لا^{۲}+لا-۵۶} \div \frac{لا^{۲}-۱۶لا+۶۳}{لا^{۲}-۱۴لا+۴۸}$

(۱۷) $\left(\frac{لا^{۲}+ی^{۲}}{لا^{۲}-ی^{۲}}-\frac{لا^{۲}-ی^{۲}}{لا^{۲}+ی^{۲}}\right) \div \left(\frac{لا+ی}{لا-ی}-\frac{لا-ی}{لا+ی}\right)$

(۱۸) $\left\{\frac{ا+ب}{ا-ب}+\frac{ا-ب}{ا+ب}\right\} \div \left\{\frac{ا^{۲}+ب^{۲}}{ا^{۲}-ب^{۲}}\right\}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 258 of 308

(۱۹) $\dfrac{ا^۲-ب^۲}{(ا+ب)^۲-۳ا ب} \div \dfrac{(ا+ب)^۲-۴ا ب}{(ا+ب)^۲-۳ا ب} \times \dfrac{ا}{(ا+ب)^۲-۲ا ب}$

(۲۰) $\dfrac{(ا-ب)\{(ا+ب)^۲-ا ب\}}{(ا-ب)^۲+۳ا ب} \div \dfrac{(ا+ب)\{(ا-ب)^۲+ا ب\}}{(ا-ب)^۲+۲ا ب} \times \dfrac{ا}{(ا+ب)^۲-۲ا ب}$

(۲۱) $\dfrac{\left(\dfrac{ا}{ب}-\dfrac{ب}{ا}\right)\left(\dfrac{ا}{ب}+\dfrac{ب}{ا}-۱\right)}{\dfrac{ا^۲}{ب^۲}+\dfrac{ب^۲}{ا^۲}+۱} \times \dfrac{\dfrac{۱}{ا}-\dfrac{۱}{ب}}{\dfrac{۱}{ا}+\dfrac{۱}{ب}}$

۹۸ مسئلہ متفرقہ

مثال اختصر کیجئے $-۱+\dfrac{ا}{۲(ا+ب)-(ا+ب)}$

$\dfrac{ا}{ا+ب}$

چون $۱-\dfrac{ب}{ا+ب}=\dfrac{ا+ب-ب}{ا+ب}=\dfrac{ا}{ا+ب}$

لہذا جملہ مفروضہ $=-۱+\dfrac{ا}{۲(ا+ب)-(ا+ب)}$

$\dfrac{ا}{ا+ب}$

$=-۱+\dfrac{ا}{۲(ا+ب)-\dfrac{(ا+ب)^۲}{ا}}$

$=-۱+\dfrac{ا}{\dfrac{۲ا(ا+ب)-(ا+ب)^۲}{ا}}$

$=-۱+\dfrac{ا}{\dfrac{۲ا^۲+۲ا ب-ا^۲-ب^۲-۲ا ب}{ا}}$

$=-۱+\dfrac{ا^۲}{ا^۲-ب^۲}$

$=\dfrac{-ا^۲+ب^۲+ا^۲}{ا^۲-ب^۲}$

$=\dfrac{ب^۲}{ا^۲-ب^۲}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 259 of 308

مثال ۲ ثابت کنید کہ $\frac{1}{x} = \frac{x+y}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} - \frac{y^3}{x^4} + \frac{y^4}{x^4(x+y)}$

لاؤ بر x^4 تقسیم کنید:-

$$x+y \Big) x \Big(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} - \frac{y^3}{x^4}$$

$$\frac{x^2}{x} + \frac{y}{x}$$

$$- \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3}$$

$$- \frac{y^3}{x^3} - \frac{y^4}{x^4}$$

$$\frac{y^4}{x^4}$$

پس اگر عمل تقسیم را در جائیکہ باختتام برسانیم $\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{x}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} - \frac{y^3}{x^4} + \frac{y^4}{x^4(x+y)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} - \frac{y^3}{x^4} + \frac{y^4}{x^4(x+y)}$$

مثال ۳ اگر $x = \frac{4y}{y+z}$ باشد قیمت $\frac{x+2y}{x-2y} + \frac{x+2z}{x-2z}$ را معلوم کنید

$$\text{جملہ مفروضہ} = \left(\frac{x+2y}{x-2y} - 1\right) + \left(\frac{x+2z}{x-2z} - 1\right) + 2$$

$$= \frac{4y}{x-2y} + \frac{4z}{x-2z} + 2$$

$$= \frac{4}{(x-2y)(x-2z)} \{y(x-2z) + z(x-2y)\} + 2$$

$$= \frac{4}{(x-2y)(x-2z)} \{(y+z)x - 4yz\} + 2$$

$$= 0 + 2 \quad [\because (y+z)x = 4yz]$$

$$= 2$$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 260 of 308

مثال ۴ قیمت $\frac{لا^{۳ن}}{لا^{ن}-۱} - \frac{لا^{۲ن}}{لا^{ن}+۱} - \frac{۱}{لا^{ن}-۱} + \frac{۱}{لا^{ن}+۱}$ را معلوم کنید۔

جملہ مفروضہ $= \left(\frac{لا^{۲ن}}{لا^{ن}-۱} - \frac{۱}{لا^{ن}-۱}\right) - \left(\frac{لا^{۲ن}}{لا^{ن}+۱} - \frac{۱}{لا^{ن}+۱}\right)$

$= \frac{لا^{۳ن}-۱}{لا^{ن}-۱} - \frac{لا^{۲ن}-۱}{لا^{ن}+۱}$

$= \frac{(لا^{ن}-۱)(لا^{۲ن}+لا^{ن}+۱)}{(لا^{ن}-۱)} - \frac{(لا^{ن}+۱)(لا^{ن}-۱)}{(لا^{ن}+۱)}$

$= (لا^{۲ن}+لا^{ن}+۱) - (لا^{ن}-۱)$

$= لا^{۲ن}+۲$

مثال ۵ $\frac{لا^{۲}-(ی-۶)^{۲}}{(لا+۶)^{۲}-ی^{۲}} + \frac{ی^{۲}-(لا-۶)^{۲}}{(لا+ی)^{۲}-۶^{۲}} + \frac{۶^{۲}-(لا-ی)^{۲}}{(ی+۶)^{۲}-لا^{۲}}$

کسر اول $= \frac{\{لا+(ی-۶)\}\{لا-(ی-۶)\}}{\{(لا+۶)+ی\}\{(لا+۶)-ی\}}$

$= \frac{(لا+ی-۶)(لا-ی+۶)}{(لا+۶+ی)(لا+۶-ی)} = \frac{لا+ی-۶}{لا+ی+۶}$

ہمچنین کسر دوم $= \frac{(ی+لا-۶)(ی-لا+۶)}{(لا+ی+۶)(لا+ی-۶)} = \frac{۶-لا+ی}{لا+ی+۶}$

و کسر سوم $= \frac{(۶+لا-ی)(۶-لا+ی)}{(ی+۶+لا)(ی+۶-لا)} = \frac{۶+لا-ی}{لا+ی+۶}$

لہذا جملہ مفروضہ $= \frac{(لا+ی-۶)+(۶-لا+ی)+(۶+لا-ی)}{لا+ی+۶}$

$= \frac{لا+ی+۶}{لا+ی+۶} = ۱$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 261 of 308

مثال ۶ ثابت کنید کہ $\left(\frac{ب}{ج}+\frac{ج}{ب}\right)^2+\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)^2+\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)^2$

$=۴+\left(\frac{ب}{ج}+\frac{ج}{ب}\right)\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)$

وچون $\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)^2+\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)^2=\left(\frac{ا}{ج}\right)^2+۲+\left(\frac{ج}{ا}\right)^2+\left(\frac{ا}{ب}\right)^2+۲+\left(\frac{ب}{ا}\right)^2$

$=۴+\frac{ا^2}{ب^2ج^2}+\frac{ب^2}{ا^2ج^2}+\frac{ج^2}{ا^2ب^2}=۴+\frac{ا^2}{ب^2ج^2}(ب^2+ج^2)+\frac{ب^2}{ا^2ج^2}(ا^2+ج^2)+\frac{ج^2}{ا^2ب^2}(ا^2+ب^2)$

$=۴+\frac{ا^2}{ب^2ج^2}(ب+ج)(ب+ج)+\frac{ب^2}{ا^2ج^2}(ا+ج)(ا+ج)+\frac{ج^2}{ا^2ب^2}(ا+ب)(ا+ب)$

$=۴+\left(\frac{ب}{ج}+\frac{ج}{ب}\right)\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)+\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)\left(\frac{ب}{ج}+\frac{ج}{ب}\right)+\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)$

∴ جملہ مفروضہ $=۴+\left(\frac{ب}{ج}+\frac{ج}{ب}\right)\left\{\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)+\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)\right\}+\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)$

$=۴+\left(\frac{ب}{ج}+\frac{ج}{ب}\right)\left\{\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)+\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)\right\}+\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)$

$=۴+\left(\frac{ب}{ج}+\frac{ج}{ب}\right)\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)+\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)\left\{\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)+\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)\right\}$

$=۴+\left(\frac{ب}{ج}+\frac{ج}{ب}\right)\left(\frac{ا}{ب}+\frac{ب}{ا}\right)\left(\frac{ا}{ج}+\frac{ج}{ا}\right)$

مثال ۷ اگر $۲م=ا+ب+ج$ باشد ثابت کنید کہ

$$\frac{۱}{م-ا}+\frac{۱}{م-ب}+\frac{۱}{م-ج}=\frac{۱}{م}\quad\text{یا}\quad\frac{ا ب ج}{(م-ا)(م-ب)(م-ج)}$$

وچون $\frac{۱}{م-ا}+\frac{۱}{م-ب}=\frac{۲م-ا-ب}{(م-ا)(م-ب)}=\frac{ج}{(م-ا)(م-ب)}$

و $\frac{۱}{م-ج}-\frac{۱}{م}=\frac{م-(م-ج)}{م(م-ج)}=\frac{ج}{م(م-ج)}$

∴ جملہ مفروضہ $=\frac{ج}{(م-ا)(م-ب)}+\frac{ج}{م(م-ج)}$

$=ج\times\frac{م(م-ج)+(م-ا)(م-ب)}{م(م-ا)(م-ب)(م-ج)}$

$=\frac{ا ب ج}{م(م-ا)(م-ب)(م-ج)}\left|\begin{array}{l}\text{صورت}=۲م^2-م(ا+ب+ج)\\=۲م^2-۲م^2=۰\end{array}\right.$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 262 of 308

مثال ۸ $\frac{ا+ب}{اب}(ا^۲+ب^۲ج)+\frac{ب+ج}{بج}(ب^۲+ج^۲-ا^۲)+\frac{ج+ا}{جا}$

$(ج^۲+ا^۲-ب^۲)$ را مختصر کنید:-

فرض کنید کہ $ا^۲+ب^۲ج^۲=۲م$

لہذا $ا^۲+ب^۲ج^۲=(ا^۲+ب^۲+ج^۲)-۲ج^۲=۲[م^۲-ج^۲]$

$ب^۲+ج^۲-ا^۲=(ا^۲+ب^۲+ج^۲)-۲ا^۲=۲(م^۲-ا^۲)$

$ج+ا-ب=(ا^۲+ب^۲+ج^۲)-۲ب^۲=۲(م^۲-ب^۲)$

∴ جملہ مفروضہ $=۲(\frac{۱}{ا}+\frac{۱}{ب})(م^۲-ج^۲)+۲(\frac{۱}{ب}+\frac{۱}{ج})(م^۲-ا^۲)+۲(\frac{۱}{ا}+\frac{۱}{ج})(م^۲-ب^۲)$

$=۲\{\frac{۱}{ا}(۲م^۲-ب^۲ج^۲)+\frac{۱}{ب}(۲م^۲-ا^۲ج^۲)+\frac{۱}{ج}(۲م^۲-ا^۲-ب^۲)\}$

$=۲\{ا\times\frac{۱}{ا}+ب^۲\times\frac{۱}{ب}+ج^۲\times\frac{۱}{ج}\}$

$=۲(ا+ب+ج)$

مثال ۹ ثابت کنید کہ $\frac{۱+ا^۲}{۱-ا^۲}-\frac{۱+ا}{۱-ا})\frac{۱}{۲}=\frac{ا^۲}{۱-ا^۲}+\frac{ا^۴}{۱-ا^۴}+\frac{ا^۸}{۱-ا^۸}$

$\{\frac{۱+ا^۲}{۱-ا^۲}-\frac{۱+ا}{۱-ا}\}\frac{۱}{۲}=\frac{(۱+ا^۲)^۲-(۱+ا)^۲}{۱-ا^۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{ا^۲۲}{۱-ا^۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{ا}{۱-ا}$

$\{\frac{۱+ا^۴}{۱-ا^۴}-\frac{۱+ا^۲}{۱-ا^۲}\}\frac{۱}{۲}=\frac{(۱+ا^۴)^۲-(۱+ا^۲)^۲}{۱-ا^۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{ا^۴۲}{۱-ا^۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{ا^۲}{۱-ا^۲}$

$(\frac{۱+ا^۸}{۱-ا^۸}-\frac{۱+ا^۴}{۱-ا^۴})\times\frac{۱}{۲}=\frac{(۱+ا^۸)^۲-(۱+ا^۴)^۲}{۱-ا^۸}\times\frac{۱}{۲}=\frac{ا^۸۲}{۱-ا^۸}\times\frac{۱}{۲}=\frac{ا^۴}{۱-ا^۴}$

لہذا جملہ مفروضہ $=\{(\frac{۱+ا^۸}{۱-ا^۸}-\frac{۱+ا^۴}{۱-ا^۴})+(\frac{۱+ا^۴}{۱-ا^۴}-\frac{۱+ا^۲}{۱-ا^۲})+(\frac{۱+ا^۲}{۱-ا^۲}-\frac{۱+ا}{۱-ا})\}\frac{۱}{۲}=$

$\{\frac{۱+ا^۸}{۱-ا^۸}-\frac{۱+ا}{۱-ا}\}\frac{۱}{۲}=$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 263 of 308

مثال ۱۰ جملہ ذیل را مختصر کنید:-

$$ب ج \times \frac{ا+د}{(ا-ب)(ا-ج)} + ج ا \times \frac{ب+د}{(ب-ا)(ب-ج)} + ا ب \times \frac{ج+د}{(ج-ا)(ج-ب)}$$

چون $ب - ا = -(ا-ب)$

و $(ج-ا)(ج-ب) = [-(ا-ج)][-(ب-ج)]$

$= (ا-ج)(ب-ج)$

لہذا جملہ مفروضہ $= ب ج \times \frac{ا+د}{(ا-ب)(ا-ج)} + ا ج \times \frac{-(ب+د)}{(ا-ب)(ب-ج)} + ا ب \times \frac{ج+د}{(ا-ج)(ب-ج)}$

$= \frac{ب ج (ا+د)(ب-ج) - ا ج (ب+د)(ا-ج) + ا ب (ج+د)(ا-ب)}{(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)}$

وچون صورت کسر $= ا ب ج \{(ب ج) - (ا-ج) + (ا-ب)\}$

$+ د\{ب ج (ب-ج) - ا ج (ا-ج) + ا ب (ا-ب)\}$

$= د\{ب ج (ب-ج) - ا ج (ا-ج) + ا ب (ا-ب)\}$

$= د\{ا^2 (ب-ج) + ب^2 (ج-ا) + ج^2 (ا-ب)\}$

$= د\{(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)\}$ ..... (دستور ۱۹ فقرہ نمبر ۲۶)

لہذا جملہ مفروضہ $= د$

مثال ۱۱ جملہ ذیل را مختصر کنید

$$\frac{ا^2}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{ب^2}{(ب-ا)(ب-ج)} + \frac{ج^2}{(ج-ا)(ج-ب)} \times \frac{(لا+ا)(لا+ب)(لا+ج)}{(لا+ا)(لا+ب)(لا+ج)}$$

جملہ مفروضہ $= \frac{ا^2 (لا+ب)(لا+ج)}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{-ب^2 (لا+ا)(لا+ج)}{(ا-ب)(ب-ج)} + \frac{ج^2 (لا+ا)(لا+ب)}{(ا-ج)(ب-ج)}$

$= \frac{ا^2 (ب ج)(لا+ب)(لا+ج) - ب^2 (ا ج)(لا+ج)(لا+ا) + ج^2 (ا-ب)(لا+ا)(لا+ب)}{(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)(لا+ا)(لا+ب)(لا+ج)}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 264 of 308

چونکہ صورت $= ا^2(ب-ج)\{لا^2+لا(ب+ج)+ب^2+بج\}+ب^2(ج-ا)\{لا^2+لا(ج+ا)+ج^2+اج\}$
$+ج^2(ا-ب)\{لا^2+لا(ا+ب)+ا^2+اب\}$
$= لا^2\{ا^2(ب-ج)+ب^2(ج-ا)+ج^2(ا-ب)\}$
$+لا\{ا^2(ب^2-ج^2)+ب^2(ج^2-ا^2)+ج^2(ا^2-ب^2)\}$
$+ابج\{ا(ب-ج)+ب(ج-ا)+ج(ا-ب)\}$
$= لا^2\{ا^2(ب-ج)+ب^2(ج-ا)+ج^2(ا-ب)\}$
$= لا^2(ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)$ ..... (دستور ۱۹ فقرہ نمبر ۶۴)

پس جملہ مفروضہ $= \frac{لا^2}{(لا+ا)(لا+ب)(لا+ج)}$

مثال ۱۲ جملہ ذیل را مختصر کنید:-

$$\frac{ا^2}{(ا-ب)(ا-ج)}+\frac{ب^2}{(ب-ج)(ب-ا)}+\frac{ج^2}{(ج-ا)(ج-ب)}$$

جملہ مفروضہ $= \frac{ا^2}{(ا-ب)(ا-ج)}+\frac{ب^2}{(ب-ج)(ب-ا)}+\frac{ج^2}{(ج-ا)(ج-ب)}$

$= \frac{ا^2(ب-ج)-ب^2(ا-ج)+ج^2(ا-ب)}{(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)}$

چونکہ صورت $= ا^2(ب-ج)+ب^2(ج-ا)+ج^2(ا-ب)$
$=(ا-ب)(ا-ج)(ب-ج)(ا+ب+ج)$ [مثال ۹ فقرہ نمبر ۷۹]

لہذا جملہ مفروضہ $= ا+ب+ج$

مسئلہ (۶۱)

جملہ ہائے ذیل را مختصر کنید:-

(۱) $\frac{ا}{ب+\frac{ج}{د+\frac{ی}{ف}}}$

(۲) $\frac{لا}{لا-\frac{لا-۱}{۱-\frac{۱}{لا+۱}}}$

(۳) $ا+\frac{ب^2}{ا+\frac{ب^2}{ا+ب}}$

(۴) $\frac{م}{م^2-\frac{م^2-۱}{م+\frac{۱}{م+۱}}}$

(۵) $\frac{لا^2-۲لاای+ی^2}{لا+ی}$

(۶) $\frac{لا(لا+۲)}{لا+۲+\frac{۴لا+۸}{۳لا+۳-\frac{۲(لا-۱)(لا+۳)}{لا+۳}}}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 265 of 308

در امثلہ چہاردہ گانہ ذیل ثابت کنند کہ جملہ طرف راست علامت = بجملہ طرف چپ علامت مذکور تبدیل میابد:-

(۷) $\frac{و^۲+ب^۲}{و-ب} = و^۲+وب+ب^۲+\frac{۲ب^۲}{و-ب}$

(۸) $\frac{و^۲-ب^۲}{و+ب} = و^۲-وب+ب^۲-\frac{۲ب^۲}{و+ب}$

(۹) $\frac{و^۲+۲وب+۳ب^۲}{و+ب} = و+ب+\frac{۲ب^۲}{و+ب}$

(۱۰) $\frac{و^۲+۲وب-۳ب^۲}{و+ب} = و+ب-\frac{۴ب^۲}{و+ب}$

(۱۱) $\frac{لا^۶}{لا^۲+ی^۲} = لا^۴-لا^۲ی^۲+ی^۴-\frac{ی^۶}{لا^۲+ی^۲}$

(۱۲) $\frac{لا^۶}{لا^۲-ی^۲} = لا^۴+لا^۲ی^۲+ی^۴+\frac{ی^۶}{لا^۲-ی^۲}$

(۱۳) $\frac{لا^۳ی^۳ع^۳+لا^۲ی^۲ع^۲+لا ی ع}{لا^۳ی^۳ع^۳} = \frac{۱}{ی ع}+\frac{۱}{ع لا}+\frac{۱}{لا ی}$

(۱۴) $\frac{لا^۲ی^۲ع^۲+ی ع لا^۲+ع لا^۲ی^۲}{لا^۳ی^۳ع^۳} = \frac{۱}{لا}+\frac{۱}{ی}+\frac{۱}{ع}$

(۱۵) $\frac{۳و-۶}{(و-۱)(و-۲)(و-۳)} = \frac{۱}{(و-۲)(و-۳)}+\frac{۱}{(و-۱)(و-۳)}+\frac{۱}{(و-۱)(و-۲)}$

(۱۶) $\frac{۳لا^۲-۱۴}{(لا+۱)(لا+۲)(لا+۳)} = \frac{۱}{(لا+۲)(لا+۳)}+\frac{۱}{(لا+۳)(لا+۱)}+\frac{۱}{(لا+۱)(لا+۲)}$

(۱۷) $\frac{۱-لا}{۱+لا} = ۱-۳لا+۳لا^۲-۳لا^۳+\frac{۳لا^۳}{۱+لا}$

(۱۸) $\frac{و^۵}{لا^۲-و^۲} = \frac{و^۳}{لا^۲}+\frac{و^۵}{لا^۴}+\frac{و^۵ لا^۲}{لا^۴(لا^۲-و^۲)}$

(۱۹) $\frac{و^۶}{لا^۲(لا+و)^۲} = \frac{و^۲}{لا^۲}-\frac{و^۳}{لا^۳}+\frac{و^۴}{لا^۴}-\frac{و^۵(۲لا+و)}{لا^۵(لا+و)^۲}$

$= ۱-\frac{۲لا}{و}+\frac{۳لا^۲}{و^۲}-\frac{۴لا^۳}{و^۳}+\frac{و^۴(۳لا+و)}{لا^۴(لا+و)^۲}$

(۲۰) $\frac{لا^۲-۱}{لا+و} = لا-و لا^۲+و^۲لا-و^۳+\frac{و^۳-۱}{لا+و}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 266 of 308

(۲۱) قیمت جملہ ذیل معلوم کنید $\frac{لا+۲و}{۲ب+لا}+\frac{لا-۲و}{۲ب-لا}+\frac{۴و ب}{لا^۲-۴ب^۲}$ اگر لا $=\frac{و+ب}{و-ب}$

(۲۲) ثابت کنید کہ $\frac{لا+و}{لا-و}+\frac{لا+ب}{لا-ب}+\frac{لا+ج}{لا-ج}=۳+\frac{۶وبج}{(لا-و)(لا-ب)(لا-ج)}$

وقتیکہ لا $=\frac{۲(وب+بج+جو)}{و+ب+ج}$

(۲۳) اگر لا $=\frac{وب+بج+جو}{و+ب+ج}$ ثابت کنید کہ $\frac{و+۲لا}{و-۲لا}+\frac{ب+۲لا}{ب-۲لا}$

$+\frac{ج+۲لا}{ج-۲لا}+۳=\frac{۶وبج}{(و-۲لا)(ب-۲لا)(ج-۲لا)}$

(۲۴) قیمت جملہ ذیل را معلوم کنید $\frac{لا^۲-(ب+ج)لا}{(لا-ب)(لا-ج)}+\frac{لا^۲-(ج+و)لا}{(لا-ج)(لا-و)}$

$+\frac{لا^۲-(و+ب)لا}{(لا-و)(لا-ب)}$ اگر لا $=\frac{۳وبج}{وب+بج+جو}$

(۲۵) قیمت $\frac{لا^۲-ی^۲+لا}{ی^۲-لا^۲+ی}$ را معلوم کنید اگر لا $=\frac{و-ب}{و+ب}$ وی $=\frac{و+ب}{و-ب}$ باشد

(۲۶) قیمت $\frac{لا^۴+۳وب لا^۲-۱۰و^۲ب^۲+۲وب(و^۲+ب^۲)}{لا^۴+۷وب لا^۲+۱۰و^۲ب^۲}\times\frac{و^۲+ب^۲}{و^۲-۲وب+ب^۲}$ را معلوم کنید اگر لا $=و+ب$

(۲۷) قیمت $\frac{لا^۲ی^۲+۳(۲لا^۲-ی^۲)وب-۱۸و^۲ب^۲}{ی^۴+۹وب ی^۲+۱۸و^۲ب^۲}\times\frac{و^۳-ب^۳}{و^۳+ب^۳}$ را معلوم کنید۔

اگر لا $=و+ب$ وی $=و-ب$ باشد

(۲۸) قیمت $\frac{لا^۴+وب لا^۲-۲و^۲ب^۲}{لا^۴ی^۴+(لا^۴+۲ی^۴)وب+۲و^۲ب^۲}\times\frac{و^۲+وب+ب^۲}{و^۲-وب+ب^۲}$ را معلوم کنید

اگر لا $=و+ب$ وی $=و-ب$ باشد

(۲۹) $\frac{لا^۹}{لا^۲+۱}+\frac{لا^۶}{لا^۲-۱}+\frac{۱}{لا^۲+۱}-\frac{۱}{لا^۲-۱}$ را مختصر کنید:-

(۳۰) $\frac{لا^۲-(و-ب)^۲}{(لا+ب)^۲-و^۲}+\frac{و^۲-(لا-ب)^۲}{(لا+و)^۲-ب^۲}+\frac{ب^۲-(لا-و)^۲}{(و+ب)^۲-لا^۲}$ را مختصر کنید

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 267 of 308

(۳۱) $\frac{(ا+۲ب)^۲-ب^۲}{(ا+ب)-۴ب^۲}+\frac{(ا-ب)^۲-۴ب^۲}{(ا-۲ب)^۲-ب^۲}+\frac{(۲ا+۳ب)^۲-ب^۲}{(۲ا+ب)^۲-۹ب^۲}$ کو مختصر کیجئے

(۳۲) $\frac{لا^۲-(لا-۱)^۲}{(لا+۱)^۲-لا^۲}+\frac{لا^۲-(لا-۱)^۲}{لا^۲(لا+۱)^۲-۱}+\frac{لا^۲(لا-۱)^۲-۱}{لا^۲-(لا+۱)^۲}$ کو مختصر کیجئے

(۳۳) اگر ۲س = ا + ب + ج ثابت کیجئے کہ ۱ - $\frac{ا^۲+ب^۲+ج^۲}{۲اب}$ = $\frac{۲(س-ا)(س-ب)}{اب}$

(۳۴) $\frac{ا^۲-(ب-ج)^۲}{ب^۲-(ج-ا)^۲}+\frac{ب-ج}{ج-ا}+\frac{ا-ب}{ج^۲-(ا-ب)^۲}$ کو مختصر کیجئے

(۳۵) $\frac{ا+ب}{۲اب}(ا+ب-ج)+\frac{ب-ج}{۲بج}(ب-ج-ا)+\frac{ج+ا}{۲جا}(ج+ا-ب)$ کو مختصر کیجئے

(۳۶) $\frac{لا+ی}{۲لای}(لا^۲+ی^۲-ع^۲)+\frac{ی+ع}{۲یع}(ی^۲+ع^۲-لا^۲)+\frac{ع+لا}{۲علا}(ع^۲+لا^۲-ی^۲)$ کو مختصر کیجئے

(۳۷) $\frac{ا+ب}{۲اب}(ا^۲+ب^۲-ج^۲)+\frac{ب+ج}{۲بج}(ب^۲+ج^۲-ا^۲)+\frac{ج+ا}{۲جا}(ج^۲+ا^۲-ب^۲)$ کو مختصر کیجئے

(۳۸) اگر لا = $\frac{ب^۲+ج^۲-ا^۲}{۲بج}$ وی = $\frac{ا^۲+ج^۲-ب^۲}{۲اج}$ وع = $\frac{ا^۲+ب^۲-ج^۲}{۲اب}$ باشد قیمت جملے ذیل کو معلوم کیجئے

(ب + ج) لا + (ج + ا) ی + (ا + ب) ع

(۳۹) اگر ط = $\frac{ا-ب}{لا-ج}$ وق = $\frac{ب-ج}{لا-ا}$ وس = $\frac{ج-ا}{لا-ب}$ باشد قیمت ط + ق س + ط ق س کو معلوم کیجئے

(۴۰) ثابت کیجئے کہ $\left(\frac{۱}{ب-ج}+\frac{۱}{ج-ا}+\frac{۱}{ا-ب}\right)^۲=\frac{۱}{(ب-ج)^۲}+\frac{۱}{(ج-ا)^۲}+\frac{۱}{(ا-ب)^۲}$

(۴۱) ثابت کیجئے کہ $\frac{۱}{۱+لا}+\frac{۲لا}{۱+لا^۲}+\frac{۴لا^۳}{۱+لا^۴}+\frac{۸لا^۷}{۱+لا^۸}=\frac{۱}{۱-لا}-\frac{۱۶لا^{۱۵}}{۱-لا^{۱۶}}$

جملہائے ذیل کو مختصر کیجئے

(۴۲) $\frac{۱}{(ا-ب)(ا-ج)}+\frac{۱}{(ب-ا)(ب-ج)}+\frac{۱}{(ج-ا)(ج-ب)}$

(۴۳) $\frac{ا}{(ا-ب)(ا-ج)}+\frac{ب}{(ب-ا)(ب-ج)}+\frac{ج}{(ج-ا)(ج-ب)}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 268 of 308

(۴۴) $\frac{لا^2 ی ع}{(لا-ی)(لا-ع)} + \frac{ی^2 ع لا}{(ی-ع)(ی-لا)} + \frac{ع^2 لا ی}{(ع-لا)(ع-ی)}$

(۴۵) $\frac{ا ب ج}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{ج ا ب}{(ب-ج)(ب-ا)} + \frac{ا ب}{(ج-ا)(ج-ب)}$

(۴۶) $\frac{لا^2 ی ع}{(لا-ی)(لا-ع)} + \frac{ی^2 ع لا}{(ی+ع)(ی-لا)} + \frac{ع^2 لا ی}{(ع-لا)(ع+ی)}$

(۴۷) $\frac{1}{لا(لا-ی)(لا-ع)} + \frac{1}{ی(ی-لا)(ی-ع)} + \frac{1}{ع(ع-لا)(ع-ی)}$

(۴۸) $\frac{1}{(ا-ب)(ا ج)(لا-ا)} + \frac{1}{(ب-ا)(ب ج)(لا-ب)} + \frac{1}{(ج-ا)(ج-ب)(لا ج)}$

(۴۹) $\frac{ا}{(ا-ب)(ا ج)(لا-ا)} + \frac{ب}{(ب-ا)(ب ج)(لا-ب)} + \frac{ج}{(ج-ا)(ج-ب)(لا ج)}$

(۵۰) $\frac{ا^2}{(ا-ب)(ا ج)(لا-ا)} + \frac{ب^2}{(ب-ا)(ب ج)(لا-ب)} + \frac{ج^2}{(ج-ا)(ج-ب)(لا ج)}$

(۵۱) $\frac{ا^2 ع ا + ک}{(ا-ب)(ا ج)(لا-ا)} + \frac{ب ا ع ب + ک}{(ب-ا)(ب ج)(لا-ب)} + \frac{ج^2 ع ج + ک}{(ج-ا)(ج-ب)(لا ج)}$

(۵۲) ثابت کنید کہ $ا^2\left(\frac{1}{ب}-\frac{1}{ج}\right) + ب^2\left(\frac{1}{ج}-\frac{1}{ا}\right) + ج^2\left(\frac{1}{ا}-\frac{1}{ب}\right) = ا+ب+ج$

$ا\left(\frac{1}{ب}-\frac{1}{ج}\right) + ب\left(\frac{1}{ج}-\frac{1}{ا}\right) + ج\left(\frac{1}{ا}-\frac{1}{ب}\right)$

(۵۳) ثابت کنید کہ $ا^3(ب-ج^2) + ب^3(ج-ا^2) + ج^3(ا-ب^2) = (ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)(ا+ب+ج)$

$ا^2(ب-ج) + ب^2(ج-ا) + ج^2(ا-ب)$

(۵۴) ثابت کنید کہ $\frac{ا(ا+ب)(ا ج)}{(ا-ب)(ا ج)} + \frac{ب(ب+ا)(ب ج)}{(ب-ا)(ب ج)} + \frac{ج(ج+ا)(ج+ب)}{(ج-ا)(ج-ب)} = ا+ب+ج$

(۵۵) ثابت کنید کہ $\frac{ا ب ج}{(ا-ب)(ا ج)} + \frac{ب ا ج}{(ب-ا)(ب ج)} + \frac{ج ا ب}{(ج-ا)(ج-ب)} = ا$

(۵۶) $\frac{ا ب ج (لا-ا)^2}{(ا-ب)(ا ج)} + \frac{ا ب ج (لا-ب)^2}{(ب-ج)(ب-ا)} + \frac{ا ب (لا-ج)^2}{(ج-ا)(ج-ب)}$ کو مختصر کیجئے

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 269 of 308

جواب

مسئلہ (۱)

(۱) ۱۴۰ (۲) ۲۸ (۳) ۱۲ میل (۴) ۷½ میل (۵) ۹
(۶) ۱۲ (۷) ۴۵ دقیقہ (۸) ۱۵ دقیقہ (۹) ۳۲ (۱۰) ۲۰ و ۱/۴۴
(۱۱) ۵ مربع گز (۱۲) ۱۶ (۱۳) ۲۰ (۱۴) ۹ (۱۵) ۴
(۱۶) ۹۰۰ (۱۷) ۱۹۵۲ (۱۸) ۷۲۰

مسئلہ (۲)

(۱) ۳۴ (۲) ۰ (۳) ۴ (۴) ۱ (۵) ۵ ۱/۴
(۶) ۱ ۱/۴ (۷) ۶ (۸) ۴ (۹) ۱۲ (۱۰) ۸
(۱۱) ۲ (۱۲) ۱/۴ (۱۳) ۵ (۱۴) ۸۰ (۱۵) ۲۹
(۱۶) ۳۲۵ (۱۷) ۶۳ (۱۸) ۰ (۱۹) ۴۰ (۲۰) ۱۴
(۲۱) ۱۱۴ (۲۲) ۴ (۲۳) ۶۴ (۲۴) ۶۹ (۲۵) ۱۹

مسئلہ (۳)

(۱) ۲۴ (۲) ۳۷ ½ (۳) ۴ (۴) ۷۲۰ (۵) ۳ ½
(۶) ۲/۴ (۷) ۱ (۸) ۴۰ (۹) ۲/۴ (۱۰) ۲/۹
(۱۱) ۰ (۱۲) ۵۰ (۱۳) ۱ (۱۴) ۲۵ (۱۵) ۱۰۰
(۱۶) ۳۰۰ (۱۷) ۱۵۲۰ (۱۸) ۴۲۵ (۱۹) ۲۲۶۸۰ (۲۰) ۳۴۵۰۰۰

مسئلہ (۴)

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۱۸ (۵) ۸
(۶) ۱۶ (۷) ۳۲ (۸) ۲۵۶ (۹) ۱۱ (۱۰) ۲۱

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 270 of 308

(۱۱) ۱۱ (۱۲) ۹ (۱۳) ۳ (۱۴) ۱۶۲ (۱۵) ۱۸
(۱۶) ۹ (۱۷) ۰ (۱۸) ۲۱ (۱۹) ۲۳ (۲۰) ۱
(۲۱) ۹۸ (۲۲) ۵۰ (۲۳) ۹ (۲۴) ۴۲ (۲۵) ۵۱
(۲۶) ۲۸۰۵ (۲۷) ۷ (۲۸) ۱۷۱ (۲۹) ۲۴۰۱ (۳۰) ۱۹۲
(۳۱) ۱۰۲۹ (۳۲) ۱۲۱۸ (۳۳) ۴۸ (۳۴) ۱۴۳ (۳۵) ۱۸۷۵۰
(۳۶) ۱۶ (۳۷) ۱۶۰ (۳۸) ۷۸

امثلہ (۵)

(۱) نقصان ا = ۱۰۰ روپیہ (۲) ۷۰ (۳) ۲۵
(۴) ۱۰۰ (۵) ۳۰ (۶) ۴ و ۳ و ۵
(۷) ۱۵ و ۱۰ و ۲۰ و ۳۰ (۸) ۱۵ و ۱۰ و ۲۰ و ۳۰

امثلہ (۶)

(۱) ۲۲ (۲) ۱۸ (۳) ۳۱ و ۴۱ (۴) ۱۹ (۵) ۱۱۸۰
(۶) ۲۲۲ (۷) ۲۰۳۴ (۸) ۶۵۸ (۹) ۷۱۲۸
(۱۰) ۲۲۰۴۱۶۴۱۷

امثلہ (۷)

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۰ (۵) ۱۴
(۶) ۱۶ (۷) ۵۱ (۸) ۸ (۹) ۱۶ (۱۰) ۳۲

امثلہ (۸)

(۱) $ا^2 + ۲ب^2 + ۳ج^2$ (۲) $ا^2 + ۲ب^2 + ج^2$ (۳) $۲ا^2 + ۴ب^2 + ۵ج^2$
(۴) $۳م^2 + ن^2 + ط^2 + ۲ب^2 + س^2 + ۳ج^2$ (۵) $۲آ^2 + ۹ب^2 + ج^2 + ۲د^2 + ف^2$
(۶) $۶آ^2 + ای^2 + ۱۱الای^2 + ع^2 + ۱۰۰الآی^2$ (۷) $۱۱ا^2 + ۱۱ب^2 + ج^2 + ۸ا$
(۸) $۲۵الآم^2 + ن^2 + ۱۶م^2 + ن^2 + لا$ (۹) ۱۴ (۱۰) ۲۳۴ (۱۱) ۹۲
(۱۲) ۵ (۱۳) ۱۷۷ (۱۴) ۴۶۵۳ (۱۵) ۱۴۰۱۵

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 271 of 308

مسئلہ (۹)

(۱) $-٦ا+ب-٣ج$ (۲) $٢لا-٤$

(۳) $٢لا^{٢}+٩لا+٧$ (۴) $-ا+٢ب-٨د$

(۵) $٢لا^{٢}-٣ی^{٢}$ (۶) $-٥لا^{٢}-٢لای-ی^{٢}-٢لا-ی-٢$

(۷) $٤ا^{٢}ب^{٢}$ (۸) $-م^{٢}ن^{٢}-م^{٢}ن ط-م^{٢}ن^{٢}$

(۹) $ا^{٢}ب^{٢}لا^{٢}$ (۱۰) $ا^{٢}ب^{٢}ج^{٢}$

(۱۱) $ا^{٢}ب^{٢}-ب^{٢}ج^{٢}ح^{٢}ا^{٢}-ا^{٢}ب^{٢}ج^{٢}$ (۱۲) $ا^{٢}+ب^{٢}+ج^{٢}-٢ا ب ج$

(۱۳) ۱۵۳ (۱۴) -١٢٥ (۱۵) ۲۰۰ (۱۶) ۱۲۰

(۱۷) ۴۰۰ (۱۸) ۱۲۸۰ (۱۹) ۱۲۸۰ (۲۰) ۰

مسئلہ (۱۰)

(۱) -١٠ (۲) ۱۰ (۳) -٦ (۴) -٢٢ (۵) ۰

(۶) -٢٩١ (۷) -٧٧ (۸) ۵۳ (۹) ۱۷ (۱۰) ۱۷۷

مسئلہ (۱۱)

(۱) $ا+٤ب-٢ج$ (۲) $-٢ا+٣ب+٥ج$ (۳) $٤لا+٢ی-٤٣$

(۴) $-٢م^{٢}-٣م^{٢}ن-ا$ (۵) $٢لا^{٢}+ی^{٢}-٤$ (۶) $-ا+٥لای-١١ای^{٢}$

(۷) $٤ا^{٢}ب^{٢}-ا^{٢}ب^{٢}$ (۸) $٧ب^{٢}ج^{٢}-ج^{٢}+١٠لای$ (۹) $-لا^{٢}+لا^{٢}-لا+٢$

(۱۰) $لا^{٢}-٤لا^{٢}ای-٢لا^{٢}ای^{٢}$ (۱۱) $-م^{٢}-٦م^{٢}ن+٧م^{٢}ن-٢٤م^{٢}ن^{٢}$

(۱۲) $-٣ط^{٢}-٥ط^{٢}ق-٣طق^{٢}-١٠طق^{٢}-٢ق^{٣}$

(۱۳) $١٠لا^{٢}-١١لای+١٠لا^{٢}ای^{٢}+٦لای^{٣}-٣ی^{٤}$

(۱۴) $٢م^{٢}ن لا-٧ن^{٢}لام+١٢لام^{٢}ن+٧م^{٢}ن لا+٨ن^{٢}لام$

(۱۵) $١١لا^{٣}-٣لا^{٢}ای-٥٠لای^{٢}+١٥لا^{٢}ای^{٣}+٢٦لای^{٤}-٩لای^{٥}+٤٠ی^{٦}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 272 of 308

مسئلہ ۱۲

(۱) -و+۷ب--۱ج (۲) ۱۰م-۷ن+۱۲س (۳) ۳لا²-۴لای+۵ی²

(۴) لا²+۵لا²-۸لا-۱ (۵) و²+۲وب-۴ب²ج (۶) ۸لا²-۸لای+۱۲لای²-۲ی²

(۷) ۶-۹لا+۱۲لا²-۱۶لا³ (۸) ۲لا²-۲لا²-لا²-۲ (۹) ۶لا³-۸لا²+لا²--۱لا²-۹لا+۳

(۱۰) -لا²-لا²ی-۱۵لای²+۸ی²-و²-۲وب (۱۱) ۱۴لا²ی-۷لا²ی²+۵لای²ع²-۲لا²ی²ع

(۱۲) -۳و²+ب²+ح²+وب+۵بج-۹وح (۱۳) ۵لا²-۵لای+ی²-لا-ی-۳

(۱۴) -و²-وب+۱۲وب²-۲ب²+۸و²-۷وب-۳ب²

(۱۵) ۵و³لا²-۸و²لا³+۸ی²ع²ب²ج²+۲ی²ع²ب²ج+۴ی²ع²ب²ج

(۱۶) -۲-لا³ی³ع³+۲لای²ع²+۲لا³ع³ی+۶لا²ی²ع²-۳لای²ع²

(۱۷) ۴لا⁴ی²ع²-۸۰لا⁴ی³ع²+۲۸لا³ی²ع²-۲۲لا²ی²ع²-۱۰۲لا²ی²ع²+۱۵۵لا²ی²ع²

(۱۸) -۱۲لا³ی³ع³...۱لا³ی³ع²+۵۸لا³ی³ع²+۹۲لا³ی²ع³+۳۹لا³ی³ع²-۳۸لا³ی²ع²

(۱۹) -۴لا²+۵لای-۷ی²-۸ی²ع

(۲۰) ۶لا²-۱۲لا²ی²+۲وب لا-۷ب²لای²-۹لای²وب

(۲۱) -۲لا³+۶لا²ی-۲لا²ی²+۸لای²+۷ی³

(۲۲) -۲لا³+۳لا²ی--۱۰لا²ی²-۴لا²ی²-۱۳لای³+۰۰۵ی³

(۲۳) و²+۵وب-۸ب² (۲۴) ۱۴لا²-۸لای+ی²-۱۲لا-۱۵ای+۹

(۲۵) ۲و²-۴و²ب+۷وب²-۵ب³ (۲۶) -۱۲لا²ی+۷لا²ی²-۸لا³+۷لای²-۲۹

(۲۷) ۵و²-۴وب-۵بج+۱۱ب² (۲۸) -۱۲لا²-۳ی²-۵لای-۱۳لا-۲

(۲۹) -۳و²-۱۱ب²ج-۶وح²-۵ب²

(۳۰) -۴لا²-۲۲لای²-۴۵ی²-۱۱لا²-۲۴لای-۱۵

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 273 of 308

مسئلہ ۱۳

(۱) $-۴ا+۸ب$ (۲) $۷لا-۴ی$ (۳) $-۱۲لا$ (۴) $-۴ا+۲ب$
(۵) $۱۵ا+۲ب$ (۶) $۲ب$ (۷) ۶ (۸) ۸
(۹) $-۲ا+۷ب$ (۱۰) ۰ (۱۱) $-۱۲لا+۵ی+۶ز$ (۱۲) $-۲ج$
(۱۳) $۱۵لا-۱۵ای$ (۱۴) $۸ا-۸ب$ (۱۵) $۱۱م-۷ن$
(۱۶) $۶ا-۶ب-۸ج$ (۱۷) $۶لا-۶ی-۲۰ع$ (۱۸) $لا-ی-۱۳ع$
(۱۹) $-۳لا-ی-ع$ (۲۰) $ا-۱۱ب+۷ج$ (۲۱) $۲لا-۱۲ای+۲۰ع$
(۲۲) $۱۵ا-ب+۱۱ج$ (۲۳) $لا-۳ی+۲ع$ (۲۴) $۱۱ا-۲ب-۶ج$
(۲۵) $ا-(ب+ج-د)+(-م+ن-لا)+ی-ع$
(۲۶) $ا-\{ب+ج-د+م+(-ن+لا-ی+ع)\}$
(۲۷) $\{ا-ب-(ج-د+م)\}-\{-ن-(-لا+ی-ع)\}$
(۲۸) $-\{-ا-(-ب-ج)\}-\{-د-(-م+ن)\}-\{لا-(ی-ع)\}$

مسئلہ ۱۵

(۱) ۵۴ (۲) ۹۹ (۳) ۱۲۶ (۴) -۳۹۳ (۵) ۳۳
(۶) ۳۰ (۷) ۰ (۸) ۱۱۳۶ (۹) -۲۸۰

مسئلہ ۱۷

(۱۴) $-۴۲لا^{۲}ی^{۲}$ (۱۵) $-۲۴لا^{۳}ی^{۳}$ (۱۶) $۴۰لا^{۳}ی^{۳}$
(۱۷) $-۱۵۶لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲}$ (۱۸) $۱۴۰لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲}$ (۱۹) $۲۴ا^{۲}ب^{۲}$
(۲۰) $-۷۰ا^{۲}ب^{۲}$ (۲۱) $۴۸لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲}$ (۲۲) $۲۴لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲}$

مسئلہ ۱۸

(۱) $-۱۰لا^{۲}$ (۲) $-۳ا^{۲}ب^{۲}$ (۳) $۲۱ح^{۲}ن^{۲}$ (۴) $-۱۸لا^{۲}ی^{۲}$
(۵) $۳ا^{۲}ب^{۲}$ (۶) $-۴۰م^{۲}ن^{۲}$ (۷) $۵۰لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲}$ (۸) $-۲۴لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲}$
(۹) $۴۸لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲}$ (۱۰) $۲۵ا^{۲}ب^{۲}ج^{۲}$ (۱۱) $-۲۴لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲}$ (۱۲) $۳۲ا^{۲}ب^{۲}لا^{۲}ی^{۲}$
(۱۳) $۳۵ا^{۲}ب^{۲}ع^{۲}$ (۱۴) $-۶۰ا^{۲}لا^{۲}ی^{۲}$ (۱۵) $۷۰لا^{۲}ی^{۲}ع^{۲}$ (۱۶) $-۱۸ا^{۲}ب^{۲}ج^{۲}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 274 of 308

(۱۷) ۶۳ وَ لا ی² (۱۸) ۱۶۰ لا ی ع² (۱۹) ۶۵ وَ سا ج² (۲۰) ۱۱۲ وَ لا ی ع²

مسئلہ (۱۹)

(۱) -۲ وَ ا ب + ۳ وَ ب² (۲) -۵ وَ² + ۱۰ وَ ب - ۱۵ وَ ج
(۳) ۲ وَ ب ج - ۳ وَ ب ج - ب ج² (۴) -۳ لا ی² + ۶ لا ی² + ۳ لا ی²
(۵) ۷ وَ ب² - ۷ وَ ب² + ۲۱ وَ ب² - ۳۵ وَ ب²
(۶) ۱۶ وَ سا ج² + ۲۴ وَ ب ج² - ۳۲ وَ ب ج² + ۴۰ وَ ب ج²
(۷) -۶ وَ لا + ۸ وَ لا² - ۱۰ وَ لا (۸) -۸ م ن + ۱۲ م ن² - ۲۰ م ن²
(۹) -۲۰ لا + ۲۴ لا² - ۲۸ لا³ + ۳۲ لا⁴
(۱۰) ۱۲ ج د³ - ۱۸ ج د² + ۳۰ ج د + ۲۴ ج د²
(۱۱) -۱۶ وَ ب² + ۱۲ وَ ب² - ۱۰ وَ ب³ + ۸ وَ ب²
(۱۲) وَ ب ج² - وَ ب² ج + وَ ب ج² - وَ ب ج³ + وَ ب² ج
(۱۳) ۷ لا² - ۲ لا² (۱۴) -۵ لا² + ۵ لا (۱۵) ۹ لا² - ۲۵ (۱۶) لا + ۴ لا²
(۱۷) وَ ب² + ۴ وَ ب² (۱۸) ۴ وَ ب² + ۸۱ وَ ب² (۱۹) ۳ وَ ی (۲۰) -۲ وَ ب
(۲۱) وَ لا²

مسئلہ (۲۰)

(۱) ۲ وَ² + ۵ وَ ب + ۳ ب² (۲) ۲ ن² - ۵ م ن + ۳ ن²
(۳) وَ² + ب² ج² + ۲ وَ ب + ۲ وَ ج + ۲ ب ج (۴) وَ² + ب² ج² - ۲ وَ ب + ۲ وَ ج - ۲ ب ج
(۵) وَ² + ب² + ج² - ۲ وَ ب - ۲ وَ ج + ۲ ب ج
(۶) ۲ وَ² + ۲ ب² + ۳ ج² - ۵ وَ ب - ۷ وَ ج + ۵ ب ج
(۷) ۲ لا² + ۳ ی² + ۴ ع² - ۵ لا ی - ۶ لا ع + ۷ ی ع
(۸) ۵ لا² - ۲ وَ² - ۳ ب² + ۲ لا وَ - ۲ لا ب + ۵ وَ ب
(۹) لا² - ی² - ع² - لا ی - لا ع + لا ی - ی ع + لا ع - ع ی
(۱۰) لا ی² - ی ع² - ع لا² - ۲ ی ع لا

مسئلہ (۲۱)

(۱) لا² + لا² + ۱ (۲) وَ² + ب² (۳) وَ² - ب² (۴) وَ² - ۲ وَ ب + ب²

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 275 of 308

(۵) $لا^{2} + لا + ۱$ (۶) $لا^{2} - لای + ۲لای + ی$ (۷) $م + ن$

(۸) $ط - ق$ (۹) $۲۷و^{3} - ۷۵و^{2}ب + ۴۵وب^{2} - ۱۲۵ب^{3}$

(۱۰) $و^{3} - ۲۶و^{2}ب + ۲۵وب^{2}$ (۱۱) $۴و^{3} - ۹ب^{3} + ۲۴بج - ۶اح^{2}$

(۱۲) $لا^{3} - ۵لا^{2} + ۵لا - ۱$ (۱۳) $لا^{3} - ۲و^{2}لا + و^{2}$

(۱۴) $و^{3} - ۳و^{2}ب + ۳وب^{2} - ب^{3}$ (۱۵) $لا^{3} + ۱۰لا - ۳۳$

(۱۶) $لا^{3} - ۲لا^{2} + ۱$ (۱۷) $و^{3} + و^{2}ب + وب^{2} + ب^{3}$

(۱۸) $لا^{3} + ی^{3} + ع^{3} - ۳لای ع$ (۱۹) $و^{3} + ب^{3} + ج^{3} - ۳وبج$

(۲۰) $۲و^{3} - و^{2}ب - ۱۴وب^{2} + ۱۳ب^{3} - ۴۳و^{2}ب + ۲۳وب^{2} - ۲۰ب^{3}$

(۲۱) $و^{3} - ب^{3}$ (۲۲) $و^{3} - ب^{3}$ (۲۳) $لا^{12} - ی^{12}$

(۲۴) $لا^{5} + ۲۵لا^{3}ی^{2} - ۲۴لای^{4} + ۲۵ی^{5}$ (۲۵) $و^{12} - ب^{12}$

(۲۶) $وط لا^{2} + (بط - وق) لا - (جط + بق) لا + جق$

(۲۷) $م ن لا^{2} = (ن^{2} + م س) لا^{2} + س^{2}$

(۲۸) $و لا - (۱ + و) ب لا^{2} + (ج + ب - و ج) لا - ج$

(۲۹) $وب لا^{5} - (ب^{2} + اح) لا^{4} + (۲بج + اد) لا^{3} - (۲ب د + ج^{2}) لا^{2} + ۲ج د لا - د^{2}$

(۳۰) $ط لا^{4} - (م ق - م ر + ن ط) لا^{3} + (م س + ن ق - ن ر - ط س) لا^{2} + (ق ر - ن س) لا - س^{2}$

(۳۱) $لا^{3} + (و + ب + ج) لا^{2} + (وب + وج + بج) لا + وبج$

(۳۲) $لا^{3} - (و + ب + ج) لا^{2} + (وب + وج + بج) لا - وبج$

(۵۱) $-۶لا^{2}$ (۵۲) $-۲ی^{3}$ (۵۳) $۶لا^{3}ی$ (۵۴) $۱۵لا^{5}ی^{2}$

(۵۵) $-۳وب^{2}$ (۵۶) $-وی^{4}$ (۵۷) $۱۲وبج^{2}$ (۵۸) $۱۵لای ع$

(۵۹) $-۳۰و^{3}ب^{2}ج$ (۶۰) $۶ق^{3}لا^{2}ی^{2}$ (۶۱) $و + ۲و^{2}ب + وب^{2}$

(۶۲) $و - ۲و^{2}ب + وب^{2}$ (۶۳) $۹لا^{2} - ۱۶ی^{2}$ (۶۴) $و + ب$

(۶۵) $لا - ی$ (۶۶) $و^{2} + و^{2}ب + ب^{2}$ (۶۷) $۴لا^{3} - ۳۷لا^{2}ی^{2} + ۹ی^{3}$

(۶۸) $و^{2} - ب^{2}$ (۶۹) $لا^{2} - ی^{2}$ (۷۰) $و - ب^{2}$

(۷۱) $لا + ی + ع - ۳لا^{2}ی^{2}ع^{2}$ (۷۲) $و^{13} + لا^{13}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 276 of 308

(۷۳) $ا^{۵} - ۶ا^{۴}ب + ۱۳ا^{۳}ب^{۲} - ۱۳ا^{۲}ب^{۳} + ۶اب^{۴} - ب^{۵}$

(۷۴) $لا^{۶} - ۵لا^{۳}ی^{۲} + ۴ی^{۶}$

(۷۵) $۴ا^{۶} + ۱۲ا^{۵}ب^{۲} + ۹ا^{۴}ب^{۴} - ۲۵ب^{۶}$

(۷۶) $۹لا^{۶} - ۲۵لا^{۴}ی^{۲} + ۷۰لا^{۲}ی^{۴} - ۴۹ی^{۶}$

(۷۷) $۲لا^{۵} - ۳لا^{۴}و + ۴لا^{۳}و^{۲} - ۵لا^{۲}و^{۳} + ۶لاو^{۴} - ۷لا^{۵}و^{۵} + ۸لا^{۶}و^{۶}$

(۷۸) $-۳ا^{۵}ب^{۵} - ۲ا^{۴}ب^{۶} + ۵ا^{۳}ب^{۷} - ۷ا^{۲}ب^{۸} + ۶اب^{۹} - ۵ب^{۱۰} + ۸ا^{۲}ب^{۲}$

امثلہ (۲۲)

(۱) $۹لا^{۲} + ۲۴لا + ۱۶$ (۲) $۴۹لا^{۲} + ۱۱۲لا + ۶۴$ (۳) $و^{۲} + ۱۰او + ۲۵ب^{۲}$

(۴) $۴و^{۲} + ۲۸وب + ۴۹ب^{۲}$ (۵) $۹لا^{۲} + ۴۸لای + ۶۴ی^{۲}$ (۶) $۲۵م^{۲} + ۸۰مں + ۶۴ں^{۲}$

(۷) $و^{۲}لا^{۲} + ۶وب لای + ۹ب^{۲}ی^{۲}$ (۸) $۱۶او^{۲}ب^{۲} + ۸۸وب^{۲}ج + ۱۲۱ب^{۲}ج^{۲}$ (۹) $۴و^{۲} + ۲۰وب + ۲۵ب^{۲}$

(۱۰) $۱۶م^{۲} + ۸مں^{۲} + ں^{۴}$ (۱۱) $و^{۲} + ۴ب^{۲} + ۹ج^{۲} + ۴وب + ۶وج + ۱۲ب ج$

(۱۲) $و^{۲}ب^{۲} + ب^{۲}ج^{۲} + ج^{۲}و^{۲} + ۲وب^{۲}ج + ۲و^{۲}ب ج + ۲وب ج^{۲}$

(۱۳) $۴ط^{۲} + ۹ق^{۲} + ۱۶ر^{۲} + ۱۲طق + ۱۶طر + ۲۴قر$

(۱۴) $لا^{۲} + ی^{۲} + ع^{۲} + ۲لا^{۲}ی^{۲} + ۲لا^{۲}ع^{۲} + ۲ی^{۲}ع^{۲}$

(۱۵) $۴لا^{۲} + ۹ی^{۲} + ۱۶ع^{۲} + ۱۲لای + ۱۶لاع + ۲۴ی ع$

(۱۶) $لا^{۲} + ی^{۲} + ع^{۲} + ۲لا^{۲}ی^{۲} + ۲لا^{۲}ع^{۲} + ۲ی^{۲}ع^{۲}$

(۱۷) $لا^{۲} + ی^{۲} + ۴و^{۲} + ۹ب^{۲} + ۲لای + ۴لاو + ۶لاب + ۴ی و + ۶ی ب + ۱۲وب$

(۱۸) $۹و^{۲} + ۱۶ب^{۲}ج^{۲} + ۴د^{۲} + ۲۴وب + ۶وج + ۱۲ود + ۸بج + ۱۶ب د + ۴۸ج د$

(۱۹) $۴و^{۲} + لا^{۲} + ۱۶ی^{۲} + ۹ع^{۲} + ۴ولا + ۱۶وی + ۱۲وع + ۸لای + ۶لاع + ۲۴ی ع$

(۲۰) $۱۶م^{۲} + ۹ں^{۲} + ۹ط^{۲} + ۴ق^{۲} + ۲۴مں + ۲۴مط + ۱۶مق + ۱۸ںط + ۱۲ںق + ۱۲طق$

(۲۱) $۴لا^{۲}$ (۲۲) $۶۴ع^{۲}$ (۲۳) $۱۶و^{۲}$ (۲۴) $و^{۲} + ۴وب + ۴ب^{۲}$

(۲۵) $لا^{۲} + ۲لای + ی^{۲}$ (۲۶) ۸۱ (۲۷) ۴ (۲۸) ۰

(۲۹) ۹ (۳۰) ۱ (۳۱) ۱۶ (۳۲) ۲۵

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 277 of 308

مسئلہ ۲۳

(۱) ۴لا^{۲} - ۲۸لا + ۴۹ (۲) ۶۴لا^{۲} - ۸۰لا + ۲۵ (۳) وَ^{۲}لا^{۲} - ۲وَب لای + ب^{۲}ی^{۲}
(۴) ۲۵لا^{۲} + ۳۰لای + ۹ی^{۲} (۵) ۹م^{۲} - ۴۸م ن + ۶۴ن^{۲} (۶) وَ^{۲}ب^{۲} + ۲وَبج د ح د^{۲}
(۷) وَ^{۲}ب^{۲} - ۲وَبج د ح د^{۲} (۸) لا^{۲} - ۴لاای ع + ۴ای ع^{۲}
(۹) م^{۲}ن^{۲}ط^{۲} + ۲م ن طو س + و^{۲}س^{۲} (۱۰) ۴وَ^{۲} - ۲۰وَب^{۲} + ۲۵ب^{۲}
(۱۱) وَ^{۲} + ۴ب^{۲} + ۹ج^{۲} - ۴وَب - ۶وَج + ۱۲بج
(۱۲) ۴لا^{۲} + ۹ی^{۲} + ۱۶ع^{۲} - ۱۲لای - ۱۶لاع + ۲۴ای ع
(۱۳) ۹م^{۲} + ۱۶ن^{۲} + ۲۵و^{۲} - ۲۴م ن - ۳۰م و + ۴۰ن و
(۱۴) وَ^{۲} + ۹ب^{۲} + ۲۵ج^{۲} - ۶وَب^{۲} - ۱۰وَج + ۳۰ب^{۲}ج^{۲}
(۱۵) لا^{۲} + ی^{۲} + وَ^{۲} + ب^{۲} - ۲لای - ۲لاوَ - ۲لاب + ۲ای وَ + ۲ای ب + ۲وَب
(۱۶) وَ^{۲} + ۴لا^{۲} + ۹ب^{۲} + ۱۶ای^{۲} - ۴وَلا - ۶وَب - ۸وَی + ۱۲لاب + ۱۶لای + ۲۴ب ی
(۱۷) ۷۹۲۱ (۱۸) ۱۳۶۸۹ (۱۹) ۲۴۸۰۰۴ (۲۰) ۹۸۶۰۴۹
(۲۱) ۳۶ب^{۲} (۲۲) ۶۴ب^{۲} (۲۳) ۴۹وَ^{۲} (۲۴) ۱۲۱ع^{۲}
(۲۵) ۲۵ب^{۲}ج^{۲} + ۱۰ابج وَ + ج^{۲}وَ^{۲} (۲۶) ۴ (۲۷) ۸۱
(۲۸) ۱۶ (۲۹) ۲۵ (۳۰) ۱۴۴

مسئلہ (۲۴)

(۱) وَ^{۲}لا^{۲} - ب^{۲}ی^{۲} (۲) ۲۵لا^{۲} - ۶۴ (۳) ج^{۲}لا^{۲} - د^{۲} (۴) وَب^{۲} - ب^{۲}ج^{۲}
(۵) ۴۹وَ^{۲} - ۹ب^{۲} (۶) ۱۶وَ^{۲} - ۲۵ب^{۲} (۷) م^{۲} - ۹ن^{۲}
(۸) ۴وَ^{۲}ب^{۲} - ۴۹بج^{۲} (۹) لا^{۲} - ۱ (۱۰) وَ^{۲} - ب^{۲}
(۱۱) وَ^{۲} + ۲وب + ب^{۲}ج^{۲} (۱۲) وَ^{۲} - ب^{۲} - ۲بج ج^{۲} (۱۳) م^{۲} + م^{۲}ن^{۲} + ن^{۲}
(۱۴) وَ^{۲}لا^{۲} - ب^{۲}ی^{۲} + ۲ب ی ج ع - ج^{۲}ع^{۲} (۱۵) وَ^{۲} - ۴ب^{۲} + ۱۲بج - ۹ج^{۲}
(۱۶) لا^{۲} + لا^{۲} + ۱ (۱۷) لا^{۲} + لا^{۲} + ۱ (۱۸) لا^{۲} + ۴ی^{۲} (۱۹) وَ^{۲} + ب^{۲}
(۲۰) لا^{۲} - ۲لا^{۲} + ۱ (۲۱) ۴وَ (ب - ج) (۲۲) ۴وَ (بج - ۲ب) (۲۳) ۴لای (لا + ی)
(۲۴) ۴لا (ی - وَ + ب) (۲۵) ۸وَ (۳ب - ۵ج + ۷د) (۲۶) ۹۳۷۶
(۲۷) ۱۰۶۹۸۴۰ (۲۸) ۴۹۸۵۶۴۵ (۲۹) (۵لا + ۶) (۵لا - ۶)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 278 of 308

(۳۰) $(۳ا+۴ج)(۱۳ا-۴ج)$ (۳۱) $(۴م+۷ن)(۴م-۷ن)$

(۳۲) $(۲ط+۹ق)(۲ط-۹ق)$ (۳۳) $(ا لا+۸ب)(ا لا-۸ب)$

(۳۴) $(۶ لا^۲+۱۱ی^۲)(۶ لا^۲-۱۱ی^۲)$ (۳۵) $(۷+۸د)(۷-۸د)$

(۳۶) $(۱۲ج+۵د)(۱۲ج-۵د)$ (۳۷) $(ا+ب-ج)(ا+ب-ج)$

(۳۸) $(ا+۲ب+۵ج)(ا+۲ب-۵ج)$

(۳۹) $(۲ لا+۳ا-۴ب)(۲ لا-۳ا+۴ب)$

(۴۰) $(ا+۲ب-۳ج)(ا-۲ب+۳ج)$

(۴۱) $(ا^۲+۹ب^۲)(ا+۳ب)(ا-۳ب)$ (۴۲) $(لا-ی+ا-ب)(لا-ی-ا+ب)$

(۴۳) $(۹ لا^۲+۲۵ی^۲)(۳ لا+۵ی)(۳ لا-۵ی)$

(۴۴) $(۲ا+لا)(۲ا-۱۱لا)$ (۴۵) $(۹ لا+۱)(لا-۱)$

(۴۶) $(۷ا-ب)(ا+۱۵ب)$ (۴۷) $(۵ لا-۲ی)(لا+۱۲ی)$

(۴۸) $(۱۲+۳ب-۴ج)(ب-۲ج)$ (۴۹) $(۲م+۵ن-۲ط)(۲م+ن-۸ط)$

(۵۰) $(۵ لا-۷ی+۱۲ع)(لا-ی+۲ع)$

مسئلہ (۲۵)

(۱) $۸ لا^۲+۱۲ لا^۲+۶ لا+۱$ (۲) $۲۷ لا^۳+۲۷ لا^۲ی+۹ لا ی^۲+ی^۳$

(۳) $۸ لا^۳+۳۶ لا^۲ا+۵۴ لا ا^۲+۲۷ ا^۳$ (۴) $ا^۳+۶ ا^۲ب+۱۲ ا ب^۲+۸ ب^۳$

(۵) $ا^۳ب^۳+۳ ا^۲ب^۲ج+۳ ا ب^۲ج^۲+ب^۳ج^۳$

(۶) $ا^۴+۸ لا^۳+ب^۳+۶ ا^۲ لا+۱۲ لا^۲ا+۳ ا^۲ب+۳ ا ب^۲+۱۲ لا^۲ب+۶ لا ب^۲+۱۲ ا ب لا$

(۷) $۸ م^۳+۲۷ ن^۳+ط^۳+۳۶ م^۲ن+۵۴ م ن^۲+۱۲ م^۲ط+۶ م ط^۲+۲۷ ن^۲ط+۹ ن ط^۲+۳۶ م ن ط$

(۸) $لا^۳ی^۳ ع^۳+۶ لا^۳ ع^۳+۳ لا^۳ی^۳ ع^۲+۳ لا ی^۳ ع^۲+۳ لا^۳ی ع^۲+۳ لا ی ع^۲+۱۲ لا^۲ی^۲ ع+۶ لا^۲ی ع$

(۹) $۱۲۵ م^۳$ (۱۰) $لا^۳+۳ لا^۲ی+۳ لا ی^۲+ی^۳$ (۱۱) $۲۷ ب^۳$

(۱۲) $لا^۳+۳ لا^۲+۳ لا+۱$ (۱۳) $لا^۳+۶ لا^۲+۱۲ لا+۸$ (۱۴) $۸ ا^۳$

(۱۵) ۹۰ (۱۶) ۱۷۵ (۱۸) ۵۲ (۱۹) -۶۴

(۲۰) ۳۷ (۲۱) ۰ (۲۲) ۱۰

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 279 of 308

مسئلہ (۲۶)

(۱) $۱-۶ وَ+۱۲ وَ^۲-۸ وَ^۳$ (۲) $۸-۳۶ لا+۵۴ لا^۲-۲۷ لا^۳$

(۳) $۲۷-۱۰۸ الا+۱۴۴ الا^۲-۶۴ لا^۳$ (۴) $۱۲۵ م^۳-۳۰۰ م^۲ ن+۲۴۰ م ن^۲-۶۴ ن^۳$

(۵) $۸ ط^۳-۶۰ ط^۲ ق+۱۵۰ ط ق^۲-۱۲۵ ق^۳$

(۶) $۸ لا^۳-ی^۳-۶ ع^۳-۱۲ لا^۲ ی+۶ لا ی^۲-۱۲ لا^۲ ع+۶ لا ع^۲-۳ ی^۲ ع-۳ ی ع^۲+۱۲ لا ی ع$

(۷) $۸ م^۳-۲۷ ن^۳-ط^۳-۳۶ م^۲ ن+۵۴ م ن^۲-۱۲ م^۲ ط+۶ م ط^۲-۲۷ ن^۲ ط-۹ ن ط^۲+۳۶ م ن ط$

(۸) $ل^۳-م^۳-ن^۳-۳ ل^۲ م+۳ ل م^۲-۳ ل^۲ ن+۳ ل ن^۲-۳ م^۲ ن-۳ م ن^۲+۶ ل م ن$

(۹) $۶۴ ب^۳$ (۱۰) $لا^۳-۳ لا^۲ ی+۳ لا ی^۲-ی^۳$ (۱۱) $۸ لا^۳$ (۱۲) ۰

(۱۳) ۳۴۳ (۱۴) -۵۰۵ (۱۵) ۲۷ (۱۶) ۳۶ (۱۷) ۱۴۰

مسئلہ (۲۷)

(۱) $و^۳+۱$ (۲) $۸ لا^۳+۱$ (۳) $۱۲۵ م^۳+۱$

(۴) $۶۴ لا^۳+۳۴۳ ی^۳$ (۵) $۲۷ م^۳+۵۱۲ ج^۳$ (۶) $و^۳ ب^۳+۶۴ ج^۳$

(۷) $و^۳ لا^۳+۱۲۵ ب^۳$ (۸) $۱۲۵ و^۳+۲۹۷ ب^۳$ (۹) $(لا+۲)(لا^۲-۲ لا+۴)$

(۱۰) $(۲ و+۱)(۴ و^۲-۲ و+۱)$ (۱۱) $(م+۳)(م^۲-۳ م+۹)$

(۱۲) $(۳ لا+۱)(۹ لا^۲-۳ لا+۱)$ (۱۳) $(ع+۴)(ع^۲-۴ ع+۱۶)$

(۱۴) $(۵ م+۱)(۲۵ م^۲-۵ م+۱)$ (۱۵) $(۲ و+۷ لا)(۴ و^۲-۱۴ و لا+۴۹ لا^۲)$

(۱۶) $(۴ و لا+۳ ی)(۱۶ و^۲ لا^۲-۱۲ و لا ی+۹ ی^۲)$

مسئلہ (۲۸)

(۱) $۱-۲۷ و^۳$ (۲) $۶۴ لا^۳-۱$ (۳) $۱۲۵ م^۳-۲۷ ن^۳$

(۴) $لا^۳-۸ ی^۳ ع^۳$ (۵) $۲۷ و^۳-ب^۳ ج^۳$ (۶) $(۵ و-۱)(۲۵ و^۲+۵ و+۱)$

(۷) $(۷ لا-۲ ی)(۴۹ لا^۲+۱۴ لا ی+۴ ی^۲)$ (۸) $(۶ ک-۵ ل)(۳۶ ک^۲+۳۰ ک ل+۲۵ ل^۲)$

(۹) $(۱-۸ ک)(۱+۸ ک+۶۴ ک^۲)$

(۱۰) $(۹ م-۴ ن)(۸۱ م^۲+۳۶ م ن+۱۶ ن^۲)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 280 of 308

مسئلہ (۲۹)

(۱) $لا^{۲}+۱۰لا+۱۶$ (۲) $لا^{۲}+۸لا+۱۵$ (۳) $لا^{۲}+۱۷لا+۶۶$

(۴) $م^{۲}+۱۶م+۶۳$ (۵) $لا^{۲}-۴لا-۱۲$ (۶) $م^{۲}+۶م-۱۶$

(۷) $و^{۲}-۷و+۱۲$ (۸) $لا^{۲}+۲لا-۱۵$ (۹) $لا^{۲}+۵لا-۳۶$

(۱۰) $لا^{۲}-۱۵لا+۵۰$ (۱۱) $لا^{۲}-۷لا-۶۰$ (۱۲) $ک^{۲}-۱۱ک-۲۶$

(۱۳) $و^{۲}+۱۹و+۷۰$ (۱۴) $م^{۲}-۸م-۸۴$ (۱۵) $لا^{۲}-۱۸لا+۶۵$

(۱۶) $لا^{۲}+۱۹لا+۸۴$ (۱۷) $و^{۲}-۱۴و+۳۳$ (۱۸) $لا^{۲}-۹لا-۵۲$

(۱۹) $م^{۲}-۱۱م-۸۰$ (۲۰) $لا^{۲}-۱۸لا+۸۰$ (۲۱) $و^{۲}-۶و-۷۲$

(۲۲) $م^{۲}+۶م-۹۱$ (۲۳) $لا^{۲}-۲۶لا+۱۶۰$ (۲۴) $لا^{۲}-۱۳لا-۹۰$

(۲۵) $لا^{۲}-۶لا-۱۶۰$

مسئلہ (۳۰)

(۱) $لا^{۲}+۶لا^{۲}+۱۱لا+۶$ (۲) $لا^{۳}+۱۴لا^{۲}+۵۹لا+۷۰$

(۳) $لا^{۳}-لا^{۲}-۲۴لا-۳۶$ (۴) $لا^{۳}-لا^{۲}-۷۰لا-۲۰۰$

(۵) $لا^{۳}-۴لا^{۲}-۲۹لا-۲۴$ (۶) $لا^{۳}+لا^{۲}-۴۶لا+۸۰$

(۷) $لا^{۳}-۷۳لا+۸۴$ (۸) $لا^{۳}-۶لا^{۲}-۷۳لا+۲۱۰$

(۹) $لا^{۳}-۲۳لا^{۲}+۱۶۷لا-۳۸۵$ (۱۰) $لا^{۳}-۱۸لا^{۲}+۹۹لا-۱۶۲$

(۱۱) $لا^{۳}-۱۳لا^{۲}-۸لا+۲۴۰$ (۱۲) $لا^{۳}+۲۵لا^{۲}+۱۹۹لا+۴۹۵$

(۱۳) $لا^{۳}-۵۲لا+۹۶$ (۱۴) $لا^{۳}-۲۳لا^{۲}+۱۵۱لا-۲۷۳$

(۱۵) $لا^{۳}+۱۳لا^{۲}-۴لا-۱۲$ (۱۶) $لا^{۳}-۷لا^{۲}-۱۳۸لا+۱۰۸۰$

(۱۷) $لا^{۳}-۱۳لا^{۲}-۷۳لا+۳۱۵$ (۱۸) $لا^{۳}+۳۵لا^{۲}+۳۹۶لا+۱۴۴۰$

(۱۹) $لا^{۳}-۱۴۸لا-۶۷۲$ (۲۰) $لا^{۳}-۳۱لا^{۲}+۲۹۰لا-۸۰۰$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 281 of 308

امثلہ (۳۱)

(۱) $لا^2+ی^2+ع^2+2لای-2لاع-2ی ع$ (۲) $لا^2+ی^2+ع^2-2لای+2لاع-2ی ع$
(۳) $لا^2+ی^2+ع^2-2لای-2لاع+2ی ع$ (۴) $لا^2+ی^2+ع^2+2لای-2لاع-2ی ع$
(۵) $لا^2+ی^2+ع^2-2لای-2لاع+2ی ع$
(۶) $و^2+لا^2+ی^2+ع^2-2ولا+2وی-2وع-2لای+2لاع-2ی ع$
(۷) $و^2+لا^2+ی^2+ع^2-2ولا-2وی-2وع+2لای+2لاع+2ی ع$
(۸) $م+ن^2+ط^2+ق^2+ر^2+2من+2مط+2مق+2مر+2نط+2نق$
$+2نر+2طق+2طر+2قر$
(۹) $ط^2+ق^2+ر^2+لا^2+ی^2-2طق+2طر-2طلا-2طی-2قر+2قلا$
$+2قی-2رلا-2ری+2لای$
(۱۰) $و^2+ب^2+ج^2+لا^2+ی^2+ع^2-2وب+2وج-2ولا+2وی+2وع-2بج$
$+2بلا-2بی-2بع-2جلا+2جی+2جع-2لای-2لاع+2ی ع$
(۱۱) $و^2+4لا^2+9ی^2+16ع^2-4ولا-6وی-8وع+12لای+16لاع+24ی ع$
(۱۲) $3و^2+بـ^2+4ج^2+د^2-4وب+8وج-4ود-4بج+2بد-4جد$
(۱۳) ۴۹ (۱۴) ۹ (۱۵) ۰ (۱۶) ۱۴۴ (۱۷) ۱۶۳۵
(۱۸) ۱ (۱۹) ۶۳ (۲۰) ۰ (۲۱) ۴۷ (۲۲) ۶۹

امثلہ (۳۲)

(۱) $لا^5+5لا^4+10لا^3+10لا^2+5لا+1$ (۲) $لا^6+6لا^5+15لا^4+20لا^3+15لا^2+6لا+1$
(۳) $و^8+8وب^7+28وب^6+56وب^5+70وب^4+56وب^3+28وب^2+8وب^7$
$+ب^8$
(۴) $و^9+9وب^8+36وب^7+84وب^6+126وب^5+126وب^4+84وب^3$
$+36وب^2+9وب^7+ب^9$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 282 of 308

(٥) لا⁵ − ٥لا⁴ي + ١٠لا³ي² − ١٠لا²ي³ + ٥لاي⁴ − ي⁵

(٦) م⁴ − ٧م³ن + ٢١م²ن² − ٣٥مَن³ + ٣٥م²ن⁴ − ٢١مَن⁵ + ٧م ن⁶ − ن⁷

(٧) لا⁴ + ٨لا³ + ٢٤لا² + ٣٢لا + ١٦ (٨) لا⁹ + ١٠لا⁸ + ٤٠لا⁷ + ٨٠لا⁶ + ٨٠لا⁵ + ٣٢

(٩) لا⁴ + ٨لا³ + ٢٨لا² + ٥٦لا + ٧٠ (١٠) لا⁴ + ١٢لا³ + ٥٤لا² + ٨٠لا + ٨١

(١١) لا⁵ − ٥لا⁴ + ١٠لا³ − ١٠لا² + ٥لا − ١

(١٢) ٦٤ − ١٩٢ع + ٢٤٠ع² − ١٦٠ع³ + ٦٠ع⁴ − ١٢ع⁵ + ع⁶

(١٣) ١٦لا⁴ − ٣٢لا³ + ٢٤لا² − ٨لا + ١

(١٤) لا⁹ − ٩لا⁸ي + ٣٦لا⁷ي² − ٨٤لا⁶ي³ + ١٢٦لا⁵ي⁴ − ١٢٦لا⁴ي⁵ + ٨٤لا³ي⁶ − ٣٦لا²ي⁷ + ٩لايَ⁸ − ي⁹

(١٥) ٢٤٣لا⁵ − ٨١لا⁴ + ٨٠لا³ − ٢٠لا² + ٢٤لا − ٣٢

(١٦) ١ − ٨ز + ٢٨ز² − ٥٦ز³ + ٧٠ز⁴ − ٥٦ز⁵ + ٢٨ز⁶ − ٨ز⁷ + ز⁸

(١٧) ١ − ٧ج + ٢١ج² − ٣٥ج³ + ٣٥ج⁴ − ٢١ج⁵ + ٧ج⁶ − ج⁷

(١٨) ١ − ١٨لا + ١٣٥لا² − ٥٤٠لا³ + ١٢١٥لا⁴ − ١٤٥٨لا⁵ + ٢٩٧لا⁶

(١٩) ١ − ١٤لا + ٨٤لا² − ٢٨٠لا³ + ٥٦٠لا⁴ − ٦٧٢لا⁵ + ٤٤٨لا⁶ − ١٢٨لا⁷

(٢٠) ٢٥٦لا⁸ − ١٠٢٤لا⁷ز + ١٧٩٢لا⁶ز² − ١٧٩٢لا⁵ز³ + ١١٢٠لا⁴ز⁴ − ٤٤٨لا³ز⁵ + ١١٢لا²ز⁶ − ١٦لاز⁷ + ز⁸

(٢١) لا¹⁰ − ١٠لا⁹ز + ٤٥لا⁸ز² − ١٢٠لا⁷ز³ + ٢١٠لا⁶ز⁴ − ٢٥٢لا⁵ز⁵ + ٢١٠لا⁴ز⁶ − ١٢٠لا³ز⁷ + ٤٥لا²ز⁸ − ١٠لاز⁹ + ز¹⁰

(٢٢) ٢٤٣لا⁵ − ٨١لا⁴ز + ٨٠لا³ز² − ٢٠لا²ز³ + ٢٤لا²ز⁴ − ٣٢ز⁵

(٢٣) ١٠لا⁴ + ٢٠لا³ + ٢ (٢٤) ٢لا⁴ + ٣٠لا³ + ٣٠لا² + ٢

(٢٥) ١٢لا⁴ز + ٧٠لا³ز² + ٤٢لا²ز³ + ٢ز⁴

(٢٦) ١٦ (٢٧) ٣٢ (٢٨) ٦٤ (٢٩) ١٢٨ (٣٠) ٢٥٦

(٣١) ٣٠ (٣٢) ٣ (٣٣) ٠ (٣٤) ١٦ (٣٥) ٠

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 283 of 308

امثلہ (۳۳)

(۱) $لا^2 + ی^2 - ع^2 + ۳لای ع$ (۲) $ط^2 - ۸و ق - ر^2 - ۶ط و ر$
(۳) $۸لا^2 - ۲۷ی^2 - ع^2 - ۱۸لای ع$ (۴) $و^2 - ۸ب^2 + ۲۷ + ۱۸ا ب$
(۵) $۲۷و^2 - ۱۲۵ب^2 - ۶۴ - ۱۸۰ا ب$ (۶) $(لا - ی - ۱)(لا^2 + ی^2 + ۱ + لای + لا - ی)$
(۷) $(لا - ی + ۲)(لا^2 + ی^2 + ۴ + لای - ۲لا + ۲ی)$
(۸) $(لا - ۲ی - ۳ع)(لا^2 + ۴ی^2 + ۹ع^2 + ۳لای + ۳لاع - ۶ی ع)$
(۹) ۰ (۱۰) ۰ (۱۱) ۰

امثلہ (۳۴)

(۳) $۸(ج - ب)(ا - ب)(و - ج)$ (۴) $(لا - ع)(ی - ع)(ی - لا)$
(۵) ۰ (۶) ۰

امثلہ ۳۵

(۱۱) $۲۷لا^2 + ۸ی^2 + ع^2 - ۱۸لای ع$ (۱۴) $۳و^2 ب^2 + ۳و^2 ج^2 + ۳ب^2 ج^2 - ا^2 ب^2 - ج^2$
(۱۵) $۴(و^2 ب^2 + و^2 ج^2 + ب^2 ج^2)$ (۱۶) $۲(و^2 + ب^2 + ج^2)$ (۱۹) $۸و ج$ (۲۰) $۸و^2 ب^2$
(۲۳) $(و + ب + د - ج)(ا + د - ب + ج)(ب + ج + ا - د)(ب ج - ا د)$
(۲۴) $لا^2 - ۲لا^2 + ۱$ (۲۵) $ا^2 - ۲و^2 ب^2 + ۴و^2 ب^2 ج^2 + ب^2 ج^2$ (۲۷) $-۲ب^2 ج$
(۲۸) $۲و^2 ج$ (۳۴) $۸لا^2$ (۴۴) ۲۴۷ (۴۵) ۳۶
(۴۶) ۸۴ (۴۷) ۳۴۹

امثلہ ۳۶

(۱) $-۴و^2$ (۲) $-۵و^2$ (۳) $۴لا^2 و^2$ (۴) $۳م^2 ن^2$
(۵) $-۴ط^2 ف$ (۶) $۳و^2 ب^2$ (۷) $۵لا^2 ی^2 ع$ (۸) $-۸و^2 ج^2$
(۹) $-۳م^2 ن^2 ط$ (۱۰) $۳و^2 ج^2$ (۱۱) $-۵لا^2 ی^2$ (۱۲) $۳و^2 لا^2 ی^2 ع^2$
(۱۳) $و^{۲۲}$ (۱۴) $-۷لا^{۴۲}$ (۱۵) $-۷م^{۱۲}$ (۱۶) $-۷و^{۱۲} ب^{۱۲}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 284 of 308

امثلہ (۳۷)

(۱) و-۲ب (۲) -لا^{۲}+۲لاو (۳) لاو-۲لا^{۲} (۴) ۳و^{۲}-۴ب^{۲}
(۵) -۲وب^{۲}+۳وب (۶) لا^{۲}-۲ولا+۳و^{۲} (۷) ولا-۲لا^{۲}+۳و^{۲}
(۸) -۳لا^{۲}+۲و^{۲}-۵ولا (۹) ۲م^{۲}ن^{۲}-۳م^{۲}-۴ن^{۲} (۱۰) -ط^{۲}+$\frac{۵}{۸}$ طو+$\frac{۳}{۸}$و^{۲}
(۱۱) -۲لای+۳لا^{۲}-۴ی^{۲} (۱۲) $\frac{۳}{۴}$لا^{۲}-$\frac{۳}{۲}$و^{۲}-$\frac{۹}{۴}$ولا (۱۳) ۳لاو+$\frac{۱۵}{۴}$و^{۲}-۴لا^{۲}
(۱۴) ۵م^{۲}ن-۷م^{۲}ن^{۲}-۸ط^{۲} (۱۵) ولای-و^{۲}لا+لا^{۲}ی^{۲}-و^{۲}

امثلہ (۳۸)

(۱) لا-۲ (۲) لا-۵ (۳) ۳لا+۴ (۴) ۵لا-۷
(۵) ۲و-۳ب (۶) لا^{۲}-لای+ی^{۲} (۷) ۲لا-۳و (۸) لا^{۲}-ولا+و^{۲}
(۹) و^{۲}+۲وب-ب^{۲} (۱۰) م^{۲}-۳م^{۲}ن+۲ن^{۲} (۱۱) و^{۲}-۳وب+ب^{۲}
(۱۲) ۲لا^{۲}-۳لای-۲ی^{۲} (۱۳) و^{۲}-۴ولا-۲لا^{۲} (۱۴) ۳+۲لا-۲لا^{۲}+لا^{۳}
(۱۵) لا^{۳}-۲لا+۳ (۱۶) ۲و^{۲}+۳وب-۴ب^{۲} (۱۷) و^{۲}-۲ولا+۴لا^{۲}
(۱۸) و^{۲}-۲وب+۲ب^{۲} (۱۹) ۲لا^{۲}-۳لا-۸ (۲۰) لا^{۳}+۳لا^{۲}+۹لا+۲۷
(۲۱) و^{۲}+۲و^{۲}+۴و^{۲}+۸و+۱۶ (۲۲) ۳-لا^{۲}+۲لا^{۳} (۲۳) ۳لا^{۲}-۴لا+۵
(۲۴) ۳۲+۱۶لا+۸لا^{۲}+۴لا^{۳}+۲لا^{۴}+لا^{۵} (۲۵) لا^{۴}+۲لا^{۳}+۳لا^{۲}+۲لا+۱
(۲۶) ۲و^{۲}-۳وب+۴ب^{۲} (۲۷) و^{۲}+۳وب-۵ب^{۲} (۲۸) لا^{۲}+۲لاو+۲لاو^{۲}+و^{۲}
(۲۹) و^{۲}-۳وب-ب^{۳} (۳۰) لا^{۳}+۲ی لا^{۳}+۳ی^{۲}لا^{۲}+۲ی^{۳}لا+ی^{۳}
(۳۱) لا^{۳}+۲ولا^{۳}+۳و^{۲}لا^{۲}+۲و^{۳}لا+و^{۴} (۳۲) لا^{۳}-۲لا^{۲}ی+۳لای^{۲}-۲ای^{۳}+ی^{۴}
(۳۳) لا^{۲}+(و+ب)لا+وب (۳۴) لا-ج (۳۵) و+ب+ج
(۳۶) وب+وج+بج (۳۷) وب+وج-بج (۳۸) لا^{۲}-(و-ب)لا-وب
(۳۹) و^{۲}+ب^{۲}+ج^{۲}-وب-وج-بج (۴۰) لا^{۲}+ی^{۲}+۱-لای+لا+ی

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 285 of 308

(۴۱) $لا^2+4ی^2+9ع^2+2لای+3لاع-6یع$ (۴۲) $لا^2+ی^2+ع^2+لای-لاع+یع$

(۴۳) $2لا-3ی-ع$ (۴۴) $وب-وج-بج$ (۴۵) $لا+ج$

(۴۶) $لا+و$ (۴۷) $و^2+وب-بج$ (۴۸) $وب-وج+بج-ب^2$

(۴۹) $یلا+2یع+یلا^2-2یع^2-لاع-لاع^2$ (۵۰) $لا^2-ولا+و^2$

(۵۱) $ج+و-ب$ (۵۲) $2(و+ب)لا$ (۵۳) $لا+ی+ع+لایع$

(۵۴) $16لا^2-8لا(2ی+و)+(4ی-و)^2$ (۵۵) $وب$ (۵۶) $وب-ج^2$

(۶۱) $-3لا^{\frac{1}{2}}ی^{\frac{2}{3}}ع^{\frac{1}{2}}$ (۶۲) $3لا^{\frac{1}{2}}-4ی^{\frac{1}{2}}$ (۶۳) $و^{\frac{1}{2}}-و^{\frac{1}{2}}ب^{\frac{1}{2}}+ب^{\frac{1}{2}}$

(۶۴) $و^{\frac{3}{2}}-و^{\frac{3}{2}}ب^{\frac{1}{2}}+ب^{\frac{3}{2}}$ (۶۵) $2لا^{\frac{3}{2}}-5لا^{\frac{3}{2}}ی^{\frac{1}{2}}-3ی^{\frac{3}{2}}$ (۶۶) $و^{\frac{3}{2}}+و^{\frac{1}{2}}ب^{\frac{1}{2}}+وب^{\frac{1}{2}}+ب^{\frac{3}{2}}$

(۶۷) $2و^{\frac{5}{2}}+3و^{\frac{3}{2}}ب^{\frac{1}{2}}+5ب^{\frac{3}{2}}$ (۶۸) $3لا^{\frac{5}{2}}-5لا^{\frac{3}{2}}ی^{\frac{1}{2}}+7ی^{\frac{3}{2}}$

(۶۹) $و^{\frac{5}{2}}+و^{\frac{1}{2}}ب^{\frac{1}{2}}+و^{\frac{3}{2}}ب^{\frac{1}{2}}+وب+و^{\frac{1}{2}}ب^{\frac{3}{2}}+ب^{\frac{5}{2}}$ (۷۰) $لا^{\frac{7}{2}}+ی^{\frac{1}{2}}ع^{\frac{3}{2}}-لا^{\frac{3}{2}}ی^{\frac{1}{2}}-ی^{\frac{1}{2}}ع^{\frac{1}{2}}-ع^{\frac{1}{2}}لا^{\frac{1}{2}}$

مسئلہ (۳۹)

(۱۳) $لا^2+لا^3+لا+1$ (۱۴) $لا^3-لا^2ی+لایع-ی^3$ (۱۵) $لا^4+لا^3+لا^2+لا+1$

(۱۶) $لا^4-لا^3ی+لا^2ی^2-لایع+ی^4$ (۱۷) $لا^5+لا^4+لا^3+لا^2+لا+1$

(۱۸) $لا^5-لا^4ی+لا^3ی^2-لا^2ی^3+لایع-ی^5$ (۱۹) $لا^6+لا^5+لا^4+لا^3+لا^2+لا+1$

(۲۰) $لا^6-لا^5ی+لا^4ی^2-لا^3ی^3+لا^2ی^4-لایع^5+ی^6$

مسئلہ (۴۰)

(۱) $و(ب+ج)$ (۲) $وب^2(ب+و)$ (۳) $لا^3ی(ی-2لا)$

(۴) $2لایع(لا+2ی-3ع)$ (۵) $2وب(2و^2-3وب-4ب^2)$

(۶) $ولا^2(ی-5ولایع+3لا)$ (۷) $3لا^2ی^2ع(لاع-4یع^2+7لاع^2)$

(۸) $14و^3ب^3(2و^2-3ب^2)$ (۹) $36لا^2ی(2لا^2+3ی^2)$

(۱۰) $13و^3ب^3ج^3(3باج^2-5ج^2و^2-7و^2ب^2)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 286 of 308

امثلہ (۴۱)

(۱) $(۳ؤ+۴ب)(۳ؤ-۴ب)$ (۲) $ؤ(۲ؤ+۵لا)(۲ؤ-۵لا)$

(۳) $(۶لا^۲+۱)(۶لا^۲-۱)$ (۴) $(۴لا^۲+۱)(۲لا+۱)(۲لا-۱)$

(۵) $لا(۴لا^۲+۳)(۴لا^۲-۳)$ (۶) $لا(۴لا^۲+۹)(۲لا+۳)(۲لا-۳)$

(۷) $(۱+۴ؤ^۲)(۱+۲ؤ)(۱-۲ؤ)$ (۸) $لا^۲(۱+۹لا^۲)(۱+۳لا)(۱-۳لا)$

(۹) $(۶+لا^۲ؤ)(۶-لا^۲ؤ)$ (۱۰) $(۸ؤ^۲+۷لا^۲)(۸لا^۲-۷لا^۲)$

(۱۱) $(۱۱+م^۲)(۱۱-م^۲)$ (۱۲) $(۷لا^۲ؤ^۵+۹)(۷لا^۲ؤ^۵-۹)$

(۱۳) $(ؤب+۵ج د)(ؤب-۵ج د)$ (۱۴) $(۹لا^۲+۸ؤ^۵)(۹لا^۲-۸ؤ^۵)$

(۱۵) $ط^۲(ق+۱۰۰)(ق-۱۰۰)$ (۱۶) $لا^۲(۱۲لا^۲+۵ؤ^۲)(۱۲لا^۲-۵ؤ^۲)$

(۱۷) $۳ؤ^۹(۸ؤ^۲+۹لا^۲)(۸ؤ^۲-۹لا^۲)$ (۱۸) $۲ؤلا(۷ؤلا^۲+۸)(۷ؤلا^۲-۸)$

(۱۹) $۴لا^۵ؤ^۳(۹لا^۵ؤ^۳+۱۱)(۹لا^۵ؤ^۳-۱۱)$ (۲۰) $م^۳ن^۵(۷م^۳ن^۳+۱۱)(۷م^۳ن^۳-۱۱)$

(۲۱) $(ؤ+۳ب+۵ج)(ؤ+۳ب-۵ج)$ (۲۲) $(ؤ+۳ب-۵ج)(ؤ-۳ب+۵ج)$

(۲۳) $۴لای$ (۲۴) $(۵ؤ+۳لا)(ؤ+لا)$

(۲۵) $(۲ؤ-۲ب+۳ج-۳د)(۲ؤ-۲ب-۳ج+۳د)$

(۲۶) $(۷لا+۵ی-۴ع)(۷لا-۵ی+۴ع)$ (۲۷) $۱۲(۵لا-۱)(لا+۲)$

(۲۸) $۴ؤ(ب-ج)$ (۲۹) $(۳ؤ+ب-ج)(ؤ-۷ب+۹ج)$

(۳۰) $(۱۴ؤ+۲۱لا-۲۳ی)(۲ؤ+۷۲لا-۴۱ی)$

(۳۱) $-۹(لا+ؤ)(لا-ؤ)$ (۳۲) $۲۸ؤ(۵ؤ-۳)$

امثلہ (۴۲)

(۱) $(لا^۲+لا+۱)(لا^۲-لا+۱)$ (۲) $(لا^۴+لا+۱)(لا^۴-لا+۱)(لا^۴-لا^۲+۱)$

(۳) $(ؤ^۲+ؤلا+لا^۲)(ؤ^۲-ؤلا+لا^۲)$ (۴) $(ؤ^۴+ؤلا+لا^۲)(ؤ^۴-ؤلا+لا^۲)(ؤ^۴-ؤ^۲لا^۲+لا^۴)$

(۵) $(لا^۲+۴لا+۸)(لا^۲-۴لا+۸)$ (۶) $(۲لا^۲+۶لا+۹)(۲لا^۲-۶لا+۹)$

(۷) $۹(لا^۲+۲لا+۳)(لا^۲-۲لا+۳)$ (۸) $(ؤ^۲+۲ؤ+۳)(ؤ^۲-۲ؤ+۳)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 287 of 308

(۹) $(لا^2+لا-3)(لا^2-لا-3)$ (۱۰) $(2لا^2+2لا+3)(2لا^2-2لا+3)$

(۱۱) $(2لا^2+2لا-3)(2لا^2-2لا-3)$ (۱۲) $(2لا^2+3لا+3)(2لا^2-3لا+3)$

(۱۳) $(2و^2+5و-3)(2و^2-5و-3)$ (۱۴) $(2و^2+10و+25)(2و^2-10و+25)$

(۱۵) $(3لا^2+لا+4)(3لا^2-لا+4)$ (۱۶) $(3و^2+و-4)(3و^2-و-4)$

(۱۷) $(3لا^2+3لا-4)(3لا^2-3لا-4)$ (۱۸) $(3و^2+5و+4)(3و^2-5و+4)$

(۱۹) $(4لا^2-6لاو+5و^2)(4لا^2+6لاو+5و^2)$

(۲۰) $(3و^2+7ولا+5لا^2)(3و^2-7ولا+5لا^2)$

(۲۱) $(لا^2+4لا+12)(لا^2-4لا+12)$ (۲۲) $(و^2+5وب-5ب^2)(و^2-5وب-5ب^2)$

(۲۳) $(6و^2+2وب-ب^2)(6و^2-2وب-ب^2)$

(۲۴) $(7م^2+2مں-4ں^2)(7م^2-2مں-4ں^2)$

(۲۵) $(8و^2+12ولا+9لا^2)(8و^2-12ولا+9لا^2)$

(۲۶) $(2لا^2+14لاو+49و^2)(2لا^2-14لاو+49و^2)$

(۲۷) $(لا+ی-ع)(لا-ی+ع)$ (۲۸) $(2و+ب-3ج)(2و-ب+3ج)$

(۲۹) $(3لا+2ی-3ع)(3لا-2ی+3ع)$ (۳۰) $(و+2ب-5ج)(و-2ب+5ج)$

(۳۱) $(4ی+3لا-5ع)(4ی-3لا+5ع)$

(۳۲) $(و-2ب+3ج-2د)(و-2ب-3ج+2د)$

(۳۳) $(لا-2ی+ع)(لا-ع)$ (۳۴) $(2لا+3و+5ب+1)(2لا+3و-5ب-1)$

(۳۵) $(3لا+2ی-7ع-5)(3لا-2ی+7ع-5)$

(۳۶) $(4و+3ب-4ج-3)(4و-3ب+4ج-3)$

(۳۷) $(لا-7ی+5ع-2)(لا-7ی-5ع+2)$

(۳۸) $(4لا+5و+3ی-7ب)(4لا+5و-3ی+7ب)$

(۳۹) $(7لا-4ی+8ع-1)(7لا-4ی-8ع+1)$

(۴۰) $(و+ب-ج-د)(و-ب+ج-د)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 288 of 308

مسئلہ (۴۳)

(۱) $(و-۲ب)(و^{۲}+۲وب+۴ب^{۲})$ (۲) $و(و-۳لا)(و^{۲}+۳ولا+۹لا^{۲})$

(۳) $(۳لا+۱)(۴لا^{۲}-۲لا+۱)(۶۴لا^{۶}-۸لا^{۳}+۱)$

(۴) $(و-۲ب)(و^{۲}+۲وب+۴ب^{۲})(و^{۶}+۸و^{۳}ب^{۳}+۶۴ب^{۶})$

(۵) $(۳و^{۲}+۵لا^{۲})(۹و^{۴}-۱۵و^{۲}لا^{۲}+۲۵لا^{۴})$

(۶) $(م+ن)(م-ن)(م^{۲}-من+ن^{۲})(م^{۲}+من+ن^{۲})$

(۷) $(۷لا+۸ی)(۴۹لا^{۲}-۵۶لاى+۶۴ی^{۲})$

(۸) $(۲لا^{۲}-۱)(۲لا^{۲}+۱)(۴لا^{۴}+۲لا^{۲}+۱)(۴لا^{۴}-۲لا^{۲}+۱)$

(۹) $(و-۲لا)(و+۲لا)(و^{۲}+۲ولا+۴لا^{۲})(و^{۲}-۲ولا+۴لا^{۲})$

(۱۰) $(۵لا^{۲}-۶و^{۲})(۲۵لا^{۴}+۶۰لا^{۲}و^{۲}+۳۶و^{۴})$

(۱۱) $و ب(۴و^{۲}+۷ب^{۲})(۱۶و^{۴}-۴۸و^{۲}ب^{۲}+۴۹ب^{۴})$

(۱۲) $لاى(۳لا^{۲}+۲ی^{۲})(۳لا^{۲}-۲ی^{۲})(۹لا^{۴}-۶لا^{۲}ی^{۲}+۴ی^{۴})(۹لا^{۴}+۶لا^{۲}ی^{۲}+۴ی^{۴})$

(۱۳) $(و+ب)^{۲}(و^{۲}-۲وب+۶وب-۲وب+ب^{۲})$

(۱۴) $۲(لا+ی)(لا-ی)(۴لا^{۲}-۱۴لا^{۲}ی^{۲}+۱۳ی^{۴})$

(۱۵) $۲(و-ب)(و^{۲}+وب+ب^{۲})(۴و^{۲}-۲وب+ب^{۲})$

مسئلہ (۴۴)

(۱) $(لا+۳)(لا+۱)$ (۲) $(لا+۲)(لا+۳)$ (۳) $(لا+۳)(لا+۴)$

(۴) $(لا+۴)(لا+۵)$ (۵) $(لا+۳)(لا+۶)$ (۶) $(لا+۴)(لا+۷)$

(۷) $(لا-۴)(لا-۶)$ (۸) $(لا-۳)(لا-۵)$ (۹) $(لا-۵)(لا-۶)$

(۱۰) $(لا-۴)(لا-۸)$ (۱۱) $(لا-۱۲)(لا-۲)$ (۱۲) $(لا-۲)(لا-۳۰)$

(۱۳) $(لا+۱۰)(لا-۲)$ (۱۴) $(لا+۸)(لا-۶)$ (۱۵) $(لا+۱۸)(لا-۲)$

(۱۶) $(لا+۱۲)(لا-۳)$ (۱۷) $(لا+۱۴)(لا-۳)$ (۱۸) $(لا+۱۸)(لا-۴)$

(۱۹) $(لا+۵)$ لا (۲۰) $(لا-۱۶)(لا+۵)$ (۲۱) $(لا-۳۲)(لا+۳)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 289 of 308

(٢٢) (لا-١٤)(لا+٤) (٢٣) (لا-٧)(لا+٦) (٢٤) (لا-٩)(لا+٨)
(٢٥) (لا+١٠)(لا+١٢) (٢٦) (لا+٣٠)(لا-٣) (٢٧) (لا-٢٤)(لا+٣)
(٢٨) (لا+١٣)(لا-٧) (٢٩) (لا-١٢)(لا-٨) (٣٠) (لا+٢٦)(لا-٣)
(٣١) (لا-١٢)(لا+٦) (٣٢) (لا-٢١)(لا-٤) (٣٣) (لا-٢٢)(لا-٤)
(٣٤) (لا+١٥)(لا-٨) (٣٥) (لا-١٠)(لا+٨) (٣٦) (لا+١٤)(لا-٦)
(٣٧) (و-٨)(و+٧) (٣٨) (م-١٥)(م+٦) (٣٩) (و+٣٠)(و-٣)
(٤٠) (و-٩)(و-٦) (٤١) (ط-٢٣)(ط+٣) (٤٢) (م+٩)(م-٨)
(٤٣) (م+٣٠)(م-٣) (٤٤) (و-٢٣)(و-٥) (٤٥) (لا+١٣)(لا-٦)
(٤٦) (و-٥١)(و+٣) (٤٧) (و-١٥)(و-٤) (٤٨) (لا+١٦)(لا-٤)
(٤٩) (و-٣٠)(و+٣) (٥٠) (لا+١٥)(لا-٧) (٥١) (لا-٧ى)(لا+٦ى)
(٥٢) (و-٨ب)(و-٤ب) (٥٣) (م+٦ن)(م-٥ن)
(٥٤) (و+٣ب)(و-٣ب) (٥٥) (و-٥ب)(و+٣ب)
(٥٦) (لا-٨ى)(لا+ى) (٥٧) (لا+٨ى)(لا-٥ى)
(٥٨) (ط-٦ق)(ط-٨ق) (٥٩) (ط+١٠ق)(ط-٨ق)
(٦٠) (لا+٢٣ى)(لا-٣ى) (٦١) (و+١)(و-١)(و٢+٥)
(٦٢) (لا٢+٥)(لا٢-٣) (٦٣) (لا+٢)(لا-٢)(لا٢+٧)
(٦٤) (لا-١)(لا٢+لا+١)(لا٢+٣) (٦٥) (و-٢)(و٢+٢و+٤)(و٢-٢)
(٦٦) (لا-١)(لا٢+لا+١)(لا+٣)(لا٢-٣لا+٩)
(٦٧) (و-١)(و+٣)(و٢+و+١)(و٢-٢و+٤)
(٦٨) (لا٢+٢)(لا٢-٣)(لا+٢)(لا-٢)(لا٢+٤)
(٦٩) (و+٣)(و-٢)(و٢+٤)(و٢+٥)
(٧٠) (لا٢+١)(لا٢-٢)(لا٢-لا+١)(لا٢+٢لا+٤)
(٧١) (و+١)٢(و٢+٢و-٣) (٧٢) (لا+١)(لا+٢)(لا٢+٣لا+١)
(٧٣) (لا-١)٢(لا+١)(لا-٣) (٧٤) (و+١)(و-٤)(و٢-٣و+١)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 290 of 308

(۷۵)(لا+۱)(لا−۵)(لا²−۴لا+۱) (۷۶)(لا+۱)(لا−۲)(لا+۲)(لا−۳)
(۷۷)(لا−۲)(لا−۳)(لا−۱)(لا−۴) (۷۸)(و−۲)(و+۹)(و+۲)(و+۵)
(۷۹)(و−۳)(و+۱۰)(و+۲)(و+۴) (۸۰)(لا+۱)(لا ۹)(لا+۲)(لا−۱۰)
(۸۱)۲(لا+ی)(۵لا+۸ی) (۸۲)(۵و+ب)(و−۷ب)
(۸۳)(۹م+۷ان)(۳م−۸ن) (۸۴)۴(۱۵و+۴ب)(۲و+ب)
(۸۵)(لا+۱۱ی)(۷لا+۵ی) (۸۶)(۲و+۲۳ب)(۹و−۵ب)
(۸۷)(۳و+۱۴ب)(۱۰و−۷ب) (۸۸)۷ن²(۹م²−۱۱ن²)
(۸۹)(لا+۲ی)(لا+۳ی)(لا²+۴لاای+۱۲ی²)
(۹۰)(و−۲ب)(و−۶ب)(و−۳ب)(و−۸ب)
(۹۱)(۲لا−۵)(لا+۳) (۹۲)(۳و−۵)(۲و+۳)
(۹۳)(۴م+۳)(۲م−۳) (۹۴)(۲لا−۳ی)(۳لا+۸ی)
(۹۵)(۱۵و−۳ب)(۲و−۷ب) (۹۶)(۳م−۴ن)(۴م+۵ن)
(۹۷)(۲لا+۵ی)(۶لا−ی) (۹۸)(۴و+۵ب)(۱۵و−۶ب)
(۹۹)(۳لا−۵ی)(۶لا−۷ی) (۱۰۰)(۴لا−۳ی)(۳لا+۸ی)

امثلہ (۴۵)

(۱)(لا+۳)(لا+۱) (۲)(لا+۵)(لا+۱) (۳)(لا+۵)(لا+۳)
(۴)(لا−۷)(لا−۳) (۵)(لا−۸)(لا+۶) (۶)(لا−۹)(لا+۵)
(۷)(لا−۸)(لا−۴) (۸)(لا−۱۱)(لا+۵) (۹)و+۲ب−ج)(و+ج)
(۱۰)(لا+ی)(لا−ی+۲) (۱۱)(لا+ی+۱)(لا−ی+۵)
(۱۲)(و+۵ب−ج)(و−ب+ج) (۱۳)(لا−ی−۶)(لا−۵ی+۶)
(۱۴)(لا−۲ی−۶۲)(لا−۸ی+۶۲) (۱۵)(و+ب−۳ج)(و−۱۳ب+۳ج)
(۱۶)(لا+۱۲ای−۶۳)(لا+۶۳) (۱۷)(لا+ی−۶۵)(لا−۱۵ای+۶۵)

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 291 of 308

(١٨) $(٢لا+١)(لا-٣)$ (١٩) $(٣لا+١)(لا-٢)$ (٢٠) $(٣لا+٢)(لا+٢)$
(٢١) $(٣لا-١)(لا+٢)$ (٢٢) $(٢لا-١)(٣لا+٢)$ (٢٣) $(٢لا+١)(٣لا-٢)$
(٢٤) $(٣لا-١)(٢لا+٣)$ (٢٥) $(٢لا+٣)(٣لا-٥)$ (٢٦) $(٢لا-٥)(٣لا+٧)$
(٢٧) $(٢لا-٣)(٣لا+٤)$ (٢٨) $(٣لا+٢)(لا-٦)$ (٢٩) $(٢لا+٥)(لا-٧)$
(٣٠) $(٢لا-٧)(لا+٦)$ (٣١) $(٣لا-٥)(لا+٦)$ (٣٢) $(٣لا-٢)(٣لا+٣)$
(٣٣) $(و+٥ب)(٢و-٣ب)$ (٣٤) $(٢لا-٣ى)(٣لا-٢ى)$
(٣٥) $(٣م+٢ن)(٢م-٥ن)$ (٣٦) $(٣ط-٤ق)(ط+٣ق)$
(٣٧) $(٢و-٥ب)(٣و+٣ب)$ (٣٨) $(٥م-٢ن)(٢م+٣ن)$
(٣٩) $(٣لا-ى)(٣لا+٤ى)$ (٤٠) $(٣و-٤ب)(٥و+٣ب)$
(٤١) $(٢و-ب)(و-٢ب)$ (٤٢) $(و-٣ب)(٣و+ب)$
(٤٣) $(لا+٣ى)(٣لا-ى)$ (٤٤) $(و+٤)(٤و-١)$
(٤٥) $(و-٤ب)(٤و-ب)$ (٤٦) $(٤لا-٥)(٥لا+١)$
(٤٧) $(لا-٥ى)(٥لا-ى)$ (٤٨) $(لا+٦)(٦لا+١)$
(٤٩) $(و+٦ب)(٦و-ب)$ (٥٠) $(و-٦ب)(٦و+ب)$
(٥١) $(و-٧ب)(٧و-ب)$ (٥٢) $(و+٧ب)(٧و-ب)$
(٥٣) $(و-٧ب)(٧و+ب)$ (٥٤) $(٨لا-ى)(لا+٨ى)$
(٥٥) $(٩لا-ى)(لا-٩ى)$ (٥٦) $(١٠لا-ى)(لا+١٠ى)$
(٥٧) $(٢و+٣ب-١)(و+ب+٣)$ (٥٨) $(لا-ى)^{٢}(٢لا^{٢}+٢ى^{٢}+لاى)$
(٥٩) $(و+ب)^{٤}(٢و^{٢}+٣ب^{٢}+وب)$ (٦٠) $(لا-٤ى)(٤لا-ى)(لا^{٢}+ى^{٢})$
(٦١) $(لا+٣)(لا-٣)(٢لا^{٢}+٣)$ (٦٢) $(٢و+٣ب)(٢و-٣ب)(٢و^{٢}+ب^{٢})$
(٦٣) $(٣و+٤ب)(٣و-٤ب)(و^{٢}+٢ب^{٢})$
(٦٤) $(لا-٢)(٢لا-١)(لا^{٢}+٢لا+٤)(٤لا^{٢}+٢لا+١)$
(٦٥) $(٢و^{٢}+ب^{٢})(٢و^{٢}-ب^{٢})(و^{٢}+٢ب^{٢})(و^{٢}-٢ب^{٢})$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 292 of 308

مسئلہ (۴۶)

(۱) $(لا+۱)(لا^{۲}+۱)$ (۲) $(لا+۱)^{۲}(لا-۱)$ (۳) $(لا+۱)(لا-۱)^{۲}$

(۴) $(و ب+ج)(و ج+ب)$ (۵) $(لا-و)(لا+ب)(لا^{۲}-ب لا+ب^{۲})$

(۶) $(و لا+ب ی)(ب لا+و ی)$ (۷) $(لا-ع)(لا+ی+ع)$

(۸) $(لا+و)(ب ج)$ (۹) $(لا^{۲}-و ب)(۲و-۳ب)$

(۱۰) $(و-ب)(و+ب+ج)$ (۱۱) $(۲و-۳ب)(۲و+۳ب+۲ج)$

(۱۲) $(و لا-ب ی)(و لا+ب ی+ج ع)$ (۱۳) $(لا^{۲}-ی ع)(لا^{۲}+ی ع+ی^{۲})$

(۱۴) $(۴لا-۵و)(۴لا+۵و+۳ب)$ (۱۵) $(و+ب)(و^{۲}+و ب+ب^{۲})$

(۱۶) $(م-ن)(م^{۲}-م ن+ن^{۲})$ (۱۷) $(و-ب)(و+ب)^{۳}$

(۱۸) $(لا+ی)(لا-ی)^{۳}$ (۱۹) $(و+۲)(و^{۲}+۳و+۴)$

(۲۰) $(لا-۵)(لا^{۲}-۱۲لا+۲۵)$ (۲۱) $(۲و-۳ب)(۴و+۳ب)(و+۳ب)$

(۲۲) $(لا-ی)(لا-ی-۱)$ (۲۳) $(۲و-ب)(۲و-ب-۳)$

(۲۴) $(لا^{۲}+و^{۲})(لا-و)^{۲}$ (۲۵) $(و^{۲}+۲ب^{۲})(و-ب)(و-۲ب)$

(۲۶) $(و+۲ب)(و+ب+ج)$ (۲۷) $(لا-۳ی)(لا-ی+ع)$

(۲۸) $(م-۲ن)(م-۳ن+۲ط)$ (۲۹) $(و-۳ب)(و-۷ب+۵ج)$

(۳۰) $(لا+۴و)(۲لا-۳و+۴ب)$ (۳۱) $(و-۴ب)(و-۲ب+۳)$

(۳۲) $(۳لا+ی)(لا-۳ی+۲)$ (۳۳) $(و-ب ج)(و+ب+ج+۱)$

(۳۴) $(لا-۳ی+۶۳)(لا+۲ی-۶۳+۴)$ (۳۵) $(۳لا-۴ی-۶۲)(۳لا-۴ی+۶۲-۵)$

(۳۶) $(و+ب)(و-ب)(لا+و)(لا-و)(۲لا^{۲}-۳و^{۲})$

(۳۷) $(۲لا-۳ب)(لا^{۲}+و لا-ب)$ (۳۸) $(لا+و)(لا-و)(و+ب)^{۲}$

(۳۹) $(ب ج)(و ج)(و-ب)$ (۴۰) $(ب+ج)(و+ج)(و+ب)$

(۴۱) $(ب ج)(و-ج)(و-ب)(و ب+ب ج+ج و)$

(۴۲) $(ب ج)(و ج)(و-ب)(و^{۲}+ب^{۲}+ج^{۲}+و ب+ب ج+ج و)$

(۴۳) $(ب+ج)(و+ج)(و+ب)(ب ج)(و ج)(و-ب)$

(۴۴) $(ب ج)(و ج)(و-ب)(و^{۲}ب^{۲}ج^{۲}+و ب^{۳}+و ب^{۲}ج+و ب ج^{۲}+ب ج^{۲}+و ب ج)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 293 of 308

مسئلہ (۴۷)

(۱) $و^2+ب^2+ج^2-وب+وج+بج$ (۲) $لا^2+ی^2+۱+لای+لا+ی$

(۳) $لا^2+۴ی^2+۹ع^2+۴لای-۶لاع+۶ی ع$ (۴) $۲و-۳ب+۳ج$

(۵) $لا^2-۲لا-۳$ (۶) $و^2+۲ب ج$ (۷) $۵-۲و+ب$

(۸) $۲لا^2-۳لا+۴$ (۹) $لا^3-۲لا^2+۳لا-۵$ (۱۰) $لا^3-۶لا^2+۵لا-۲$

(۱۱) $لا^2+۳لا+۱۳$ (۱۲) $و^2-۶وب+۱۲ب^2$ (۱۳) $و^2-۲وب+۲و ب^2-ب^3$

(۱۴) $لا^3-۳لا^2+۲لا-۱$ (۱۵) $لا^2+۴لای+۱۹ی^2$ (۱۶) $(لا+۱)(لا+۳)(لا+۴)$

(۱۷) $(لا+۲)(لا+۳)(لا+۴)$ (۱۸) $(لا-۱)(لا-۲)(لا-۳)$

(۱۹) $(لا-۲)(لا+۳)(لا+۴)$ (۲۰) $(لا-۱)(لا^2-۳لا-۲)$

(۲۱) $(لا+۱)(لا^2+۴لا-۶)$ (۲۲) $(لا-۲)(لا^2-۴لا+۵)$

(۲۳) $(لا-۲)(لا+۲)(لا^2-۳لا-۵)$ (۲۴) $(لا-۱)(لا+۲)(لا^2-۴لا+۵)$

(۲۵) $(لا+۱)(لا-۳)(لا^2-۳لا-۲)$ (۲۶) $(لا-۲)(لا+۳)(لا^2+۴لا-۶)$

(۲۷) $(لا+۲)(لا-۴)(لا^2-۵لا+۷)$ (۲۸) $(لا-۵)(لا^2-۲لا+۳)$

(۲۹) $(لا+۳)(لا^2-۳لا+۴)$ (۳۰) $(لا+۲)(لا-۴)^2$

(۳۱) $(لا-۴)(۴لا^2+لا+۳)$ (۳۲) $(لا+۲ی)(لا^2-۲لای-۵ی^2)$

(۳۳) $(و+۳ب)(و^2+وب-۲ب^2)$ (۳۴) $(و-۲ب)(۵و^2+۷وب+۴ب^2)$

(۳۵) $(۲لا-۱)(۴لا^2+۲لا+۳)$ (۳۶) $(لا-۱)(لا+۳)(۲لا+۱)$

(۳۷) $(لا+۱)^2(لا-۲)$ (۳۸) $(و-ب)(۲و^2+وب+ب^2)$

(۳۹) $(لا-۱)(۳لا^2+۱۱لا+۳)$ (۴۰) $(لا+۳ی)(لا^2-۳لای+۳ی^2)$

(۴۱) $(لا+ب-ب)(لا-و+۲ب)$

(۴۲) $\{لا^2+(و+ب)^2ی\}\{لا+(و-ب)ی\}\{لا-(و-ب)ی\}$

(۴۳) $\{و^2+(لا+ی)^2ب^2\}\{و^2+(لا-ی)^2ب^2\}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 294 of 308

(۴۴) $(و+۲لا-ی)(و-لا+۲ی)$ (۴۵) $(لا+۲و+ب)(لا-و+۲ب)$

(۴۶) $(ل+۳ی-ع)(لا+ی+ع)$ (۴۷) $(۲و+ب-ج)(۳و-۳ب+ج)$

(۴۸) $(لا^۲+۲لا-۳)(لا^۲+۲لا+۳)$ (۴۹) $(و^۲+واب-ب^۲)(و^۲-۵واب+ب^۲)$

(۵۰) $(۲لا^۲-۴لا-۳)(۳لا^۲-۶لا+۳)$ (۵۱) $(لا-۱)^۲(لا^۲+۱)$

(۵۲) $(و^۲+۳و-۵)(و^۲-۳و+۵)$ (۵۳) $(و-ب لا)(و-ب لا-ج لا^۲)$

(۵۴) $(لا^۲ی^۲+لا ی-ع+۱)(لا^۲ی^۲-لا ی+ع+۱)$

(۵۵) $\{(ی+ع)لا-ی+ع\}\{(ی-ع)لا+ی+ع\}$

(۵۶) $\{(و+ب)لا+(و-ب)ی\}\{(و-ب)لا+(و+ب)ی\}$

۵۷ $(لا^۲-۲لا-۱)(لا^۲-۲لا-۴)$ (۵۸) $(و^۲-۳و+۵)(و^۲-۳و+۱)$

(۵۹) $(۲لا^۲+۳لا-۳)(۲لا^۲+۳لا-۴)$ (۶۰) $(لا^۲-لا ی+ی^۲)(لا^۲+لا ی+ی^۲)$

(۶۱) $(لا^۲+۳لا+۴)(لا^۲-۳لا+۴)$ (۶۲) $(و^۲-۳واب+۲ب^۲)(و^۲-۱۵واب+۲۰ب^۲)$

(۶۳) $(لا^۲-۳لا+۵)(لا^۲-۷لا+۵)$ (۶۴) $(و-ب)^۲(و^۲+۶واب+ب^۲)$

(۶۵) $(لا^۲+۲لا+۱۰)(لا^۲+۴لا-۳)$ (۶۶) $(لا^۲-۳لا-۵)(لا^۲-۳لا-۱۷)$

(۶۷) $(لا^۲+۷لا+۸)(لا^۲+۷لا+۳۰)$ (۶۸) $(لا-۳)(۲لا+۳)(۲لا^۲-۳لا+۷)$

(۶۹) ۰ (۷۰) ۰ (۷۱) ۰ (۷۲) ۳۰۰ (۷۳) ۰

(۷۴) ۵ (۷۵) $و(و^۲-۵واب^۲+۵ب^۴)$ (۷۶) ۳۹۲۰۰۰ ۰

مسئلہ (۴۸)

(۱) $(و^۲ے^۲)$ (۲) $۴و^۲$ (۳) $۳لا ی^۲$ (۴) $۵و^۲ی^۳$

(۵) $۹ل^۲ن^۲$ (۶) $۴و^۲لا$ (۷) $۱۲ل^۲ط$ (۸) $۱۵لا^۲ی^۲ع^۲$

(۹) $۱۰۸و^۲ج^۲$ (۱۰) $۳۴ج^۲$ (۱۱) $۱۲ع^۲$ (۱۲) $۵ل^۲ن^۲ط^۲و^۲$

(۱۳) $۱۰۸ب^۲ن^۲$ (۱۴) $۳ل^۲$ (۱۵) $۸لا^۲ی^۲$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 295 of 308

مسئلہ (۴۹)

(۱) و (و + ب) (۲) لا ی² (لا + ی) (۳) ۳ (لا + ۳)

(۴) ۴ و² (و² + ب ج) (۵) م ن² (م - ن)² (۶) و لا (۲ و + ۳ لا)

(۷) ۲ و ب² (۳ و + ۴ ب) (۸) ۳ لا ی² (لا - ۲ ی) (۹) ۲ و ب (و + ۲ ب)

(۱۰) ۱۶ لا² و² (لا² - و²) (۱۱) ۸ (لا² + و لا + و²) (۱۲) ۸ لا و² (لا² + و²)

(۱۳) ۶ (و + ۳ ب) (۱۴) ۴ لا (لا - ۵) (۱۵) لا ی (لا + ۶ ی)

(۱۶) و² لا² (و + ۲ لا) (۱۷) ۳ لا + ۳ (۱۸) و - ۲ ب

(۱۹) لا - ۳ (۲۰) ۱۸ (لا + ۲ و) (۲۱) و - ب

(۲۲) لا + ۳ (۲۳) ۴ و ب (۳ و - ب) (۲۴) لا² + ۵ لا + ۶

مسئلہ (۵۰)

(۱) (۲ لا - ۱) (۲) ۳ لا - ۲ (۳) ۲ لا - ۵ و

(۴) لا (۳ لا + ۴) (۵) ۳ و - ۱ (۶) ۲ و - ۳ ب

(۷) لا² + لا + ۱ (۸) لا - لا ی + ی² (۹) لا (۲ لا² + لا + ۱)

(۱۰) لا² + ۳ لا + ۱ (۱۱) لا² + ۴ لا + ۱ (۱۲) لا² + ۲ و لا + ۳ و²

(۱۳) لا² + ۳ و لا + ۵ و² (۱۴) ۲ و² - ۳ و لا + ۷ لا² (۱۵) ۲ - ۳ لا + ۵ لا²

(۱۶) ۱ + ۴ لا - ۷ لا² (۱۷) لا (۲ لا² + ۳ و لا + ۴ و²) (۱۸) ۲ (و² + ۵ و + ۲)

(۱۹) لا² + ۳ لا - ۲ (۲۰) لا² - ۳ لا + ۵ (۲۱) (لا² + ۵ لا + ۱)

(۲۲) لا² + ۲ لا + ۴ (۲۳) لا² + ۳ لا + ۵ (۲۴) ۲ (لا² - ۲ و لا + ۳ و²)

(۲۵) ۳ لا² + ۲ لا ی + ۴ ی² (۲۶) لا² + ۲ لا + ۳ (۲۷) ۴ و² - ۱۲ و - ۵

(۲۸) لا² + ۲ لا + ۳

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 296 of 308

مسئلہ (۵۱)

(۱) $لا^2 - ۵لا + ۶$ (۲) $۲لا^2 - ۷لا + ۱۲$ (۳) $لا^2 + ۳لا + ۴$

(۴) $۳لا^2 - ۵لا + ۷$ (۵) $۶لا^2 - ۱۱لا + ۳$ (۶) $۲لا^2 + ۱۵لا - ۸$

(۷) $۳لا^2 + ۵لا - ۱$ (۸) $۵لا^2 - ۳لا - ۱$ (۹) $۲لا^2 + ۳لا - ۱$

(۱۰) $۳لا^2 - ۲لا + ۱$ (۱۱) $لا^2 + لا - ۲$ (۱۲) $لا^2 + ۳لا - ۲$

مسئلہ (۵۲)

(۱) $لا + ۴$ (۲) $۲لا - ۱$ (۳) $۲لا - ۳$

(۴) $۲لا^2 + ۱$ (۵) $۳و - ۲ب$ (۶) $(۳و - ۵ب)(۲و - ۵ب)$

(۷) $۳لا - ۴$ (۸) $۲لا^2 - ۳$

مسئلہ (۵۳)

(۱) $و^2 ب^2$ (۲) $و^2 ب^2 ج$ (۳) $۳۰ لا^2 ی^2$

(۴) $۲۸ م^2 ن^2 ط$ (۵) $۲۴ لا^2 ی^2 ع^2$ (۶) $۱۴۰ و^2 ب^2 ج^2$

(۷) $۱۲۰ و^2 ب^2 ج^2$ (۸) $۱۸۰ لا^2 ی^2 ع^2 و^2$ (۹) $و^2 ب^2 (و^2 - ب^2)$

(۱۰) $۲۴ (لا^2 - ی^2)^2$ (۱۱) $(لا - ۱)(لا - ۳)(لا - ۲)$

(۱۲) $و^2 (و - لا)(و + ۳لا)$ (۱۳) $و^2 (و - ۲)(و + ۲)(و + ۴)$

(۱۴) $۱۲ و^2 لا^2 (لا^2 - و^2)(لا^2 - ۷لا + و^2)$ (۱۵) $۴۸ (لا - ۲)(لا + ۵)(لا + ۶)$

(۱۶) $(لا - ۳)(لا + ۵)(لا + ۴)(لا + ۷)$ (۱۷) $۳ و^2 (۴ و^2 - ۹ ب^2)(و^2 - ب^2)$

(۱۸) $(۸ و^2 + ۲۷ ب^2)(۲ و^2 - ۷ ب^2)$ (۱۹) $۱۲ لا^2 (۴ لا^2 - ۲۵ ی^2)(۲ لا - ی)$

(۲۰) $(۲لا - ۳و)^2 (۹لا^2 - و^2)$ (۲۱) $۲لا (۴لا^2 + ۸۱)$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 297 of 308

(۲۲) $٦(٣+لا)^{٢}(لا^{٢}-٤)$ (۲۳) $(٢لا-١)(٤لا^{٢}-١)(لا+٣)$

(۲۴) $(لا-٢ى)(لا-٤ى)(لا-٣ى)(لا+٥ى)$

(۲۵) $(لا+٢)(٢لا-١)(٣لا+١)$

(۲۶) $(١-٤لا^{٢})(١+٢لا+٤لا^{٢})(١+٢لا-٤لا^{٢})$

(۲۷) $(لا^{٣}-٣)^{٢}(٩لا^{٣}-١)(٩لا^{٣}-١)$

مسئلہ (۵۴)

(۱) $٩لا^{٥}+٣٠لا^{٣}-١٧٤لا^{٢}-٧٦لا+٣٢$

(۲) $١٨لا^{٥}+٣لا^{٣}-١٠٩لا^{٢}-٨٤لا+٣١٥$

(۳) $٨٤لا^{٥}-٦٥لا^{٣}-١٢٠لا^{٢}+١٦٠لا+٢٤٧-٣٦$

(۴) $٢٥لا^{٥}-٢٤لا^{٣}-٢٣لا^{٢}+٤٠لا+٨٠$

(۵) $١٢لا^{٥}-١٢لا^{٣}-٩٤لا^{٢}+٦٢لا+١٨٠$

(۶) $١٢لا^{٥}+٨لا^{٣}+٢٥لا^{٢}+٣٤لا+١٥+١٨لا+٨$

(۷) $٣٢لا^{٥}-٢٤لا^{٣}-٨لا^{٢}+١٨لا-٤٨لا^{٢}+٢٧لا-١٨$

(۸) $١٢لا^{٥}+٢٤لا^{٣}+٩٥لا^{٢}+١١٨لا^{٢}+٢٤٩لا+١٢٤لا^{٢}+٢١٦$

مسئلہ (۵۵)

(۱) $١٢لا^{٥}-١٠٠لا^{٣}+١٩٥لا^{٢}+٧٠لا-٤٢$

(۲) $٦لا^{٥}-٩٧لا^{٣}+٣٤٢لا^{٢}-١٨٨لا-٩٦$

(۳) $٤٨لا^{٥}-٩٢لا^{٣}-١٢٨لا^{٢}+٧٥لا-٣٠$

(۴) $١٦لا^{٥}+٤٠لا^{٣}+٢٠لا^{٢}+٣٨لا-٢٠-٣٩لا^{٢}-١٥لا^{٣}-٩لا+٩$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 298 of 308

مسئلہ (۵۶)

(۱) $\frac{۱}{۲ب}$ (۲) $\frac{۳لا}{۴ی}$ (۳) $\frac{۲و}{۵لا}$ (۴) $\frac{۳لا^{۴}}{۵ی^{۲}}$

(۵) $\frac{۲د}{۳واب}$ (۶) $\frac{۲واع}{۵لای}$ (۷) $\frac{۲د^{۵}}{۳و}$ (۸) $\frac{۳ن طوں}{۵م}$

(۹) $\frac{لا-و}{لا}$ (۱۰) $\frac{۱}{لا+۳}$ (۱۱) $\frac{۲لا-۳و}{۲لا}$ (۱۲) $\frac{و}{و+۴ب}$

(۱۳) $\frac{۳و}{لا+۴و}$ (۱۴) $\frac{۲لا^{۲}}{لا^{۲}-۲و^{۲}}$ (۱۵) $\frac{لا^{۴}}{لا+۳}$ (۱۶) $\frac{لا-۲}{لا-۳}$

(۱۷) $\frac{لا-۳}{لا+۴}$ (۱۸) $\frac{و-۴ب}{و-۵ب}$ (۱۹) $\frac{و^{۲}}{و+ب}$ (۲۰) $\frac{و-۴لا}{و-۵لا}$

(۲۱) $\frac{لا-ی}{لا+۷ی}$ (۲۲) $\frac{۱-۲و^{۲}}{۱+۳و^{۲}}$ (۲۳) $\frac{لا^{۲}-۱۳}{لا^{۲}-۴}$ (۲۴) $\frac{۳والا}{۱-۳لا}$

(۲۵) $\frac{۲لا+۳}{۳لا+۴}$ (۲۶) $\frac{لا-و}{لا+و}$ (۲۷) $\frac{لا+۵و}{لا+۷و}$ (۲۸) $\frac{۲لا-۵}{۳لا-۲}$

(۲۹) $\frac{۲لا-۵و}{۳لا-۷و}$ (۳۰) $\frac{۳۰والا^{۲}}{۱-۵والا}$ (۳۱) $\frac{لا-و}{لا+و}$ (۳۲) $\frac{۳و+۵ب}{۳ج-۱}$

(۳۳) $\frac{۲لا+۳و}{۳لا+۲و}$ (۳۴) $\frac{۲و-ب}{و-۱}$ (۳۵) لا+۳ (۳۶) $\frac{و-ب-ج}{و+ب-ج}$

(۳۷) $\frac{لا+۳}{لا+۵}$ (۳۸) $\frac{و-۳ب}{و-۴ب}$ (۳۹) $\frac{لا^{۲}-والا+ب^{۲}}{لا^{۲}+والا-ب^{۲}}$ (۴۰) $\frac{۳لا-۲ی}{۲لا+۵ی}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 299 of 308

(۴۱) $\frac{۱+۲لا-۳لا^۲}{۱-۲لا+۳لا^۲}$ (۴۲) $\frac{(لا-۱)^۲}{لا^۲-۳لا+۱}$ (۴۳) $\frac{لا^۲+۳لا+۵}{لا^۲+۳لا-۵}$

(۴۴) $\frac{لا^۲+۳وولا+۷و^۲}{۲لا^۲-۳وولا+۵و^۲}$ (۴۵) $\frac{۲لا+۳}{۳لا+۴}$ (۴۶) $\frac{۳لا^۲-وولا-۲و^۲}{۳لا^۲+وولا-۲و^۲}$

(۴۷) $\frac{۲(و^۲-۵وب+۷ب^۲)}{۳(و^۲+۵وب+۷ب^۲)}$ (۴۸) $\frac{۳(۳لا^۲+۴لا+۵)}{۴(۲لا^۲+۳لا+۴)}$

(۴۹) $\frac{و(۳و^۲-ب^۲)}{۲و^۲-ب^۲}$ (۵۰) $\frac{۴لا(۲لا^۲-۳ی^۲)}{۵ی(۳لا^۲-۲ی^۲)}$

مسئلہ (۵۷)

(۱) $\frac{۲وف}{۴بدف}$ و $\frac{۳بجف}{۴بدف}$ و $\frac{۴بدی}{۴بدف}$

(۲) $\frac{۶ولا^۲}{۱۲وبج}$ و $\frac{۴بی^۲}{۱۲وبج}$ و $\frac{۳ج ع^۲}{۱۲وبج}$

(۳) $\frac{۱۵لا^۲وب}{۶۰لا^۲ی^۲}$ و $\frac{۱۰لایبج}{۶۰لا^۲ی^۲}$ و $\frac{۶ی^۲جو}{۶۰لا^۲ی^۲}$

(۴) $\frac{و^۲(و-ب)}{و(و^۲-ب^۲)}$ و $\frac{وب(و-ب)}{و(و^۲-ب^۲)}$ و $\frac{ج(و-ب)}{و(و^۲-ب^۲)}$

(۵) $\frac{و^۲(و-۲ب)}{و(و^۲-۴ب^۲)}$ و $\frac{ی^۲(و+۲ب)}{و(و^۲-۴ب^۲)}$

(۶) $\frac{۲و^۲}{و(و+ب)^۲}$ و $\frac{ج-و}{و(و-ب)}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 300 of 308

(٧) $\frac{٢ا(ا+ب)}{ا^٢-ب^٢}$ ، $\frac{-٣ب(ا+ب)}{ا^٢-ب^٢}$ ، $\frac{٤ج(ا-ب)}{ا^٢-ب^٢}$

(٨) $\frac{٢ب^٢ج^٢لا(ا-لا)}{ا^٢ب^٢ج^٢(ا^٢-لا^٢)}$ ، $\frac{٣ج^٢ا^٢ى(ا+لا)}{ا^٢ب^٢ج^٢(ا^٢-لا^٢)}$ ، $\frac{٤ا^٢ب^٢ء}{ا^٢ب^٢ج^٢(ا^٢-لا^٢)}$

(٩) $\frac{ا^٢لا(٢لا+٣ى)}{لاى(٤لا^٢-٩ى^٢)}$ ، $\frac{ب^٢ى(٢لا-٣ى)}{لاى(٤لا^٢-٩ى^٢)}$ ، $\frac{ج^٢}{لاى(٤لا^٢-٩ى^٢)}$

(١٠) $\frac{ا^٢(لا^٢-لا+١)}{(لا^٢+لا^٢+١)}$ ، $\frac{ب^٢(لا^٢+لا+١)}{لا^٤+لا^٢+١}$

(١١) $\frac{٣(لا+٣)}{لا^٣+٢لا^٢-٥لا-٦}$ ، $\frac{٤(لا+١)}{لا^٣+٢لا^٢-٥لا-٦}$

(١٢) $\frac{ا^٢-٤ب^٢}{ا^٣-٨ا^٢ب^٢}$ ، $\frac{ا^٢ب^٢ج}{ا^٣-٨ا^٢ب^٣}$

(١٣) $\frac{ا(ا^٢+٣ا^٢ب+٩ب^٢}{ا^٣-٢٧ب^٣}$ ، $\frac{ب(ا-٣ب)}{ا^٣-٢٧ب^٣}$ ، $\frac{ج}{ا^٣-٢٧ب^٣}$

(١٤) $\frac{ا^٢(ا-ب+ج)}{ا^٢ب(ا^٢+ب^٢ج^٢-٢ا^٢ب)}$ ، $\frac{ب^٢(ا-ب-ج)}{ا^٢ب(ا^٢+ب^٢ج^٢-٢ا^٢ب)}$ ، $\frac{ا^٢ب^٢ج}{ا^٢ب(ا^٢+ب^٢ج^٢-٢ا^٢ب)}$

(١٥) $\frac{(ج-ا)^٢}{(ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)}$ ، $\frac{(ا-ب)^٢}{(ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)}$ ، $\frac{(ب-ج)^٢}{(ا-ب)(ب-ج)(ج-ا)}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 301 of 308

مسئلہ (٥٨)

(١) $\frac{و^٢+ب^٢}{وب}$ (٢) ٠ (٣) ١

(٤) $\frac{٢وب}{و^٢-ب^٢}$ (٥) $\frac{و+ب}{٢(و-ب)}$ (٦) $\frac{١٢لای}{٤لا^٢-٩ی^٢}$

(٧) $\frac{و^٢-٢وب-ب^٢}{(و+ب)^٢(و-ب)}$ (٨) $\frac{٢و^٢}{و^٢-ب^٢}$ (٩) $\frac{١}{(و-ب)(ب-ج)}$

(١٠) $\frac{٢}{لا^٢-٤لا+٣}$ (١١) $\frac{٢}{لا^٢+١٠لا+١٦}$ (١٢) $\frac{٦لای}{٨لا^٢+٢٧ی^٢}$

(١٣) $\frac{٢وب}{و^٢-ب^٢}$ (١٤) ٠ (١٥) $\frac{٨لا^٢ی^٢}{لا^٢-ی^٢}$

(١٦) $\frac{-٦٤وا^٢}{و^٢-١٦لا^٢}$ (١٧) $\frac{لا^٢}{٦(لا^٢-٩)}$ (١٨) $\frac{٢ب}{١-١٦و^٢ب^٢}$

(١٩) $\frac{٤لا^٢}{لا^٢-١٦و^٢}$ (٢٠) $\frac{٨و^٢ب}{و^٤-ب^٤}$ (٢١) $\frac{١٠٨لا^٢}{٨١لا^٢-ی^٢}$

(٢٢) $\frac{٩وا(لا+و)}{لا^٢-١٨و^٢}$ (٢٣) $\frac{٤وب}{(و-ب)^٢}$ (٢٤) $\frac{٦لا-١٢}{لا^٢-٥لا+٤}$

(٢٥) $\frac{٦وا}{٤لا^٢-٥وا+و^٢}$ (٢٦) $\frac{٤و^٢}{لا^٢-١٠وا+٩و^٢}$ (٢٧) $\frac{١٢لا}{لا^٢-١}$

(٢٨) $\frac{لاج}{(لا-و)(لا-ب)}$ (٢٩) $\frac{٤}{لا^٢-٦لا+٥}$ (٣٠) $\frac{٤}{لا^٢+١٤وا+١٣و^٢}$

(٣١) $\frac{٢}{لا+٣}$ (٣٢) ٠ (٣٣) $\frac{٤لا^٢}{١+لا^٢+لا}$

(٣٤) $\frac{١٢لا^٢}{لا^٤-٦٤}$ (٣٥) $\frac{٩٦وا^٥}{١٦لا^٤-٦٥٦و^٤}$

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 302 of 308

مسئلہ (۵۹)

(۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{و^۲}{۹}$ (۳) لای^۶ (۴) $\frac{لا^۳ ی^۶}{۹ و^۲ ب^۲ ج^۲}$

(۵) $\frac{۵ ن^۲ لا^۳}{۸ م ی}$ (۶) $\frac{لا+۲}{لا}$ (۷) ۳ (۸) $\frac{و^۲ - ب^۲}{و}$

(۹) $\frac{و^۲ - ۴ لا^۲}{و^۲}$ (۱۰) $\frac{لا^۲ - ۱}{لا^۲ - لا - ۶}$ (۱۱) ۱ (۱۲) ۱

(۱۳) $\frac{و^۲ + ب^۲}{و}$ (۱۴) $\frac{لا}{۲}$ (۱۵) $\frac{لا+۲}{لا+۳}$ (۱۶) $\frac{و^۲ (و - ب)}{لا}$

(۱۷) $\frac{لا^۲}{و^۲} + \frac{لا^۲}{و^۲} + ۱$ (۱۸) $\frac{۸ و ب}{۹ لا^۲} + ۲ + \frac{۸ و ب}{۹ لا^۲}$

(۱۹) ۲ $\left(\frac{ب ج}{و د} + \frac{و د}{ب ج}\right)$ (۲۰) ۱ (۲۱) $\frac{و + ب + ج}{و + ب - ج}$

(۲۲) ۱

مسئلہ (۶۰)

(۱) $\frac{۵ و لا}{۶ ب ی}$ (۲) $\frac{(و + ب)^۲}{ب}$ (۳) $\frac{لا - ۷}{لا - ۵}$ (۴) و - ب

(۵) $\frac{م - ن}{م + ۲ ن}$ (۶) $(م - ن)^۲$ (۷) ۱ (۸) ۱

(۹) $\frac{لا^۲ + ی^۲}{۲ لا ی}$ (۱۰) $\frac{لا^۲ - ۸ لا + ۱۲}{لا^۲ - ۱۰ لا + ۲۱}$ (۱۱) $\frac{۱}{ط^۲ + ق^۲}$ (۱۲) $و^۲ - ب^۲$

(۱۳) لای (۱۴) و ب (۱۵) ۲ لا (۱۶) ۱

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 303 of 308

(۱۷) $\frac{\text{لای}}{\text{لا}^2+\text{ی}^2}$ (۱۸) $-\frac{\text{ا}^2+\text{ا ب}+\text{ب}^2}{\text{ا ب}(\text{ا}-\text{ب})^2}$ (۱۹) $\frac{\text{ا}}{\text{ا}-\text{ب}}$

(۲۰) $\text{ا}^2-\text{ب}^2$ (۲۱) ا − ب

مسئلہ (۶۱)

(۱) $\frac{\text{ا د ف}+\text{ا ی}}{\text{ب د ف}+\text{ب ی}+\text{ج ف}}$ (۲) لا^2 (۳) $\text{ا}^2+\text{ب}^2$

(۴) م (۵) ۴لای (۶) ۱ (۷) ۰

(۲۴) ۳ (۲۵) $\frac{\text{ا}^2-۱۰\text{ا ب}-۱۶\text{ب}^2}{\text{ا}^2+۱۰\text{ا ب}+۱۶\text{ب}^2}$ (۲۶) ۱

(۲۷) $\frac{\text{ا}-\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}}$ (۲۸) ۰ (۲۹) $\text{لا}^2+۲$ (۳۰) ۱

(۳۱) $\frac{۳(\text{ا}+\text{ب})}{\text{ا}-\text{ب}}$ (۳۲) ۱ (۳۳) ۰ (۳۵) ۳

(۳۶) لا+ی+ع (۳۷) $\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2$ (۳۸) ا+ب+ج (۳۹) ۰

(۴۰) ۰ (۴۱) ۱ (۴۴) ۲ (۴۵) ۱

(۴۶) ۰ (۴۷) $\frac{۱}{\text{لای ع}}$ (۴۸) $\frac{۱}{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})}$

(۴۹) $\frac{\text{لا}}{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})}$ (۵۰) $\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})}$

(۵۱) $\frac{\text{لا}^2+\text{ع لا}+\text{ک}}{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})}$ (۵۶) لا^2

http://hdl.handle.net/2333.1/0zpc8682 Image 304 of 308

هو

بعون الله تعالی

کتاب جبر و مقابله که برای تعلیم طلاب مدرسهٔ

مبارکهٔ حبیبیه سراجیه که از یمن توجهات جهان در جات

اعلیحضرت سراج الملة والدین پادشاه معظم مقدس خود مختار

دولت علیهٔ خداداد افغان مؤسس و بنیاد گردین و در تالیف خانه مدرسهٔ

مبارکهٔ حبیبیه سراجیه صورت تالیف پذیرفته بود حسب الفرمان

شاهزاده جوان بخت معظم حضرت معین السلطنه صاحب افخم بتاریخ یوم

یکشنبه چهارم شهر شعبان المعظم سنه ۱۳۳۲ هجری نبوی صلی الله علیه

وآله واصحابه وسلم بید اقل العباد حافظ [illegible] احراری

صورت تحریر پذیرفته در چهاپه خانه سنگی ماشین خانهٔ

مبارکه بزیور طبع آراسته و پیراسته

گردید