Afghanistan Digital Library

adl0946

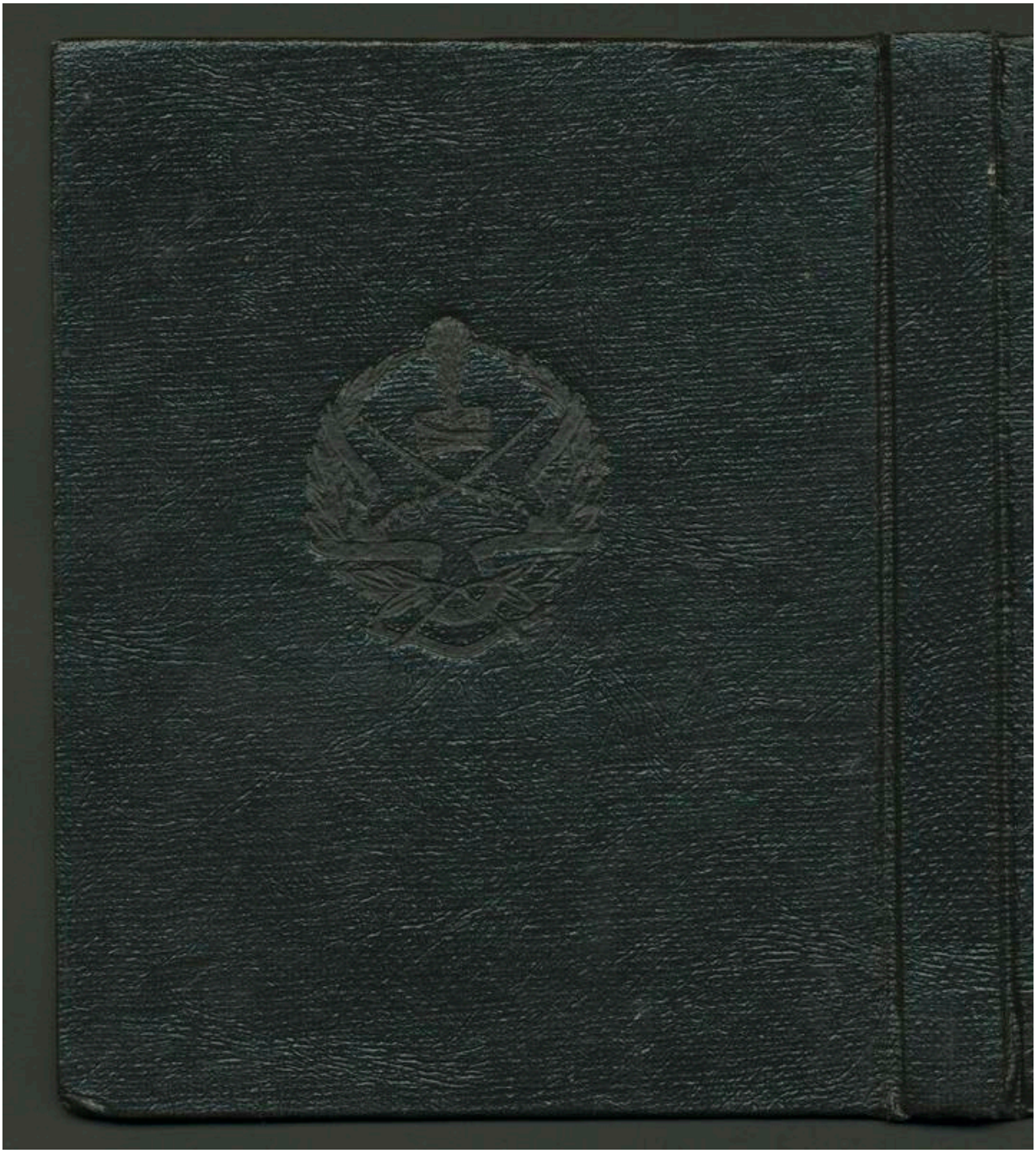
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm

This is a PDF version of an item in New York University's Afghanistan Digital Library (http://afghanistandl.nyu.edu/). For more information about this item, copy and paste the "handle" URL above into a web browser. When referring to or citing this item please use the "handle" URL and not this document or the URL from which you downloaded it.

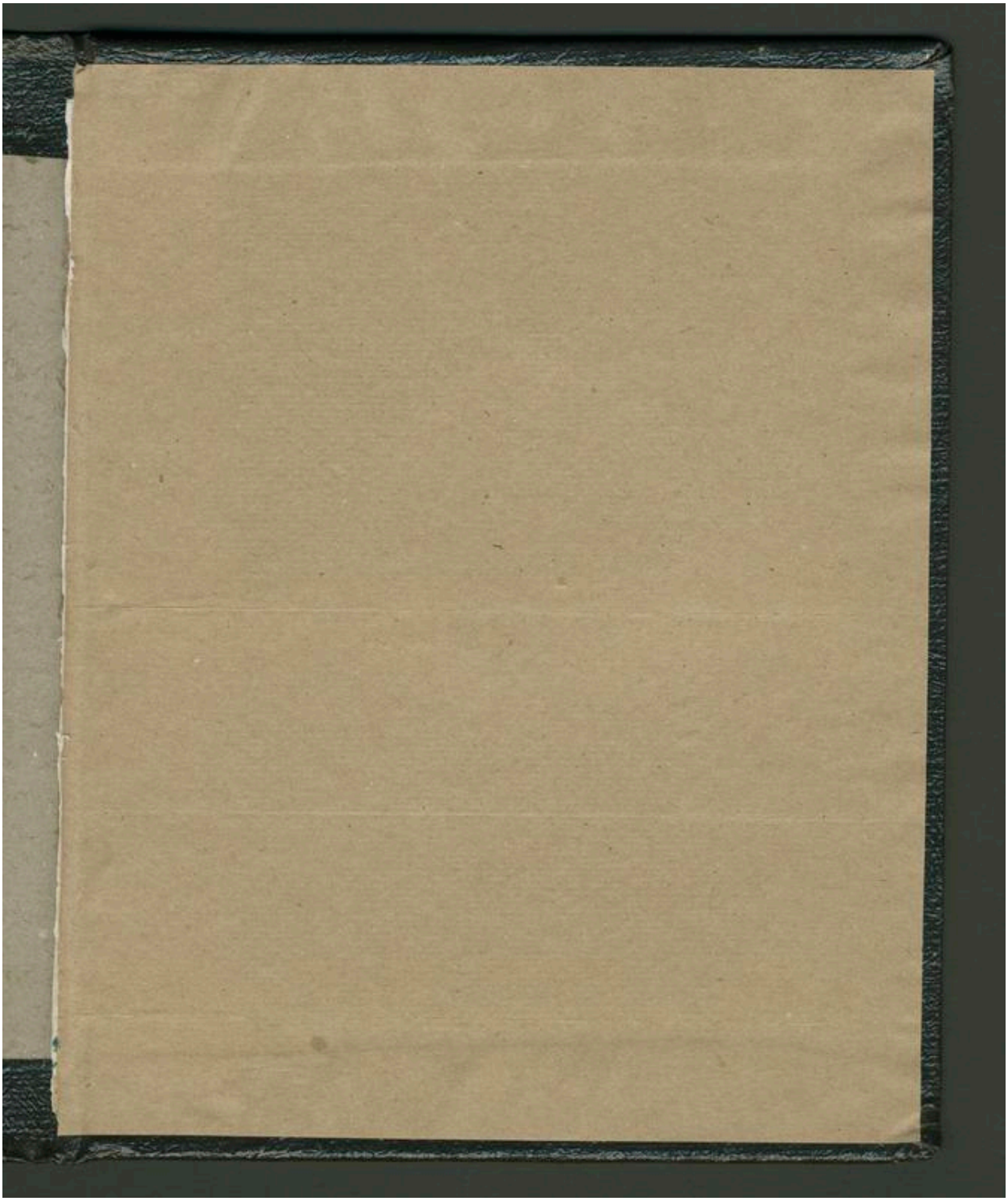
All works presented on New York University's Afghanistan Digital Library website are, unless otherwise indicated, in the public domain. The images available on this website may be freely reproduced, distributed and transmitted by anyone for any purpose, commercial or non-commercial.

NYU Libraries, Digital Library Technical Services, dlts@nyu.edu

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 1 of 326



http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 2 of 326



http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 5 of 326

وَكُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

هندسهٔ مسطحه

برائے صنفِ هفتم مکاتب رشدیه

بقرار پروگرام وزارتِ جلیلهٔ معارفِ افغانستان

مطبعهٔ مفید عام پریس لاهور

۱۳۰۶ هـ

جونا

طبع دوم

تعداد ۱۰۰۰

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 7 of 326

اصولِ علمِ ہندسہ

ہندسۂ مُسطّحہ

برای صنفِ ہفتم مکاتبِ رشدیہ

فصلِ اوّل

مُقدّماتِ اَصلیّہ

خطِ مستقیم

۱- نقطہ - ہرگاہ بامدادے کہ نوکِ آن خوب نازک تراشیدہ شدہ باشد یا باسوزنی بر روی کاغذی تکیہ کنیم بقسمی کہ نلغزند یک نقطہ حاصل مے شود خ ذ ۱۰

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 8 of 326

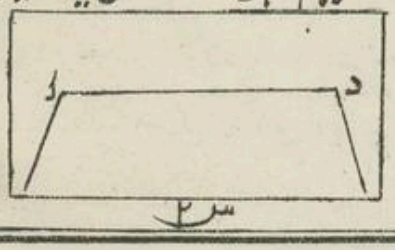
نقطه را بواسطهٔ یک حروف که در نزدیکی آن نوشته باشد نمایش میدهم ۔ س۱

ولی باید طوری حرف هر نقطه را بنویسیم که بانقاط دیگر اشتباه نشود مثلاً میگوئیم ۔ نقطهٔ (ا) یا نقطهٔ (د) یا نقطهٔ (ج) س۱ ۔

۲ ۔ خط ۔ هرگاه نوک مداد را روی صفحهٔ کاغذ یا دیوار یا شئ دیگری بکشیم یک خط رسم می شود پس معلوم شد که خط از تغییر محل نقطه حاصل میشود ۔

۳ ۔ خط مستقیم ۔ ساده ترین خطوط خط مستقیم است نخی که خوب کشیده شده باشد تصویری از آن است (من بعد هرجا محض اختصار فقط خط بگوئیم مقصود همان خط مستقیم است)

۴ ۔ خاصیت اصلی خط مستقیم ۔ هرگاه در روی یک میز یا روی مقوائی دو سنجاق در دو نقطه مانند دو نقطهٔ ا و د بکوبیم (س۲) حال اگر نخ سیاهی را



http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 9 of 326

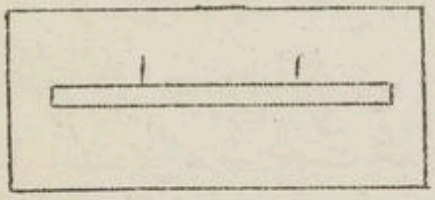
0000148

بدست گرفته بروی میز به سنجاق ها تکیه داده از طرفین بکشیم خط مستقیمے حاصل مے شود که از دو نقطه (ا) و (د) گذشته است .

حال اگر نخ دیگری که قرمز باشد بر روی میز بهمان دو نقطه تکیه داده از طرفین بکشیم آن دو نخ بر روے هم واقع گردیده بعبارۃ اُخریٰ بریک دیگر تطبیق مے شوند و یک خط تشکیل مے دهند ازین رو خاصیت اصلی خط مستقیم را میتوان فهمید .

از دو نقطۂ معینه بیش از یک خط مستقیم نمیتوان عبور داد .

۵ - خط غیر محدود - هرگاه سوزنی را که خوب راست وصاف ونازک باشد برداشته در کنار دو سنجاق فوق الذکر در روے نخها قرار دهیم خط مستقیم دیگری بدست می آوریم دو خط سابق الذکر بدو نقطۂ ا و د محدود می باشند - ولی این خط مانند آنها از دو نقطه ا و د گذشته علاوه بران از طرفین هم قدری



س ۳

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 10 of 326

امتداد داده شده است (س۳)

حال ممکن است سوزن دیگری بلند تر از سوزن مذکور برداشته در کنار سنجاقها قرار دهیم (س۳) خطِ مستقیمی حاصل مے شود که از خطوط سابق بیشتر امتداد داده شده است - وہمچنین ہر قدر بخواہیم ممکن است سوزن را بلند تر کنیم تا آنکه بخطی برسیم که غیر محدود باشد یعنی ہر قدر که خواسته باشیم از یک طرف یا از طرفین امتداد داده شده باشد.

من بعد ہر وقت از خط مستقیم صحبت کنیم مقصود ہمان خط غیر محدود است اگرچه در حقیقت آن خط محدود بکنار کاغذ یا کنار تخته باشد.

۶- بیان دیگر از خاصیت خط مستقیم - چون از دو نقطهٔ مفروضه بیش از یک خط مستقیم نمیتوان عبور داد پس ہرگاه دو خط مستقیم در دو نقطه شریک باشند بر روی ہم منطبق میشوند.

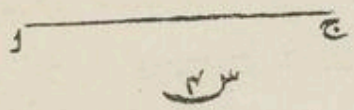
در این جا باید ملتفت شد که مقصود از انطباق دو خط فقط در قسمت بین ا و د در س۲ نیست بلکه این مسئله در تمام قسمت دو

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 11 of 326

خط غیر محدود است باین معنی که هرگاه دو خط بر یک دیگر در دو نقطه منطبق شوند در تمام قسمتها بر یک دیگر منطبق می شوند، هر نقطه از خط اوّل متعلق بخط ثانی و هر نقطه از خط ثانی متعلق بخط اول است پس :

هرگاه دو خط در دو نقطه مشترک باشند بر یک دیگر منطبق می شوند .

۷- تعیین خط مستقیم - چون دو نقطهٔ ا و ج یک خطِ مستقیم را تعیین میکنند ما من بعد آنرا بواسطهٔ همان دو حرف تعیین مے کنیم و میگوئیم خط



ا ج (س۴)

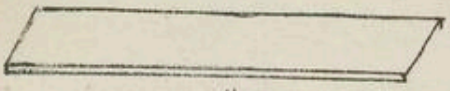
هرگاه ترس اشتباهی نباشد ممکن است خط مستقیم را هم بواسطهٔ یک حرف تعیین نمود درین صورت میگوئیم خط

ج (س۵)

۸- ستّاره - ستاره آلتی است که بآن خطوط مستقیم را رسم می نمایند . (س۶)

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 12 of 326

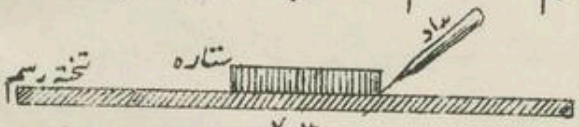
ستارهٔ ما مسطح است هرگاه ستاره صحیح باشد کنارهاے آن خطوط مستقیم میباشند



س ٦

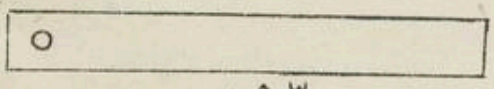
حال اگر آن را روی یک صفحه کاغذ قرار دهیم و در کنار آن نوک مداد تراشیده را بکشیم خط مستقیمی رسم میشود.

در تمام ترسیمات هندسی لازم است که صفحهٔ کاغذ در روی یک میز صاف یا تختهٔ رسم یا مقوای محکمی باشد، س ٧ نمائش میدهد که در وقت ترسیم خط مستقیم مداد را چگونه باید نگاهداشت



س ٧

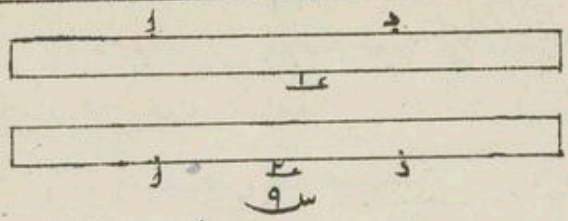
٩- امتحان ستاره - قبلاً در یک کنار ستاره علامتی میگذاریم که آنرا بشناسیم (س ٨) حال دو نقطهٔ ا و د را در روی صفحه کاغذ می گذاریم و همان کنار ستاره را که نشان کرده



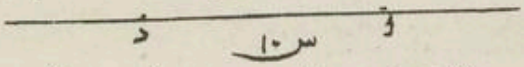
س ٨

بودیم در کنار آنها قرار داده (ع ا س ٩) یک خط رسم می نمائیم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 13 of 326



اگر ستاره صحیح باشد آن خط مستقیم است که از دو نقطهٔ ا و د گذشته است - بعد ستاره را بدور خط ا د مے گردانیم بقسمی که آن لبهٔ ستاره که بطرف ما بوده است بطرف بالا برود باز هم خط دیگری رسم مینمائیم اگر ستاره صحیح باشد آن دو خط با یک دیگر تطبیق مے شوند س ۱۰ زیرا که بین دو نقطه بیش از یک خط مستقیم نمیتوان ترسیم نمود



اگر برعکس ستاره صحیح نباشد آن دو خط بریک دیگر منطبق نمی شوند (س ۱۱) پس نمیتوان آن ستاره را برای

ترسیم خط مستقیم بکار برد مگر آنکه لبهٔ آن را اصلاح نمائیم - قبل از استعمال هر ستاره باید بدقت امتحان نمود که هر دو لبهٔ آن صحیح باشد آن وقت بدون تفاوت با هر دو طرف آن میتوان خطوط مستقیمه رسم نمود.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 14 of 326

۱۰- مسائل - بایک ستاره صحیح بسهولت بتوان مسائل ذیل را حل نمود:

۱- ترسیم هر خط مستقیم -

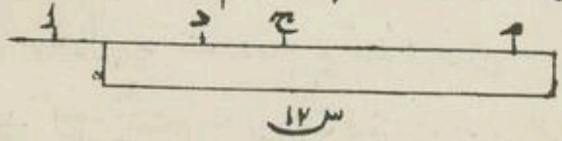
۲- ترسیم یك خط که از یك نقطهٔ مفروضه عبور کند

۳- ترسیم یك خط مستقیم که دو نقطهٔ مفروضه را بهم وصل نماید.

برای حل مسئله آخری باید ستاره بقدر کفایت بلند باشد که لبهٔ آن بتواند دو نقطه را در کنار خود بگیرد.

۴- ترسیم قسمتی از خطی و امتداد دادن آن هر قدر که خواسته باشیم.

ابتدا قسمتی از خطی مانند ا ج را رسم می کنیم (س۱۲) بعد نقطهٔ مانند د بین آنها نشان می کنیم.

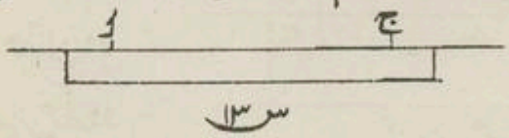


حال ستاره را در کنار د ج قرار داده مانند آنکه بخواهیم خط د ج را

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 15 of 326

رسم کنیم آن خط را تا نقطهٔ م امتداد میدهیم چون دو خط بی انتهای ا ج و د م در دو نقطهٔ د و ج با یک دیگر اشتراک دارند پس بر یک دیگر منطبق شده و مسئله حلّ گردیده است، هرگاه آنچه را که کرده ایم بدقت امتحان کنیم خواص مهمی از خط مستقیم کشف میکنیم.

۱۱- **لغزش یک خط مستقیم بروی خود** - خطی مانند ا ج رسم کرده (س۱۳) در دو نقطهٔ ا و ج دو سنجاق محکم میکنیم بعد ستاره را روی کاغذ بقسمی قرار میدهیم که دو سنجاق در کنار آن واقع شود حال اگر ستاره را دائماً در روی



س۱۳

کاغذ متکی بر سنجاقها حرکت دهیم کنار ستاره خط مستقیم متحرکی است که دائماً شامل دو نقطهٔ ا و ج است پس دائماً منطبق است بر خط ا ج که سابقاً رسم کرده بودیم.

این نتیجه را بطریق ذیل بیان میکنیم.

بیان اوّل - یک خط مستقیم می تواند بر روی

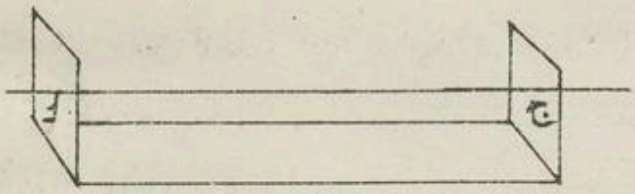
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 16 of 326

خط دیگری که بران منطبق شده بلغزد و بطور اختصار میگوئیم .

بیان دوم - یک خط مستقیم ممکن است بر روی خود بلغزد :

بیان اول تقریباً تفسیرے از بیان دوم است .

۱۲- **دوران یک خط بدور خود** - یک جعبهٔ مقوائی را گرفته سرپوش و دیوارهای دو طرف آن را بر میداریم (س۱۴) بعد در دو نقطه ا و ج باسوزن دو سوراخ کردو

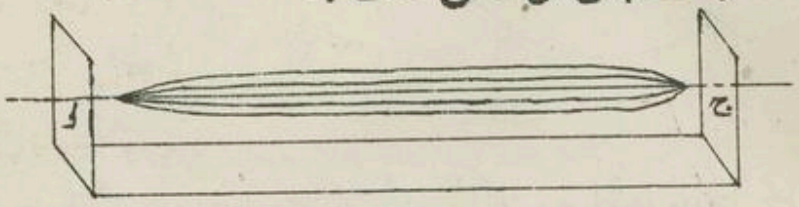


س۱۴

یک سوزن بلند نازکی میگذرانیم درینجا هم خط مستقیمی بدست داریم که از دو نقطهٔ ا و ج گذشته است حال سر آزاد سوزن را گرفته مانند وقتیکه ساعت را کوک مے کنیم می چرخانیم اگر سوزن نازک درست راست باشد همواره با خط مستقیمے که از دو نقطهٔ ا و ج می گذرد تطبیق می شود و حرکت آن معلوم نمی شود مگر آنکه چشم خود را

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 17 of 326

خیلی نزدیک کنیم - ولی اگر از حرکت سریع سوزن بدور خود بکدسته خطوط مشهود شود (س۱۵) معلوم مے شود که سوزن ما مستقیم نبوده است زیرا که چندین خط مستقیم ممکن نیست دو نقطهٔ مشترک داشته باشند پس می توان گفت :-



س ۱۵

خط مستقیم بدور خود می تواند دوران نماید.

۱۳- نتیجه - دو نقطه یك خط مستقیم را تعیین مینمایند و آن میتواند بر روی خود بلغزد و بدور خود بچرخد.

۱۴- تبصره - باید دانست که خاصیت لغزش و گردش یک خط بدور خود از خاصیت اصلی خط مستقیم (ع۶) حاصل میشود.

ما من بعد به همین طریق پیش میرویم یعنی در صورتیکه بدقت اشیاء سادهٔ را ملاحظه کنیم بلا فاصله بعضی خواص آنها را بدست

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 18 of 326

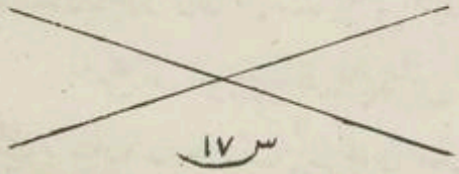
می آوریم و استدلال برای ما بعضی خواص دیگری کشف می کند که در ظاهر مخفی است و در اولین نظر معلوم نمی شود.

۱۵- تقاطع دو خط- در س۱۶ دو خط و سه نقطه ا و ج و د معلوم است که بهر دو آن خطوط تعلق دارند- پس

س ۱۶

میگویند که آن دو خط دراین سه نقطه شریک میباشند یا اینکه محل تقاطع آن هانسه نقطه ا و د و ج است.

۱۶- تقاطع دو خط مستقیم- سابقاً گفتیم که هرگاه دو خط مستقیم در دو نقطه شریک باشند بر روی هم منطبق می شوند- پس معلوم می شود که دو خط مستقیم مجزی از یک دیگر نمیتوانند- بیش از یک نقطهٔ مشترک داشته باشند س۱۷ نمایش میدهد که دو خط مستقیم در یک نقطه با یک دیگر اشتراک دارند.

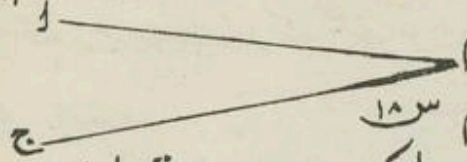


س ۱۷

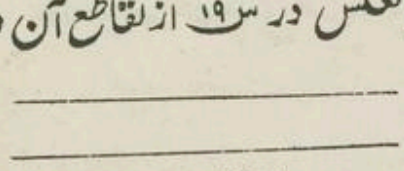
س۱۸ دو خط مستقیم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 19 of 326

ا و ج را نمائش میدهد اگرچه این دو قطعه خط که ما رسم کرده ایم یک دیگر را قطع نمیکنند ولی معلوم است که اگر آن ها را امتداد دهیم س ۱۸ بالاخره یک دیگر را قطع مینمایند بالعکس در س ۱۹ از تقاطع آن دو خط چیزی معلوم نمی شود و از تجربه نیز چیزی نمیتوان بدست آورد.



س ۱۸



س ۱۹

بعدها خواهیم دید که دلائل هندسی جواب قطعی راجع باین دو خط و بسیارے چیزهای دیگر را خواهد داد که بنظر و چشم نمیتوان تعیین نمود.

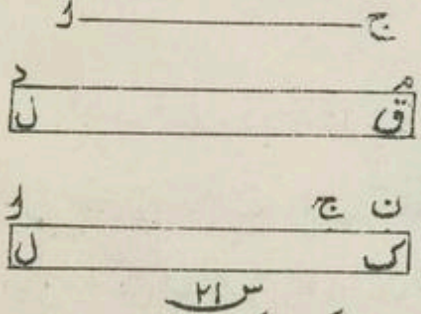
۱۷- قطعه خط- دو نقطهٔ ا و ج را بواسطهٔ یک خط مستقیم بهم وصل مے کنیم (س ۲۰) ولی قسمتی که بین آن دو نقطه واقع است بیشتر ترسیم نمی نمائیم بنابراین جزئی از یک خط مستقیم بدست آمده است که آن را قطعه خط می نامند و دو نقطهٔ ا و ج دو انتهای آن می باشند پس می گوئیم:

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 20 of 326

قطعه خط قسمتی است از خط مستقیم که بین دو نقطهٔ واقع شده باشد که آنها را دو انتهای آن قطعه خط می نامند ۔ س۲۰

ا ——— ج

۱۸۔ قطعه خط های مساوی ۔ فرض مے کنیم دو قطعه خط ا ج و د م در دست باشند س۲۱ ابتداءً ستاره را در کنار قطعه خط د م قرار میدهیم و در کنار آن دو نقطه ک و ل را مطابق با آن دو نقطه نشان می کنیم بعد ستاره را طوری در کنار خط ا ج قرار می دهیم که نقطه ل مطابق با نقطه ا واقع شود بعد در روی کاغذ نقطهٔ ن را که مطابق با نقطهٔ ک است نشان می نمائیم پس در این صورت قطعهٔ خط م د را بر روی قطعه خط ا ج نقل کرده ایم معمولاً این نقطهٔ ن بر روے نقطهٔ ج واقع نمی شود در این صورت می گویند که این دو قطعه خط نا مساوی هستند ولی اگر نقطهٔ ن و ج بر روی یک دیگر واقع



س۲۱

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 21 of 326

شوند می گوئیم آن دو قطعه خط باهم مساوی هستند زیرا که پس از نقل بر روی هم منطبق شده اند پس بطور کلی می فهمیم که:

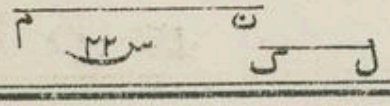
دو قطعه خط در صورتی مساوی هستند که بتوان آنها را بر روی یکدیگر منطبق نمود.

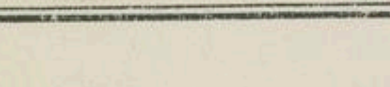
۱۹- تبصره - برای آنکه دو قطعه بایک دیگر مساوی باشند نه فقط لازم است که خطوط غیر محدودے که شامل آن ها هستند بر روے هم واقع شوند بلکه لازم است که دو انتهاے آن ها نیز بر روے هم بیفتند.

۲۰- قطعه خط های نامساوی - دو قطعه خط ا ج و م د (س ۲۱) بایک دیگر مساوی نیستند زیرا که نقطهٔ ن بر روی نقطه ج واقع نشده است و چون نقطهٔ ج مابین ا و ن واقع شده است پس مے گوئیم قطعه خط ا ج کوچک تر از قطعه خط م د است و یا اینکه قطعه خط م د بزرگتر از قطعه خط ا ج می باشد.

۲۱- اندازهٔ یک قطعهٔ خط-

در روی خط غیر محدودی سه نقطه





http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 22 of 326

مانند ا و ج و د اختیار مے کنیم مے بینیم کہ قطعہ خط ا د حاصل جمع دو قطعہ خط ا ج و ج د است و این طور می نویسیم :-

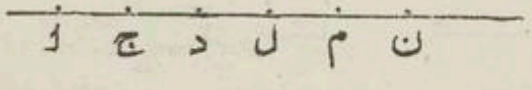
د ج + ج ا = ا د

حال اگر دو قطعہ خط ا ج و ج د با دو قطعہ خط ن م و ل ک مساوی باشند واضح است کہ ا د حاصل جمع ل ک و م ن نیز ہست و این طور می نویسیم

ل ک + ن م = ا د (س ۲۲)

از آنچہ گفتہ شد وسیلۂ بدست آوردن حاصل جمع چندین قطعہ خط بدست می آید یعنی برای این کار کافی است کہ آنہا را سر بسر در روے یک خط مستقیم قرار دہیم (ع ۱۸) چون ا د حاصل جمع دو قطعہ خط ا ج و ج د است پس می گوئیم ج د باقی ماندۂ تفریق ا ج از ا د می باشد .

اگر پنج قطعہ خط مساوی ا ج و ج د و د ل و ل م و م ن



را سر بسر پہلوے ہم قرار دہیم س ۲۳

س ۲۳

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 23 of 326

میگوئیم قطعهٔ خط ان پنج برابر قطعه خط اج است و اج خمس ان می باشد.

برای اندازه گرفتن یک قطعه خط آن را با یک قطعه خط دیگر که برای وحدت انتخاب کرده اند مقایسه می نمایند غالباً این واحد همان متر است که در حساب مذکور است و متری که ما در مدرسه استعمال می کنیم ستارهٔ است که کنار آن به ده قسمت مساوی موسوم به دسیمتر تقسیم شده و هر یک از آنها به ده سانتی متر وغیره ولی ما در اینجا واحد را سانتی متر قرار میدهیم زیرا که بعدها برای اندازه در ترسیمات هندسی هم بسیار مفید است.

اگر قطعهٔ خطّی مقابل با چهار قسمت سانتی متری ستارهٔ ما باشد میگوئیم طول آن چهار سانتی متر است و یا آنکه اندازهٔ آن ۴ است درصورتی که واحد سانتی متر باشد.

نتیجهٔ هر اندازه بالطبع دارای دو قسمت است.

اول - ذکر واحد منتخبه.

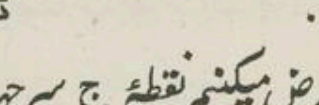
دوم - بیان عددی که معلوم می کند آن قطعه خط چند برابر واحد

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 24 of 326

است پس بطور کلی میگوئیم.

اندازهٔ هر قطعهٔ خط عددی است که معین میکند آن قطعه خط چند برابر واحد است.

۲۲ - تا حال آنچه گفتیم درصورتی بود که اندازهٔ قطعه خطی صحیح باشد ممکن است هرگاه چندین سانتی متر را پهلوی یک دیگر قرار دهیم هرگز مساوی با قطعه خط مفروضی نشود مثلاً در س۲۴ قطعه خط ا د بزرگتر از چهار سانتی متر و کوچک تر از پنج سانتی متر است.



فرض میکنیم نقطهٔ ج سر چهار سانتی متر باشد اگر ستارهٔ ما به میلیمتر هم قسمت شده باشد معلوم می شود که اندازه قطعه د ج ۳ میلیمتر یا $\frac{۳}{۱۰}$ سانتی متر است پس بر روی هم اندازه قطعهٔ خط ا د مساوی با $\frac{۳}{۱۰}$ + ۴ یا ۳ د ۴ سانتی متر است.

اگر برای اندازه گرفتن قطعه خط د ج بهمان اشکالی که برای اندازهٔ ا د برخورده بودیم برخوریم چون ستارهٔ ما اندازهٔ کمتر از میلیمتر ندارد بنابراین مثلاً ممکن است که اندازهٔ قطعه خط ما

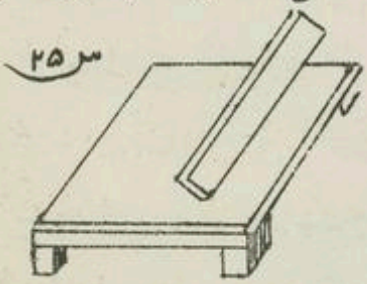
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 25 of 326

از ۴۵ میلیمتر بیشتر و از ۴۶ میلیمتر کمتر باشد پس می گوئیم که اندازهٔ قطعه خط مابین ۴۵ و ۴۶ سانتی متر است و این دو عدد را اندازه های تقریبی آن مے گویند.

۲۳- سطح - از ملاحظه نقاط اجسام مادّی که با هوا مجاورند برائے ما خیالی از سطح حاصل مے شود مثلاً یک صفحه کاغذ و پوست نازک یک میوه نمائش سطح را می دهند.

۲۴- سطح مستوی - ساده ترین سطوح سطح مستوی است مثلاً سطح یک میز و یک دیوار و آب ساکن در یک ظرف کوچک نمایش آن را می دهند.

۲۵- خواص ممیزه سطح مستوی - وقتیکه نجاری بخواهد سطح میزے را صاف نماید برای امتحان آن ستّاره را برداشته از هر طرف روی آن قرار میدهد و بدقت می بیند که کناره ستّاره کاملاً روی سطح میز واقع شده است یا نه (س۲۵) اگر سطح میز صاف



http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 26 of 326

باشد همینکه دو نقطه از کنار ستاره روی آن واقع شد۔ تمام کنار آن روی سطح میز واقع مے شود ولو ستاره را بوصف ہاے مختلفه روے آن قرار دہیم پس ازین روی توانیم بگوئیم۔

سطح مستوی آن است که هرگاه دو نقطهٔ واقعهٔ روی آن را باخط مستقیمی بهم وصل کنیم تمام آن خط روی آن سطح واقع شود۔

۲۶۔ لغزش سطح مستوی بر روی خود۔ هرگاه یک قطعه مقوا را که یک طرف آن نوشته باشد برداشته روے میزے قرار دہیم بقسمی که طرف سفید آن روے سطح میز واقع شود دو سطح داریم که بر روے هم واقع شده و در تمام نقاط برهم منطبق شده اند و هر قدر هم مقوا را حرکت دہیم و بر روے میز بلغزانیم این انطباق برهم نخواهد خورد پس مانند ۱۱ میگوئیم:

یك سطح در روی سطح دیگری مے تواند بلغزد۔

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 27 of 326

یا بطور اختصار:

یك سطح ممکن است بر روی خود بلغزد.

۲۷- انعکاس - همین تجربه را ممکن ست تکرار کنیم در صورتیکه مقوا را از طرف نوشته بر روی میز قرار دهیم در این صورت مے گویند که سطح منعکس شده است:

پس میتوان دو سطح را بدو طریق بر روے هم منطبق نمود:-

اوّل - بدون انعکاس.

دوم - با انعکاس.

۲۸- اشکال هندسی - اشکال هندسی از اجتماع نقاط و خطوط و سطوح تشکیل مے شود. اگر تمام نقاط و خطوط دریک سطح مستوی رسم شده باشند آن ها را اشکال مسطحه می نامند و تحصیل آن ها را هندسهٔ مسطحه مے گویند و تحصیل اشکال غیر مسطحه را هندسهٔ فضائیه می نامند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 28 of 326

فصل دوم

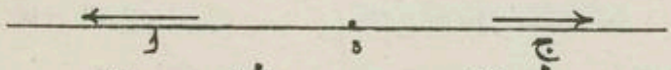
زوایا

۲۹- نیم خط - نقطه مانند ا فرض می کنیم س۲۶ بعد ازآن نقطه شروع کرده یک خط مستقیم رسم می کنیم ولی همیشه مداد را بیک جهت می کشیم بدین طریق یک نیم خط بدست می آید- نقطهٔ ا را مبداء نیم خط می نامند.

می توان نیم خط را الی غیر النهایه امتداد داد مشروط بر آنکه از نقطهٔ ا تجاوز ننماید پس نیم خط فقط از یک طرف غیر محدود است و به همین جهت است که آن را نیم خط می نامند. حال اگر در روی

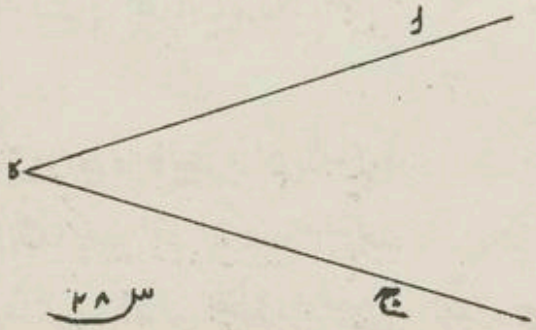
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 29 of 326

یک خط غیر محدود ا ج نقطهٔ مانند ہ فرض کنیم (س ۲۷) دو نیم خط ہ ج و ہ ا خواہیم داشت اگر بخواہیم از مبدء شروع کرده این دو نیم خط را رسم کنیم باید یک دفعه مداد را بطرف راست برائے رسم کردن ہ ج و دفعهٔ دیگر بطرف چپ برائے رسم کردن ہ ا حرکت



دہیم مے گوئیم که این دو نیم خط در دو جهت مختلف هستند.

۳۰ - زوایا - دو نیم خط را که از یک نقطهٔ ہ شروع مے شوند (س ۲۸) ملاحظه مے کنیم آنها زاویه تشکیل مے دہند نقطهٔ ہ را رأس زاویهٔ بینامند و دو نیم خط ہ ا و ہ ج را دو ضلع آن مے گویند البته معلوم است که از یک طرف هر دو غیر محدود میباشند زیرا



س ۲۸

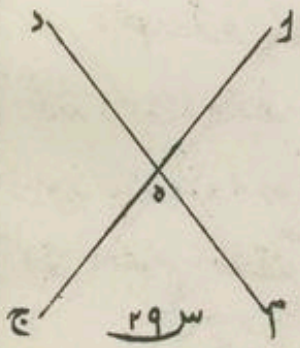
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 30 of 326

که نیم خط هستند بنا برین به تعریف ذیل میرسیم :-

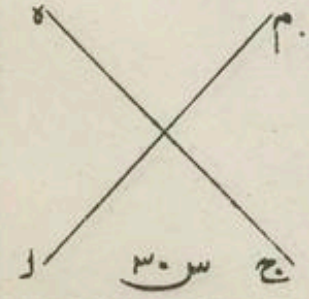
زاویه شکلی است که حاصل میشود از دو نیم خط که مبداء شان مشترك باشد .

۳۱ - اگر کلمهٔ از تعریف مذکور تغییر کند غلط مے شود و تقریباً تمام تعریفهاے هندسی همین طور است مثلاً اگر بگوئیم :

زاویه شکلی است حاصل از دو خط مستقیم که یک نقطهٔ مشترک داشته باشند درین صورت س ۲۹ در نظر ما مجسم مے شود که مقصود ما نیست - و نیز اگر بگوئیم : زاویه شکلی است حاصل از دو نیم خط که یک نقطهٔ مشترک داشته باشند س ۳۰ ممکن است در نظر ما بیاید که شباهتی به س ۲۸ ندارد .



س ۲۹



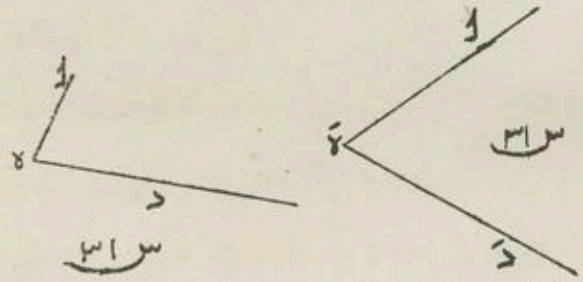
س ۳۰

۳۲ - تعیین زاویه - برای تعیین یک زاویه ابتدا یک نقطه از یک ضلع بعد ازان نقطهٔ راس و سپس نقطهٔ از ضلع

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 31 of 326

ثانی را می خوانند مثلاً در س ۲۸ میتوان بگوئیم زاویهٔ ا ه ج و ج ه د ا
اگر زاویه به تنهائی رسم شده ممکن است (س ۳۸) آن را فقط
بحرف راس تعیین نمود ولی در س ۲۹ چهار زاویه داریم که یک راس
مشترک دارند بنابر این ممکن نیست هیچیک از آنها را به حرف ه
بخوانیم .

۳۳ - زوایای مساویه - دو زاویه در صورتی مساوی هستند
که بتوان آنها
را بر یک دیگر
منطبق نمود
اگر کاغذ نازکی



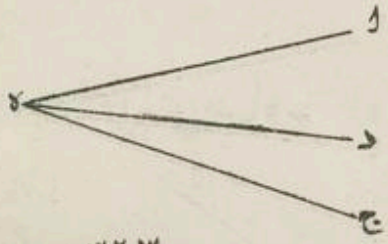
روی زاویهٔ اَ ه دَ[1] گذاشته آن زاویه را روی کاغذ نازک
رسم کنیم بعد آن را در روی زاویهٔ ا ه د قرار دهیم بقسمی که نقطهٔ
ه روی نقطهٔ ه و ضلع اَ ه بر روی ضلع ا ه و ضلع ه دَ بر روی
ضلع ه د واقع گردد آن وقت دو زاویهٔ اَ ه دَ و ا ه د با یک دیگر
مساویند در اینجا هیچ وجه لازم نیست که نیم خط ه اَ با نیم خط ه ا دارای

[1] دیگ ه یک د یک

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 32 of 326

یک طول باشند زیرا که در تساوی زوایا فقط انحراف اضلاع از یک دیگر شرط است نه طول آنها ۔

۳۴ - حاصل جمع دو زاویه - زوایای مجاوره - ابتدا سه نیم خط ہ ا و ہ د و ہ ج را که دارای یک راس مشترکه هستند رسم می کنیم (س ۳۲) ۔



س ۳۲

از روی شکل معلوم است که زاویه ا ہ ج مجموع دو زاویه ا ہ د و د ہ ج است و آن را این طور می نویسیم

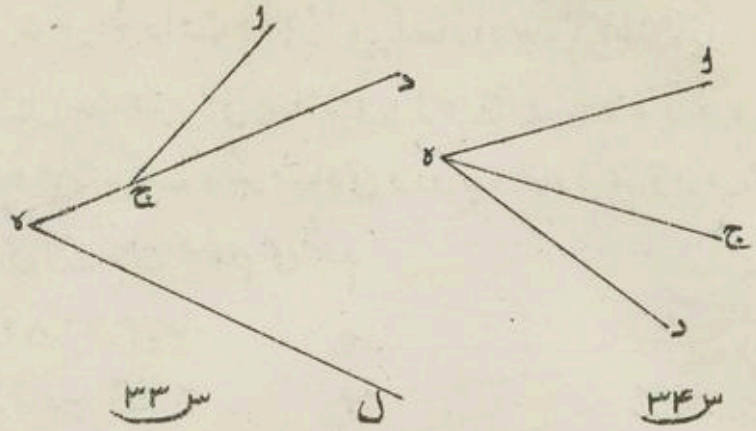
$$\text{ا ہ ج} = \text{ا ہ د} + \text{د ہ ج}$$

و بر روی آنها این علامت را ^ که مخصوص زاویه است میگذاریم ۔

دو زاویه ا ہ د و د ہ ج را که دارای راس مشترک ہ و یک ضلع مشترک ہ د می باشند و در طرفین آن ضلع مشترک واقع شده اند زوایای مجاوره می نامند ۔

فقط مقصود از مجاوره آن است که پهلوے یک دیگر واقع

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 33 of 326



س ۳۳ س ۳۴

شده اند - دوزاویه ا ج د و د ه ل در س ۳۳ و دو زاویهٔ ا ه د و ا ه ج در س ۳۴ بایک دیگر مجاور نیستند.

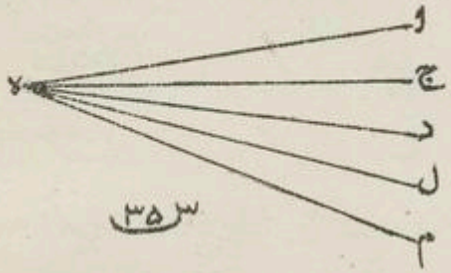
بنابر آنچه مذکور شد تعریف ذیل بدست می آید :-

دو زاویهٔ مجاوره آن هائی هستند که دارای رأس و یك ضلع مشترك می باشند و در طرفین آن ضلع مشترك واقع شده اند.

از روی تعریف فوق میتوان حاصل جمع دوزاویه را بدست آورد زیرا که با کاغذ نازک یکے از آنها در مجاورت دیگری نقل می کنیم و مسئله راجع مے شود به حالت س ۳۲.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 34 of 326

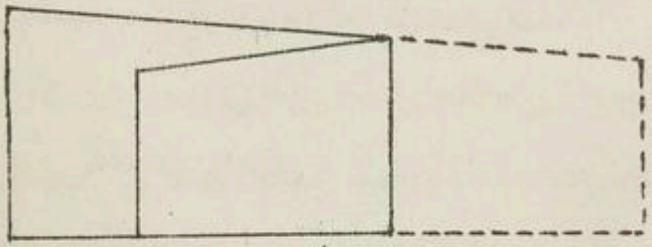
۳۵- اضعاف و اجزای یک زاویه - با کاغذ نازکی س۳۵ را تشکیل مے دہیم یعنی چہار زاویہ ا ہ ج و ج ہ د و د ہ ل و ل ہ م را با یک دیگر مساوی و دو بدو مجاور ہم قرار میدہیم از روی این شکل معلوم می شود



س۳۵

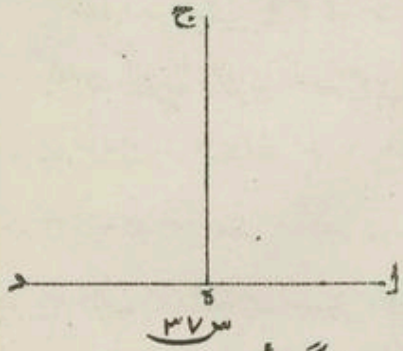
کہ زاویہ ا ہ م چہار برابر زاویہ ا ہ ج است یا آنکہ زاویۂ ا ہ ج ربع زاویۂ ا ہ م میباشد و نیز اضعاف و اجزاء زاویہ مشخص مے شود.

۳۶- زاویۂ قائمہ - یک صفحہ کاغذ کہ کنار آن صاف باشد انتخاب مے کنیم (س۳۶) بعد آن را تا مے کنیم بقسمے کہ دو قسمت آن بعد از تا شدن درست بر


س۳۶

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 35 of 326

روی یک دیگر واقع شوند آن وقت تاے آن را خوب نشان کرده کاغذ را باز مے کنیم کنار کاغذ با تاے آن مانند س۳۷ میشود در اینجا دو زاویۂ مجاوره ج ه د و ه ا باهمدیگر مساوی هستند زیرا که برای تا کردن کاغذ آنها را بر یک دیگر منطبق نموده ایم دو ضلع خارجی یا غیر مشترک آن ها بر یک خط مستقیم واقع شده اند حال هر یک از این دو زاویه را یک زاویۂ قائمه مینامند پس مے گوئیم :



هرگاه در دو زاویۂ مجاوره مساوی دو ضلع غیر مشترک بر یک خط مستقیم واقع شوند هر یک از آنها یک زاویۂ قائمه است .

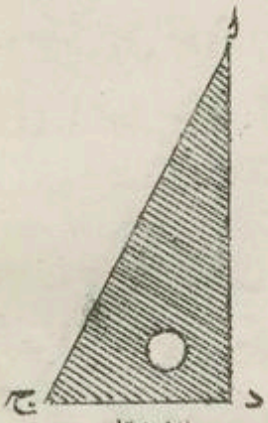
۳۷ - از روی تعریف مذکور هرگاه دو زاویه قائمه در مجاورت یک دیگر واقع شوند اضلاع خارجی انها بر استقامت یک خط واقع مے شوند .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 36 of 326

۳۸- عمود - وقتیکه خطی از مبدأ نیم خطی عمود کند و با آن دو زاویهٔ مجاورهٔ قائمه احداث کنند میگویند که آن نیم خط عمود است بر خط.

مثلاً در س ۳۷ ج ه عمود است بر ا د.

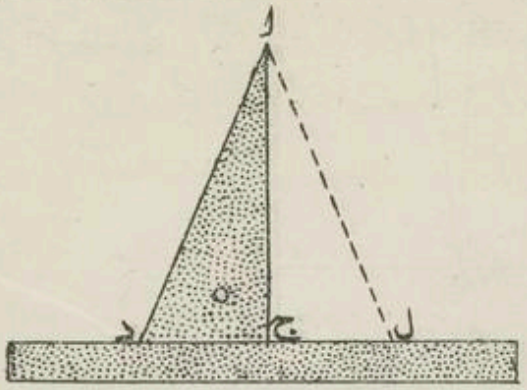
۳۹- گونیا - گونیا قطعهٔ چوبی است که مانند س ۳۸ میباشد سه لبهٔ ا ج و ا د و د ج خطوط مستقیمه هستند و زاویهٔ ا د ج قائمه است برای سهولت استعمال در وسط آن سوراخی نموده اند.



س ۳۸

۴۰- امتحان گونیا - ابتداء مانند ۹ع کنارهای آن را امتحان میکنیم که خط مستقیم باشند بعد معلوم میکنیم که زاویهٔ ا د ج قائمه است یا نیست برای این کار (س ۳۹) ستارهٔ در کنار خط مستقیمی مانند ل د قرار داده گونیائی را که میخواهیم امتحان کنیم بران تکیه میدهیم (مانند تصویری که با خطوط بر در س ۳۹ کشیده شده است).

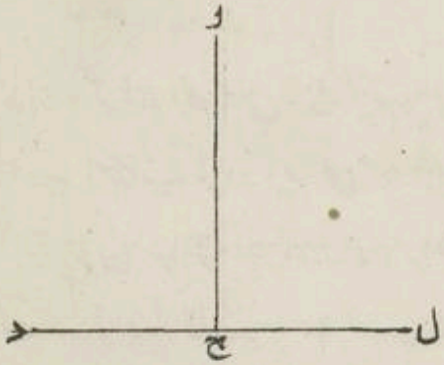
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 37 of 326



س ۳۹

بعد نیم خطے مانند
اج در کنار آن بامداد
رسم مے کنیم اگر گونیا
صحیح باشد باید دو
زاویۂ اج د و اج ل
قائمہ باشند برائے

تحقیق این مسئلہ ستارہ را حرکت نداده گونیا را برمی گردانیم بقسمیکہ کنار آن در ہمان نقطۂ ج واقع باشد (مانند تصویرے کہ با نقطۂ چین در س ۳۹ رسم شده است) مجدداً در کنار آن خطے می کشیم

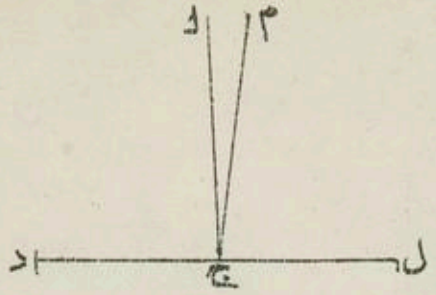


س ۴۰

اگر مانند س ۴۰ این دو نیم خط
بر یک دیگر منطبق شدند گونیا
صحیح است زیرا کہ دو زاویۂ
مجاوره مساوی ہستند۔ و
اگر مانند س ۴۱ دو نیم خط از
یک دیگر متمائز باشند گونیا

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 38 of 326

غلط است.



س ۴۱

۴۱- تبصره - اگر گونیا صحیح باشد مسئله ذیل را حل کرده ایم:

از نقطهٔ واقعهٔ بر خطی نیم خطی بران عمود کرده ایم:

۴۲- اندازه زوایا - در این جا نیز همان طور که قطعه خط را اندازه گرفته ایم عمل مے کنیم - یعنی آن را با زاویهٔ که برائے واحد زاویه انتخاب کرده ایم می سنجیم.

چون سابقاً اجزاء زاویه را فهمیدیم پس می توانیم فرض کنیم که یک زاویهٔ قائمه به ۹۰ قسمت مساوی تقسیم شده آن قسمت ها دو بدو باهم مجاور هستند اگرچه نمی توانیم عملاً چنین شکلی را رسم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 39 of 326

کنیم ولی وجود آن برای ما معلوم است این قسمت راکه $\frac{1}{90}$ زاویه است یک درجه مینامیم پس مے گویم :

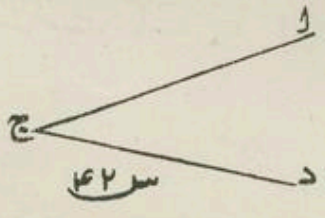
درجهٔ عبارت است از یک نودم زاویهٔ قائمه

پس ازین استعمال آلتی را خواهیم آموخت که بتوسط آن درجات زوایا را می توانیم اندازه بگیریم همان طور که با متر طول قطعه خط ها را اندازه می گرفتیم .

۴۳ - زاویهٔ حاده - زاویهٔ منفرجه - زاویهٔ حاده زاویهٔ است که از زاویهٔ قائمه کوچکتر باشد .

مثلاً در س ۴۲ زاویه

ا ج د حاده است .



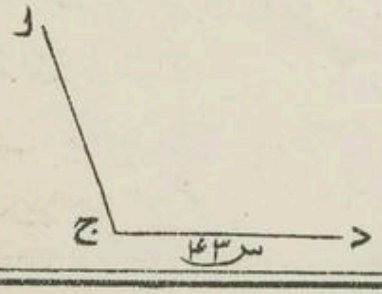
س ۴۲

زاویهٔ منفرجه آنست

که از زاویهٔ قائمه بزرگتر باشد

مثلاً در س ۴۳ زاویهٔ ا ج د

منفرجه است .

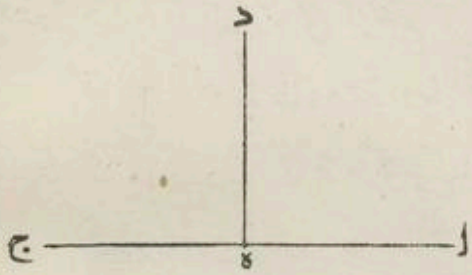


س ۴۳

۴۴ - زاویهٔ ۱۸۰ درجه -

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 40 of 326

همان طور که در ع۳۵ معمول داشتیم اگر ۱۸۰ زاویه را که هر یک مساوی یک درجه باشند بجاورت یک دیگر قرار دهیم ۹۰ زاویه اوّل یک قائمه تشکیل میدهند و ۹۰ زاویهٔ ثانی هم یک قائمه می باشند شکلی که حاصل می شود عیناً مثل آن می ماند که دو زاویهٔ قائمه مجاوره رسم کرده هر یک را به ۹۰ درجه قسمت کرده باشیم س۴۴ آن دو زاویهٔ قائمه را بدون تقسیمات جزنشان میدهند بنا بر ع۳۷ میدانیم که ه ج و ه ا بر استقامت یک خط می باشند.



س۴۶

شکلی که از ه ا و ه ج تشکیل می شود یک زاویهٔ تشکیل میدهند زیرا که آن دو نیم خط از یک مبدء مشترک شروع شده اند فقط خاصیّت این زاویهٔ آن ست که اضلاع آن در امتداد یک دیگر می باشند و دیدیم که آن زاویهٔ مجموع ۱۸۰ زاویه یک درجه است پس می گوئیم:

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 41 of 326

دو نیم خط که دارای مبدء مشترک و در امتداد یکدیگر باشند یک زاویهٔ ۱۸۰ درجه تشکیل میدهند.

۴۵- زوایای مکمّله - دو زاویه را مکمله میگویند در صورتیکه مجموع آنها ۱۸۰ درجه باشد.

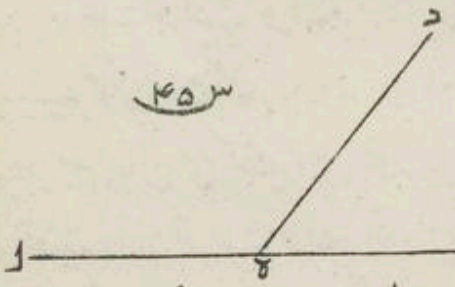
مثلاً دو زاویهٔ قائمه مکمّل یک دیگرند.

ساختن دو زاویه مکمّله خیلی آسان است مثلاً (س ۴۵) دو زاویهٔ مجاوره د ه ج و د ه ا که اضلاع خارجی آن ها بر استقامت یک خط رسم می کنیم واضح است که مجموع آنها ۱۸۰ درجه است و مکمل یک دیگرند

پس می توانیم بگوئیم:

هرگاه اضلاع خارجی دو زاویهٔ مجاوره بر استقامت یک خط باشند آن دو زاویهٔ مکمّل یک دیگرانند.

س ۴۵



۴۶- مسئله - معلوم کنید که دو زاویهٔ مفروضه مکمّل یکدیگرند یا نه.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 42 of 326

معلوم کردن این مسئله خیلی آسان است زیراکه آن دو زاویه راکه در مجاورت یک دیگر قرار میدهیم اگر مکمّل هم باشند مجموع آنها ۱۸۰ درجه است و آن وقت (ع۴۴) اضلاع خارجی آنها بر استقامت یک خطند و اگر مکمل هم نباشند اضلاع خارجی آنها بر استقامت یک خط نخواهند بود ازین روی مے توان گفت :

هرگاه دو زاویهٔ مجاوره مکمل یکدیگر باشند اضلاع خارجی آنها بر استقامت یك خطند .

۴۷ - تعریف و قضیّه - در اینجا در بیان دو مطلب فوق قدرے تامّل مے کنیم زیراکه آن ها مطالب جدیدی راکه کشف کرده ایم بیان می کنند این طور بیانات را قضیّه می گویند ولے باید قضیّه را از تعریف مجزی نمود زیراکه تعریف بماشئے جدیدے رامی شناساند (ع۳۰ تعریف زاویه) درصورتے که قضیّه را نتیجه است که از امتحان دقیق شکل معینی بدست می آوریم و این امتحان خاصیّت جدیدے از آن شکل را بر ما معلوم مینماید.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 43 of 326

۴۸- فرض و مستنبط - حال برمیگردیم به قضیهٔ ع۴۵ در آنجا زوایاے مجاوره را تحصیل می نمائیم ولی آن ها زوایای غیر معین نیستند زیرا که اضلاع خارجی آن ها بر استقامت یک خطند این مسئله را فرض می نامیم - همین که این فرض را کردیم از آن استنباط می نمائیم که آنها مکمّل یک دیگرند پس مے توان نتیجهٔ ع۴۵ را چنین بنویسیم -

قضیّه - گفتگوے ما بر سر زوایای مجاوره است.

فرض: اضلاع خارجی آنها بر استقامت یک خطند.

مستنبط - آنها مکمل یک دیگرند.

بهمین طریق نتیجه ع۴۶ این طور نوشته می شود.

قضیّه - گفتگوے ما بر سر زوایای مجاوره است.

فرض - آنها مکمل یک دیگرند.

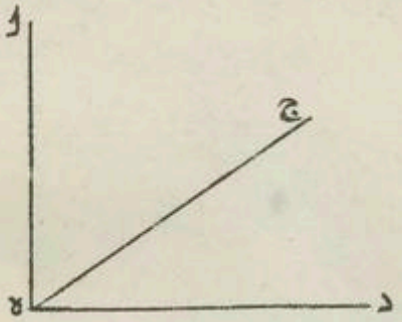
مستنبط - اضلاع خارجی آنها بر استقامت یک خطند.

۴۹- قضایای معکوسه - از دو مثال فوق بر ما معلوم می شود که آن دو قضیّه روابط زیادی باهم دارند زیرا که فرض یکی

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 44 of 326

مستنبط دیگری و مستنبط یکے فرض دیگری است در این وقت
مے گوئیم کہ این دو قضیہ عکس یک دیگرند۔

۵۰۔ زوایای متمم۔ دو زاویہ را متمم یکدیگر
میگویند در صورتیکہ مجموع انہا ۹۰ درجہ
باشد۔

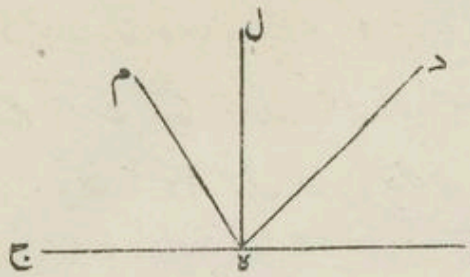


س ۴۶

س ۴۶ نمایش میدہد
یک زاویۂ قائمہ ا ہ د را کہ
مجموع دو زاویہ حادہ ا ہ ج
و ج ہ د است این دو زاویہ
اخیر متمم یک دیگراند۔

۵۱۔ مجموع چندین زاویہ کہ پے در پے با ہم
مجاورند و اخرین دو ضلع انہا در استقامت یک
خط مستقیمند۔ نقطۂ مانند ہ بر روے خط ا ج اختیار
کردہ (س ۴۷) نیم خطہاے ہ د و ہ ل و ہ م را تماماً در یک
طرف خط ا ج رسم مے کنیم از ترسیم آنہا چہار زاویۂ م ہ ج و

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 45 of 326



س ۴۷

ل ه م و د ه ل و ا ه د
بدست می آید که متواتراً
بک یک دیگر مجاورند و
مجموع شان زاویهٔ مخصوص
ج ه ا یا ۱۸۰ درجه است

واضح است که مجموع آنها تغییر نمیکند هر قدر عدهٔ نیم خط ها را زیاد یا کم کنیم پس ازین رو قضیّه ذیل حاصل می شود:

قضیّه مجموع زوایائیکه دو بدو با هم مجاورند وآخرین دو ضلع آنها بر استقامت یك خط است مساوی است با دو زاویهٔ قائمه:

۵۲- حال یک نیم خط ا ه را ملاحظه مے کنیم (س ۴۸) و فرض مے کنیم که ۱۸۰ زاویهٔ مجاوره با یک دیگر از رأس ا رسم شده باشد که ضلع اول آنها ه ا باشد می دانیم که آخرین ضلع آنها ه د در امتداد ا ه واقع خواهد شد حال اگر باز هم از نیم خط

س ۴۸

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 46 of 326

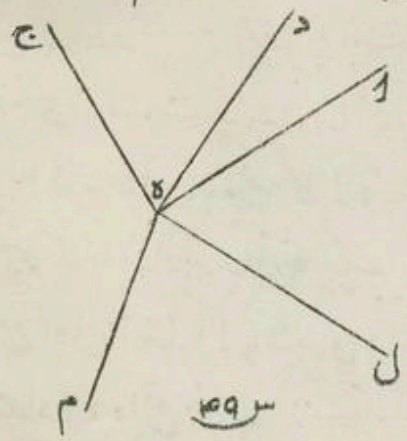
ه د تجاوز کرده ۱۸۰ زاویه یک درجهٔ از ه د به بعد پهلوی هم رسم کنیم آخرین ضلع آخرین زاویه در امتداد ه د یعنی ه ا خواهد بود.

پس به نتیجهٔ ذیل می رسیم:

۳۶۰ زوایهٔ یك درجه که متواتراً با یکدیگر مجاور باشند تمام سطح را می پوشانند.

۵۳ - مجموع زوایائیکه متواتراً با یکدیگر مجاورند و تمام سطح را می پوشانند.

چندین نیم خط (مثلاً پنج نیم خط) فرض می کنیم که دارای مبدء مشترکی باشند (س ۴۹)



س ۴۹

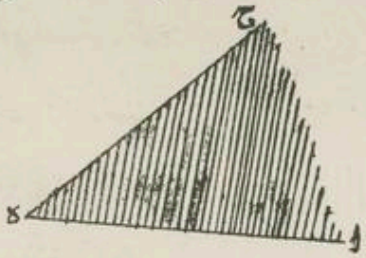
پس بترتیب پنج زاویهٔ ا ه د و د ه ج و ج ه م و م ه ل و ل ه ا را خواهیم داشت که تمام سطح را می پوشانند. پس مجموع آنها چهار زاویهٔ قائمه یعنی ۳۶۰ درجه است این حاصل

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 47 of 326

جمع تغییر نمے کند ہرگاہ عدّہ زوایا را تغییر دہیم یعنی زیاد یا کم کنیم پس این مطلب را چنین بیان مے کنیم:

قضیّہ۔ مجموع زوایائیکہ پی در پی با یکدیگر مجاورند و تمام سطح را می پوشانند مساوی است با چہار قائمہ۔

۵۴۔ زوایای محدب۔ زوایای مقعّر۔ دو زاویہ مساوی باہم مثلاً ۴۵ درجہ رسم مے کنیم (س ۵۰ و س ۵۱) و مانند شکل ہا شور مے زنیم در س ۵۰ در قسمت ہا ژزدہ مے توان ۴۵ زاویۂ یک درجہ پے در پے مجاور قرار داد کہ آخرین اضلاع آنہا ج ہ و ج ا باشند



س ۵۰

و در قسمت ہا شور زدہ س ۵۱ مے توان از ا ہ شروع کردہ

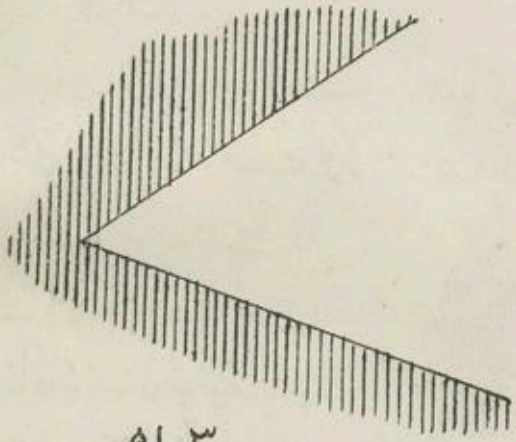
۳۶۰ − ۴۵ = ۳۱۵

زاویۂ یک درجۂ پے در پئے مجاور قرار داد کہ آخرین ضلع آن

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 48 of 326

ه ج باشد.

حال اگر ها شورها را برداریم می بینیم که هر دوی این زوایا دارای یک شکلند و معلوم نیست که زاویهٔ ما ۴۵ یا ۳۱۵ درجه است تا حال باین اشکال برنخورده بودیم برای رفع آن چنین میگوئیم:



س ۵۱

زاویهٔ محدب آنست که از ۱۸۰ درجه کوچک تر باشد

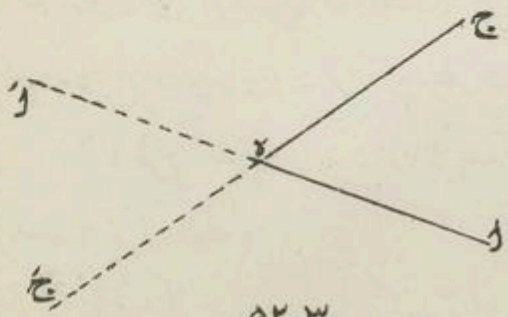
زاویهٔ مقعر آنست که از ۱۸۰ درجه بزرگتر باشد من بعد هر جا که مطلقاً زاویه بگوئیم مقصود همان زاویه محدّب است مگر آنکه کلمهٔ مقعر را ذکر کنیم.

۵۵ - مسئله - مکمّل زاویهٔ مفروضی را رسم کنید

در این جا قضیهٔ ۴۵ حل این مسئله را برای ما مے نماید اگر (س ۵۲)

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 49 of 326

ا ہ ج زاویۂ مفروضہ باشد ضلع ا ہ را از آن طرف رأس امتداد مے دہیم تا ہ اَ (الف یک) بدست بیاید از امتداد آن زاویۂ ا ہ ج بدست می آید کہ مکمل زاویۂ ج ہ ا است (۴۵) بدین ترتیب جواب ج ہ اَ بدست آمدہ کہ در آن یک نقطہ علامت مے گزاریم بجاے آنکہ ا ہ را امتداد



س ۵۲

دہیم مے توانیم ہ ج را امتداد دہیم کہ ہ جَ بدست بیاید — و ازان زاویۂ ا ہ جَ نتیجہ مے شود کہ متمم زاویۂ ا ہ ج است و آن را ہم بواسطہ یک نقطہ علامت مے گذاریم این دو زاویہ کہ یافتہ ایم باہم مساوی اند زیرا واضح است کہ فقط یک زاویہ مے توان یافت کہ چون بر زاویۂ ا ہ ج افزودہ شود ۱۸۰ درجہ گردد۔ این دو زاویۂ وضع مخصوصی بیکدیگر دارند یعنی اضلاع شان در امتداد یک دیگرند این چنین زوایا را متقابل براس

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 50 of 326

مے گوئیم .

از آنچہ مذکور شد چنین معلوم مے شود :

۵۶ - تعریف - دو زاویۂ را در صورتی متقابل برأس می گویند کہ اضلاع یکی از امتداد دادن اضلاع دیگری در آن طرف راس حاصل شود .

۵۷ - قضیّہ - دو زاویۂ متقابل براس باھم مساوی اند .

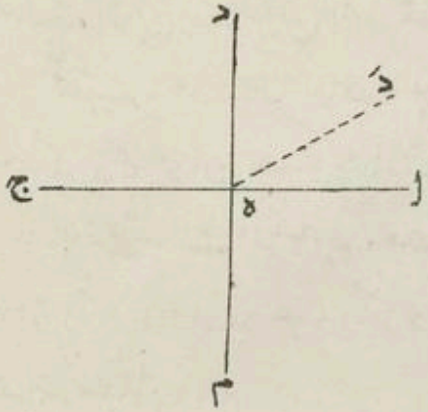
زیرا کہ ہر دو مکمل یک زاویہ اند (ع ۵۴)

۵۸ - تبصرہ - در ع ۵۵ مسئلۂ داشتیم کہ جوابش فوراً بنظر ما آمد فقط دلیلے نبود کہ ضلعے را بر دیگری ترجیح دادہ آن را امتداد دہیم در وقتیکہ ہر دو را امتداد دادہ نتائج آنہا را مقایسہ کردیم قضیہ را کشف کردیم کہ سابقاً بنظر مان نمی آمد .

این قاعدہ غالباً در ہندسہ نتائج خوب دارد زیرا وقتیکہ شکلے را بتوان بچندین طریقہ ترسیم نمود غالباً ترسیم تمام آنہا و مقایسۂ نتائج حاصلہ برائے ما فائدہ خواہد داشت .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 51 of 326

۵۹- خط عمود- خطی مانند ا ج (۵۳) رسم مے کنیم و باگونیا (مطابق عـ۴۰ و عـ۴۱) نیم خط ہ د را بران عمود مے کنیم واضح است کہ اگر از ہمین طرف ا ج نیم خط دیگری غیر از ہ د مانند ہ دَ رسم کنیم دو زاویۂ دَ ہ ا و دَ ہ ج باہم مساوی نیستند و نیم خط ہ دَ عمود بر ا ج نیست ازین مسئلہ معلوم مے شود کہ:



س ۵۳

از نقطۂ واقعہ برخطی در یکطرف آن بیش از یک نیم خط نمیتوان رسم کرد کہ بران عمود باشد۔

ازاینکہ گفتیم دریک طرف خط مقصود ما معلوم است. زیراکہ ممکن است باگونیا درطرف دیگر ا ج نیم خط ہ م را ہم بران عمود رسم نمود.

دوزاویۂ د ہ ج و ج ہ م قائمہ و باہم مجاورند پس ہ د و

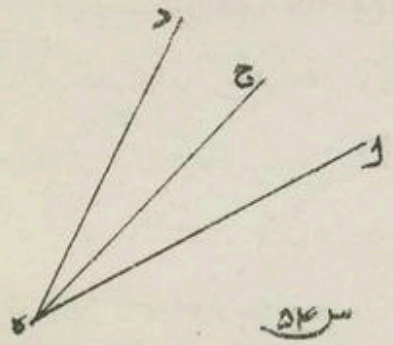
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 52 of 326

ه م بر استقامت یک خط اند دو خط ا ج و د م را بر یک دیگر عمود مے گویند و چهار زاویۂ کہ تشکیل مے دہند قائمہ می باشند ازین رو چنین استنباط مے کنیم :

قضیہ - از نقطۂ واقعہ برخط نقط یك خط میتوان رسم کرد کہ بران عمود باشد .

۶۰ - منصف الزّوایہ - منصّف الزّاویہ خطی است کہ از رأس زاویہ عبور کردہ و آن را بدو زاویہ مساوی تقسیم مینماید .

بعد ہا ساختن منصف الزاویہ خواہیم آموخت ولی عجالۃً آن را بہ نظر رسم مے کنیم مثلاً در س ۵۴ بہ نظر می آید کہ ج ه منصّف زاویہ ا ه د است زیرا کہ دو زاویۂ د ه ج و ج ه ا بہ نظر مساوی می آیند .



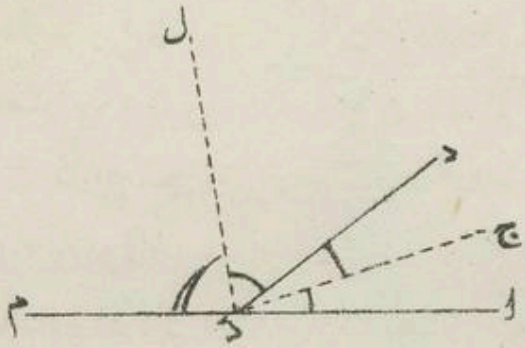
س ۵۴

۶۱ - مسئلہ - می خواهیم خواص دو منصّف د و

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 53 of 326

زاویه مجاوره مکمله را معلوم کنیم.

س۵۵ دو زاویه ا ه د و د ه م و دو منصف آن ها یعنی ه ج و ه ل را نشان میدهد.



س۵۵

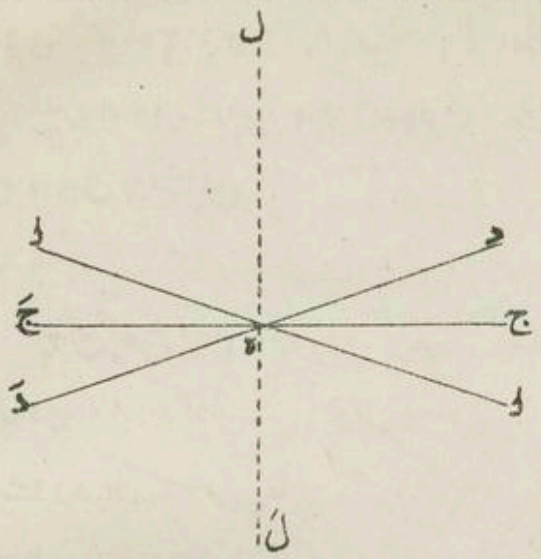
چون مجموع این دو زاویه ۱۸۰ درجه است (۴۵) پس مجموع دو نصف آنها ۹۰ درجه خواهد بود.

ج ه د نصف زاویهٔ ا ه د است و د ه ل نصف د ه م مجموع آنها زاویهٔ ج ه ل می باشد که قائمه است. پس می گوئیم:

دو منصف الزاویه دو زاویهٔ مجاوره مکمله برهم عمود میباشند.

۶۲- مسئله - میخواهیم خواص دو زاویهٔ متقابل

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 54 of 326



س ۵۶

برأس را معلوم کنیم.

س ۵۶ دو زاویهٔ متقابل برأس ل ه د و ل ه د را با دو منصف آنها ه ج و ه ج نشان میدهد مکمل این دو زاویه یک زاویهٔ د ه ل است منصف این زاویه یعنی ه ل را رسم می کنیم مطابق نتیجه ۶۱ میدانیم که ه ج و ه ل بر یک دیگر عمودند و همچنین ه ل و ه ج برهم عمود می باشند ازینجا نتیجه مے گیریم که چون ه ج و ه ج هر دو بر ه ل عمودند پس بر استقامت یک خطند.

دو منصف دو زاویه متقابل براس در امتداد یکدیگرند.

۶۳ - منصف زوایائیکه از تقاطع دو خط حاصل میشود

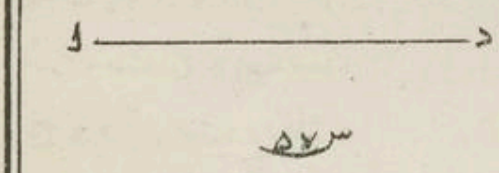
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 55 of 326

اگر در س۵۶ ه ل منصف زاویهٔ ا ه د را رسم کنیم به همان طریق میتوانیم بفهمیم که آن در امتداد ه ل است.

تمام بیانات فوق را در قضیهٔ ذیل جمع مے کنیم.

قضیه - چهار منصف زوایائی که از تقاطع دو خط مستقیم حاصل می شوند دو خط عمود بر یکدیگر اند.

۶۴ - مسئله - از نقطهٔ مفروضهٔ می خواهیم خطی بر خط مفروضی عمود کنیم.

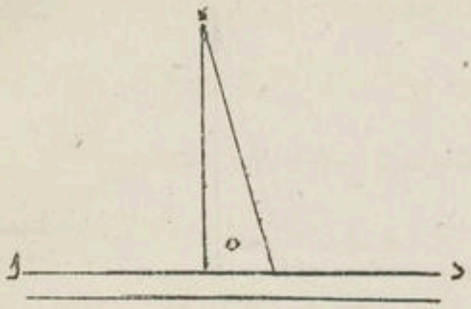


در وقتیکه نقطهٔ مفروضه روی خط بود مسئله را حل کرده ایم (ع۴۱) حال بطور عموم مجدداً آن را حل مے کنیم.

س۵۷ مفروضات مسئله یعنی نقطهٔ ه و خط ا د را نشان می دهد ستاره خود را در کنار او قرار مے دهیم (س۵۸) بعد گونیا را بآن تکیه داده بقدرے آن را می لغزانیم که نقطهٔ ه در کنار یکے از اضلاع زاویهٔ قائمه آن واقع شود.

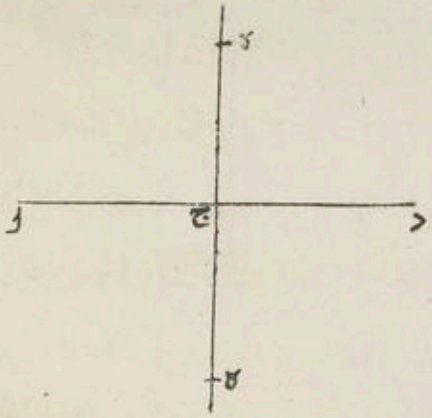
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 56 of 326

ابتداء کنار گونیا خطے رسم کردہ بعد آن را در طرف دیگر



س ۵۸

ا د نیز امتداد مے دہیم
آن وقت س ۵۹ بدست
ما می آید کہ دران مسئلہ حل
شدہ است ۔
فرض مے کنیم کہ کاغذ
را در امتداد ا د تا کردہ باشیم
چون چہار زاویۂ حادثہ کہ دارائے رأس مشترک ج ہستند قائمہ



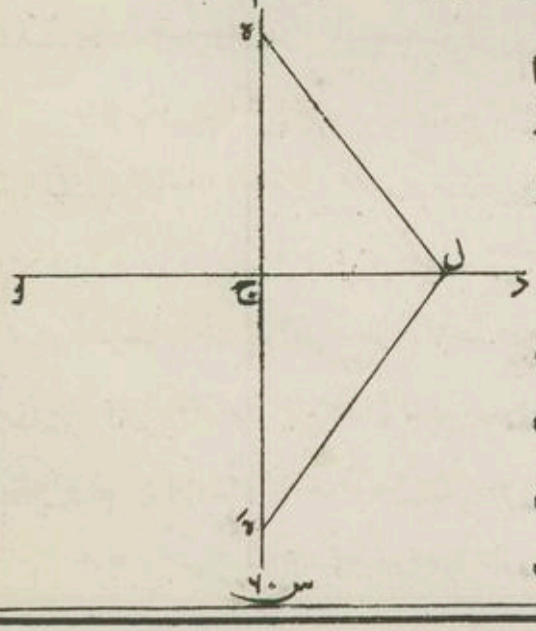
س ۵۹

اند قسمت ج ہ بر روے
ج ہ' واقع شدہ نقطۂ ہ
بر روی ہ' واقع می گردد واگر
کاغذ ما نازک و شفاف باشد
از پشت کاغذ معلوم میشود
ولی ما خود بصحت آن یقین
داریم ۔

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 57 of 326

۶۵- آنچه گفتیم بما راه دیگری برای حل مسئله بدست می دهد بدینطریق که اول کاغذ را در امتداد ا د تا مے کنیم بعد باسوزنی دو لائے کاغذ را در نقطۂ ہ سوراخ مے کنیم وچون کاغذ را باز کنیم نقطۂ ہ و ہَ در روی کاغذ نشان شده است خطّی که این دو نقطه را بهم وصل نماید عمود مطلوب است .

این قاعده برای ماچندان فائده ندارد زیراکه کاغذ ما را ضائع می کند ولی درعوض ازان مطلبی کشف می کینیم :



۶۶- فرض می کنیم ل نقطه باشد از ا د غیر از ج (س ۶۰) وقتیکه کاغذ را تا کردیم خط ہ ل بر روی خط ہَ ل واقع می شود زیراکه نقطۂ ہ بر روے ہَ واقع شده نقطۂ ل از جای خود حرکت نمیکند

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 58 of 326

دو زاویۂ ہ ل ج و ہ ل ج کہ برہم منطبق می شوند مساوی اند - علاوہ بران باہم مجاورند ولی قائمہ نیستند زیرا کہ اضلاع خارجی آنہا بر استقامت یک خط نیستند .

فقط نقطۂ ج طوری است کہ دو زاویۂ ہ ج ل و ہ ج ل قائمہ ہستند پس معلوم شود کہ از نقطۂ ہ پیش از یک خط عمود بر ل د نمیتوان رسم کرد - پس مے گوئیم :

قضیّہ - از نقطۂ واقعۂ در خارج خطّی بیش از یک خط عمود بران نمیتوان رسم نمود .

۶۷ - ترسیم شکل باگونیا مانند ع۶۴ بیش از یک طریقہ نداشت بنا بر این بر ما معلوم کردہ بود کہ نمی توان بیش از یک عمود رسم کرد بعد ہا خواہیم دید کہ بعضی اسباب ہاے دیگر موجود کہ بوسیلۂ آنہا ہم از نقطۂ واقعۂ در خارج خطی می توان خطی بران عمود نمود از روی امتحانات بعد دانستیم کہ تمام نتائج آنہا یکے خواہد بود از ینجا اختلاف بین تجربہ و تحقیقات علمی معلوم میشود .

۶۸ - تعریف - وقتیکہ دو خط بدون آنکہ عمود باشند

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 59 of 326

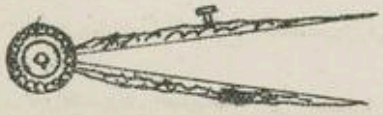
یک دیگر را قطع کنند می گویند نسبت بهم مایل هستند .

فصل سوم

دائره - اندازه زوایا

۶۹ - فاصلهٔ دو نقطه - فاصلهٔ دو نقطه عبارت است از قطعه خطی که آن دو نقطه را بیکدیگر وصل مے نماید.

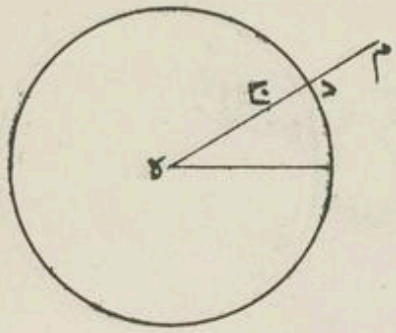
۷۰ - پرکار - پرکار یکی از آلات ترسیمات هندسی است (س ۶۱) که دارای دو شاخه است یکے از آنها منتهی بیک سوزن نوک تیزی است و دیگرے دارای یک نوک تیز دیگر بامداد یا خط کشی است بواسطهٔ باز کردن یا بستن پرکار می توان فاصلهٔ بین دو نوک آن را زیاد یا کم نمود .



س ۶۱

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 60 of 326

۷۱- دائره - پرکاری برداشته بیک شاخه آن مدادی نصب میکنیم بعد نوک سوزن آن را در نقطهٔ مانند ه (س۶۲) و سر مداد را روی کاغذ قرار می دهیم آن گاه آنرا بدور خود می چرخانیم آنوقت خطی بدست ما می آید که نه



س۶۲

مستقیم است و نه از قطعات مستقیمه تشکیل یافته و آن را خط منحنی مینامیم و این خط منحنی مخصوص را یک دائره میگوئیم در وقت ترسیم آن همواره فاصلهٔ بین نوک سوزن و نوک مداد ثابت بوده تغییر نکرده است پس تمام نقاط آن از نقطه ه بیک فاصله است و نقطهٔ ه را مرکز دائره می گوئیم پس می توانیم تعریف ذیل را قرار دهیم :

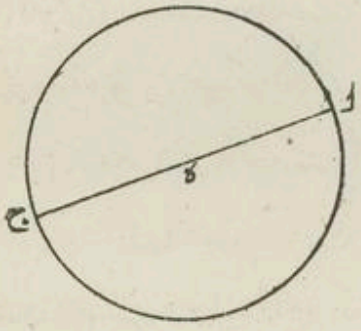
دائره خط منحنی مسدودی است که تمام نقاط آن بیک فاصله است از نقطه ثابتی موسوم بمرکز.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 61 of 326

۷۲- شعاع - شعاع دائره قطعه خطی است که مرکز را بیکی از نقاط محیط وصل نماید مثلاً در س ۶۲ ه ا یک شعاع دائره است از روی تعریف دائره مے گوئیم :

تمام آشعه یك دائره با هم مساوی هستند .

۷۳ - قطر - قطر دائره قطعه خطی است که از مرکز عبور کرده واز طرفین به محیط دائره محدود شده است مثلاً در س ۶۳ ا ج یک قطر است واضح است که :



س ۶۳

اوّلاً هر قطر دو برابر شعاع است .

ثانیاً تمام قطر های یك دائره با هم مساویند .

۷۴- تعیین یک دائره - برای تعیین یک دائره لازم است که مرکز و شعاع آن در دست باشد و ممکن است مرکز و یک نقطهٔ از آن نیز در دست باشد زیرا که فاصلهٔ بین

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 62 of 326

مرکز و آن نقطهٔ شعاع دائره است.

دائره را بحرف مرکز آن می خوانیم مثلاً در س ۶۳ میگوئیم دائره ه.

۷۵- داخل و خارج یک دائره - س ۶۲ بخوبی مطالب ذیل را نمایش میدهد

اولاً اگر نقطه مانند ج در داخل دائرهٔ باشد فاصله اش تا مرکز کوچکتر است از شعاع دائره.

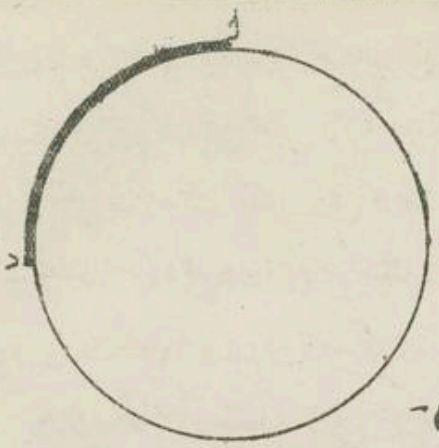
بنابراین ج ه کوچک تر است از د ه.

ثانیاً اگر نقطهٔ مانند (م) در خارج دائره واقع باشد فاصله اش تا مرکز بزرگتر است از شعاع دائره -

بنابراین م ه بزرگتر است از د ه.

۷۶- قوس دائره - قسمتی از دائره را که بین دو نقطه واقع شده باشد یک قوس می نامند بنابراین قوس در دائره همان معنی را دارد که قطعه خط در خطِ مستقیم در س ۶۴ قوس

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 63 of 326



س ۶۴

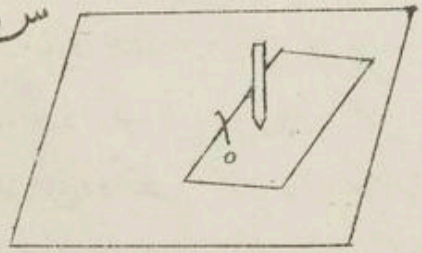
اد را بخط درشت تر نموده ایم قطعهٔ دیگر که بهمان خط نازک باقی مانده است قوس دیگری از همان دائره است.

۷۷ - حرکت دورانی -

فرض می کنیم ارّابهٔ را برگردانده باشیم بقسمے که چرخ هاے آن درهوا باشند اگر چرخ هاے آنرا بگردانیم حرکت آن را حرکت دورانی می نامند حال آن را بطور تفصیل امتحان می کنیم،

یک ورقه مقوا برداشته آن را روی یک صفحه کاغذ گذاشته هر دو را در روے تختهٔ رسم باسنجاق در نقطه ه س ۶۵ ثابت می کنیم.

س ۶۵

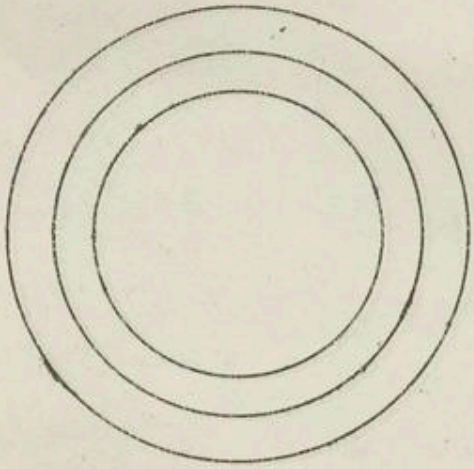


حال می توانیم قطعهٔ

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 64 of 326

مقوا را بدور سنجاق بگردانیم بدون آنکه کاغذ حرکت کند و نیز می دانیم که این عمل را ممکن است هر قدر بخواهیم امتداد دهیم به قسمی که همیشه مقوا روی کاغذ باشد (ع۲۶) مانند چرخ ارّابه قطعه مقوا هم دارای حرکت دورانی است فقط می گوئیم که بدور نقطهٔ دوران میکند.

۷۸- خاصیّت اصلی حرکت دورانی - حال فرض می کنیم قبل از گذاشتن مقوا بر روی آن در نقطهٔ ا سوراخی کرده ایم به قسمی که نوک یک مداد بتوان دران داخل کرد (س۶۵) وقتیکه مقوا را بدور نقطهٔ ا می گردانیم. فاصلهٔ بین دو نقطه ا و ا پیوسته



س ۶۶

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 65 of 326

ثابت است و تغییر نمیکند و نوک مداد یک دائره ترسیم مینماید که مرکزش در نقطه ه و شعاعش ه ا است بدین طریق یک پرکار خیلے سادهٔ ساخته ایم .

هر نقطهٔ دیگر از مقوا را بگیریم آنهم یک دائره ترسیم مینماید .

چون قطعه مقوا سطح متحرکی است که بدور نقطهٔ ه میگردد پس ازین رو بخاصیت اصلی حرکت دورانی می رسیم و آن ازین قرار است :

در حرکت دورانی بدور یک نقطه ثابت تمام نقاط سطح متحرک دوائری ترسیم می نمایند که مرکز شان آن نقطهٔ ثابت است .

۷۹ - **مرکز دوران** - نقطهٔ ثابت ه را که سطح ما بدور آن گشته و نیز مرکز تمام دوائر مرسومه است مرکز دوران می نامند .

۸۰ - **تعریف** - دوائرے که دارائے یک مرکز باشند آنهارا متحد المرکز می نامند در س ۶۶ سه دائره متحد المرکز

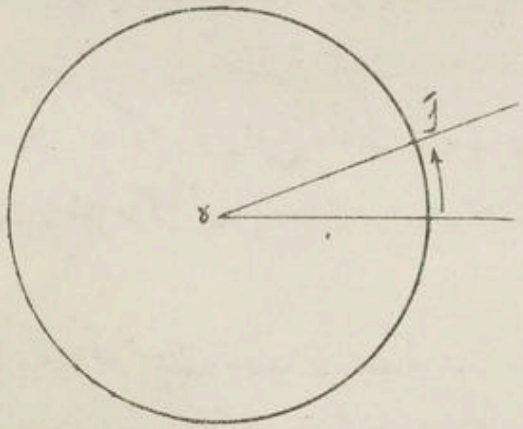
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 66 of 326

دیده می شود .

۸۱ - تغییر محل دورانی - فرض می کنیم در س ٦٥ مجدداً قدری قطعهٔ مقوا را حرکت داده بعد متوقف شویم معلوم است که قدرے آن را از محل خود تغییر داده ایم چون این تغییر محل از دوران حاصل شده آن را تغییر محل دورانی مینمائیم .

هر تغییر محل دورانی دارای دو حالت اصلی و انتهائی است.

۸۲ - تعریف تغییر محل دورانی بوسیلهٔ یک زاویه و یک جهته - مجدداً قطعه مقوای سابق الذکر را که در نقطهٔ ه ثابت و در نقطه ا سوراخ شده بود بر می داریم اگر در نقطه ا هم مانند نقطه ه سنجاقی بزمین بکوبیم واضح است که قطعهٔ مقوا حرکت



س ٦٧

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 67 of 326

نمی کند پس هرگاه نقطه ا هم ثابت شود مقوا بے حرکت میشود
درصورتے که در حرکت دورانی نقطه ا دائره رسم مے کند که مرکزش
ه وشعاعش ه ا است آن تغییر محل دورانی بدور نقطه ه
نقطه ا را از محل خود بمحل ا آورده است و نیم خط ه ا مانند
عقربهٔ ساعت گردش میکند و آن ممکن است درهمان جهت
عقربهٔ ساعت یا برعکس آن حرکت نماید.

بنابرین تغییر محل دورانی بدو شئ ذیل کاملاً
مشخص می شود.

اولاً بواسطهٔ تعیین جهت دوران.

ثانیاً بواسطهٔ اندازهٔ زاویه ا ه ا

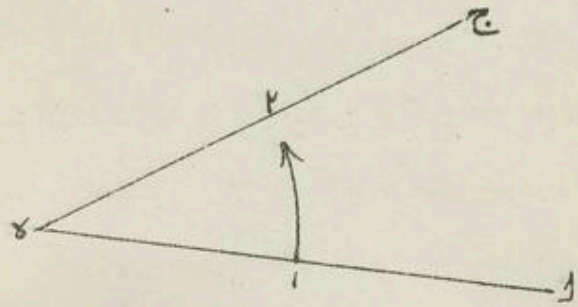
مثلاً می گوئیم قطعه مقوا بقدر ۳۰ درجه بدور نقطه ه درجهت
مخالف عقربه هاے ساعت حرکت کرده است.

۸۳- جهت زاویه- فرض می کنیم زاویهٔ مانند ج ه ا
کوچکتر از ۱۸۰ درجه در دست است بر روی یکے از اضلاع
آن ع۱ و در روی دیگری ع۲ میگذاریم (س ۶۸) واضح است

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 68 of 326

که دریک دوران بقدر زاویهٔ ج ه ا ضلع ع۱ ه ا بروی ضلع ع۲ ه ج خواهد افتاد و دوران هم درجهت مخالف حرکت عقربه های ساعت بوده است.

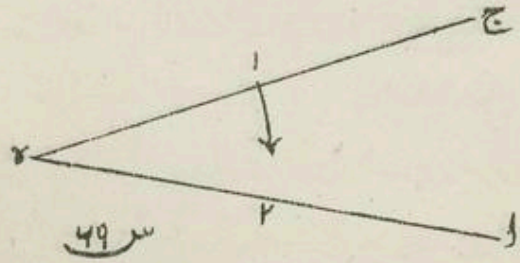
حال میگوئیم زاویه ا ه ج دارای جهت مخالف عقربکهای ساعت است



س ۶۸

و درین جا ابتدا حرف ا که متعلق به ضلع ع۱ است می نویسیم.
حال اگر در همان زاویه نمره ها را تغییر دهیم (س ۶۹) می بینیم که زاویه دارای جهت عقربکهای ساعت است.

از آنچه دیدیم معلوم شد زاویهٔ که در روی صفحهٔ کاغذ رسم شده



س ۶۹

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 69 of 326

جهت معیّنے ندارد زیرا به آن می توانیم بمیل خود هر دو جهت ممکنه را بدهیم.

ولی هر وقت بروی انها نمره بگذاریم جهت شان معلوم می شود.

۸۴ - معاهده عمومی - من بعد هر وقت زاویهٔ لوه ج بگوئیم مقصود مان آنست که اوّلین ضلع آن لوه است که ابتدا بیان شده ازین رو جهت هر زاویه بخوبی معلوم است.

۸۵ - لغزش یک دائره بدور خود - واضح است که دو دائره متحد المرکز که دارای شعاعهاے مساوی باشند بر روی یک دیگر واقع مے شوند.

حال در روی قطعه مقوا و قطعهٔ کاغذی دو دائره بشعاع واحد رسم مے کنیم اگر مانند س۶۵ دو مرکز آن ها را در یک نقطه سنجاق کنیم و آن وقت مقوا را بدور مرکز دائره دوران دهیم واضح است که در تمام مدت دوران تمام نقاط آن دو دائره همواره

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 70 of 326

بر روی هم واقع می شوند پس می توانیم بگوئیم (از روی ع۱۱ و ع۱۲ و ع۲۶) .

قضیه - هر دائره در حرکت دورانی بدور مرکز بر روی خود می لغزد.

۸۶- تبصره راجع بلزوم تدقیق در مسائل هندسی -

بعضی اصلاحات در هندسه باعث اشتباه می شوند و باید در آنها تدقیق نمود.

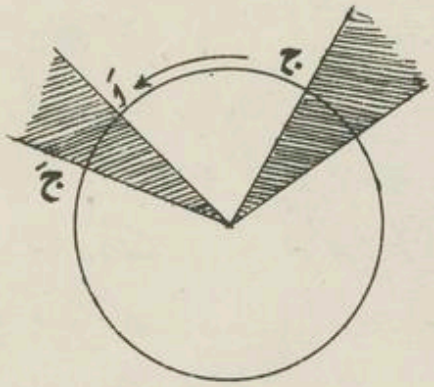
مثلاً در ع۱۱ گفتیم یک خط می تواند بروی خود بلغزد و در اینجا می گوئیم ممکن است یک دائره بروی خود بلغزد واضح است که این دو حرکت که بواسطهٔ کلمهٔ لغزش بیان شده با یک دیگر متفاوت اند پس باید اصلاح مبهم لغزش را از بین برد به همین جهت لغزش ع۸۵ را دوران می نامیم.

۸۷- مسئله - در ع۸۲ تغییر محل دورانی را در جهة گردش یك نیم خط که از مرکز عبور کرده باشد دیدیم حال میخواهیم خواص تغییر محل نیم خط دیگر یرا که

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 71 of 326

آنهم از مرکز عبور کرده باشد معلوم کنیم.

فرض می کنیم



س ۷۰

(س ۷۰) ه ا نیم خطی باشد که بواسطهٔ دوران در جهت تیر بمحل ه ا َ رسیده است و نیز فرض می کنیم ه ج نیم خط دیگری باشد که از همان نقطه ه شروع شده است در وقت دوران بمحل ه ج َ آمده و دو زاویهٔ (ا ه ج) و (ا َ ه ج) باهم مساوی و دارای یک جهت اند زیرا که دو وضع مختلف یک زاویه می باشند.

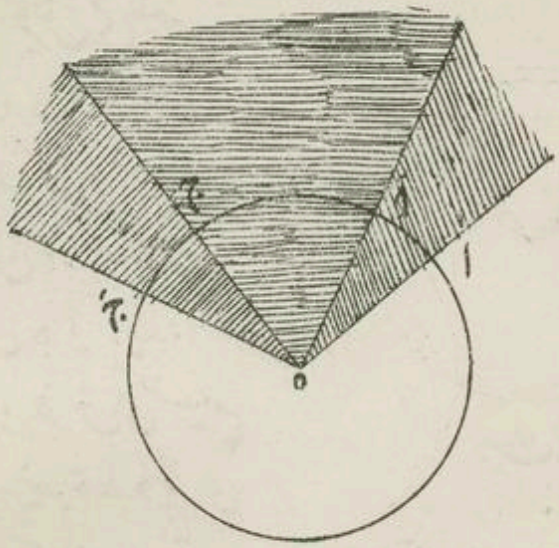
حال اگر بهریک از این دو زاویهٔ مساوی زاویه ج ه ا َ را بیفزائیم دو زاویه ا ه ا َ و ج ه ج بدست می آیند که باهم مساوی و در یک جهت اند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 72 of 326

اگر نیم خط (س۷۱) ا ه اَ در زاویهٔ ا ه ج واقع شده است پیوسته تساوی ذیل برقرار است

$\widehat{\text{ا ه ج}}$ $\widehat{\text{اَ ه جَ}}$

اما این دفعه لازم است که ازین دو زاویه مساوی زاویه اَ ه ج را کم کنیم تا مجدداً



س۷۱

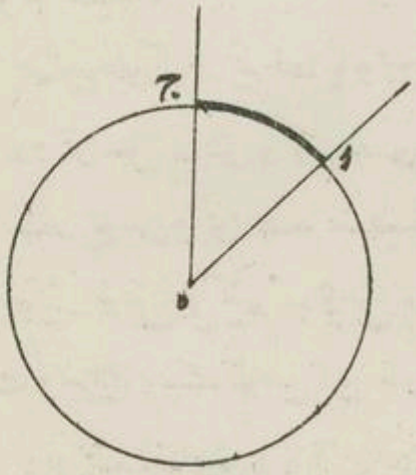
دو زاویه مساوی و در یک جهت ا ه اَ و ج ه جَ بدست بیاید پس قضیهٔ ذیل جواب مقصود ما را میدهد:

قضیه - در یک تغییر محل دورانی بدور یک نقطه تمام نیم خط هائیکه ازان نقطه خارج میشوند بقدر یک زاویه و در یک جهت دوران میکنند. مثلاً هرگاه چرخ اَرابه ۹۰ درجه دوران کند تمام اشعهٔ آن

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 73 of 326

بقدر ۹۰ درجه و در یک جهت دوران می کنند.

۸۸ - زاویه مرکزی - در امتحانات سابقه زوایائی را ملاحظه کردیم که اضلاع آنها اشعه دائره بودند پس مجبوراً راس آنها مرکز دائره است واین گونه زوایا را زوایای مرکزی مینامند



س ۷۲

هر زاویهٔ مرکزی از دائره یک قوس جدا میکند مثلاً در س ۷۲ زاویهٔ مرکزی اهج از دائره قوس اج را جدا میکند و ما آن را بخط درشت نموده ایم.

بالعکس همواره می توانیم بهر قوسی مانند اج یک زاویهٔ مرکزی مانند اهج مقابل کنیم.

۸۹- اوّلاً می خواهیم خواص چندین زاویهٔ

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 74 of 326

مرکزی را که در یک دائره واقع ومقابل به قسمتی مساویه اند معلوم کنیم .

ثانیاً می خواهیم خواص چندین قوس را که در یک دائره واقع و مقابل بزوایای مرکزی مساویند معلوم کنیم .

همان طورکه در نیم خط ها و زوایا گفتیم درین جا نیز میگوئیم :

دو قوس دائره در صورتی مساوی هستند که بتوانند بر روی هم منطبق شوند .

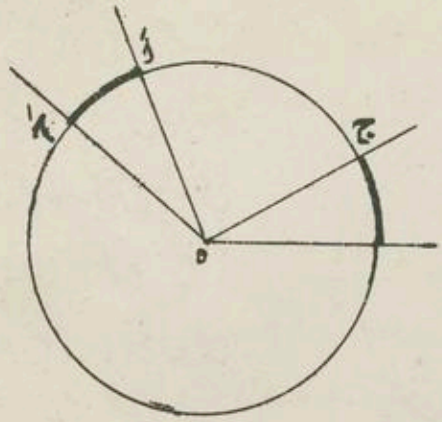
اولاً - فرض می کنیم دو قوس مساوی ا ج و ا َ ج َ در دست است (س۷۳) می توان آن ها را بواسطه دوران در حول نقطهٔ ه و بقدر زاویهٔ ا ه ا َ بر روی هم منطبق نمود

در این حرکت قوس ا ج در روی همان دائره که شامل آن است باقی می ماند .

(س۸۵) وقتیکه ا روی ا َ واقع شود بواسطهٔ تساوی قوسها نقطهٔ ج نیز بر روی ج َ واقع می گردد وقتیکه قوسها

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 75 of 326

بر روی هم واقع شدند البته زوایای مقابل به آن ها هم بر روی هم واقع میگردند پس باهم مساوی اند.



س ۷۳

ثانیاً - اگر ابتدا فرض کنیم که زوایا باهم مساوی اند به همان طریق ممکن است آن ها را بواسطهٔ دوران بدور نقطهٔ ه برهم منطبق نمود پس چون قوس ها هم بر روی هم واقع می شوند مساوی اند.

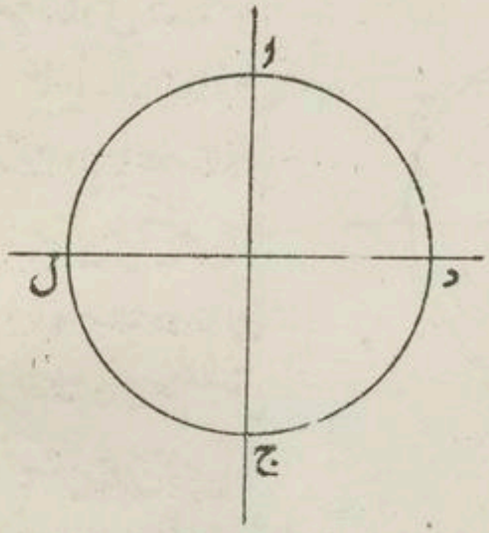
از مطالب فوق قضایای ذیل نتیجه می شوند.

قضیّه - قوس های مساوی از یك دائره زوایای مرکزی مساوی جدا میکنند.

قضیّه - زوایای مرکزی مساوی در یك دائره مقابل به قسّی مساویه اند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 76 of 326

۹۰ - رُبع دائره - دائرهٔ رسم کرده دو قطر ا ج و د ل را بر یک دیگر عمود می کنیم (س ۷۴) حال چهار زاویهٔ مرکزی قائمه و مساوی با یک دیگر داریم پس دائره ما بچهار قوس مساوی (ا د) و (د ج) و (ج ل) و (ل ا) تقسیم می شود هر یک از آن ها را ربع دائره میگوئیم پس می گوئیم:



س ۷۴

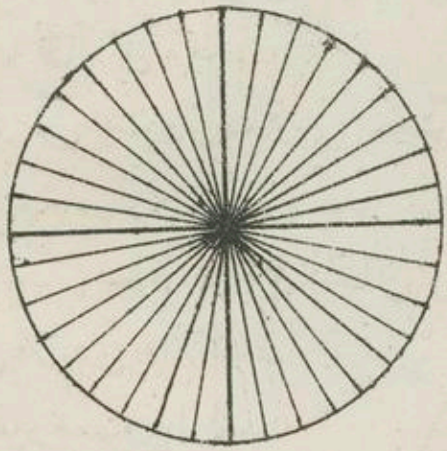
ربع دائره عبارت است از قوسی که بواسطهٔ یک زاویهٔ قائمه مرکزی از دائره جدا شده باشد.

۹۱ - نیم دائره - دو ربع دائره یک نیم دائره میشود این مسئله واضح است که هر قطره دائره را به دو قوس مساوی

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 77 of 326

تقسیم مے کند زیرا کہ ہر کدام ازان دو قوس مساوی دو ربع دائرہ است۔

۹۲- قوس یک درجہ - حال فرض مے کنیم (س۷۵) کہ ہر زاویۂ قائمہ را بہ ۹۰ قسمت مساوی تقسیم کردہ اند در س۷۵ برائے وضوح مسئلہ ہر یک را بہ ۹ قسمت مساوی تقسیم کردہ ایم آن زوایای یک درجہ در روی دائرہ قوسہای مساوی با یکدیگر جدا میکنند پس دائرہ ما بہ ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم مے شود۔



س۷۵

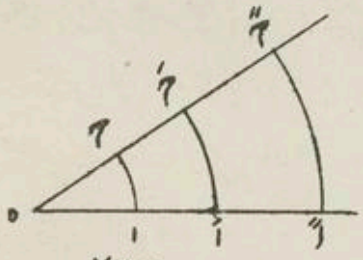
واضح است کہ مثلاً یک زاویۂ مرکزی ۲۵ درجہ قوسی از دائرہ جدا می کند کہ مساوی قوس مقابل بہ ۲۵ زاویہ یک درجۂ

است بالعکس اگر سی قوس کوچک را که هر یک بواسطهٔ یک زاویه مرکزی یک درجه از دائره جدا شده است پهلوی هم قرار دهیم مقابل بیک زاویهٔ مرکزی ۳۰ درجه خواهد بود۔

اگر ما دائرهٔ داشته باشیم که محیط آن به ۳۶۰ قوس مساوی تقسیم شده باشد با آن می توانیم زوایا را اندازه بگیریم و چنین آلت را نقاله می گوئیم۔

قوس یک درجه قوسی است که بواسطهٔ یک زاویهٔ یک درجهٔ مرکزی از دائره جدا شده باشد۔

۹۳ - تبصره - س ۷۶ نشان می دهد که یک زاویهٔ مرکزی در روی دوائر مختلفه قسی غیر مساویه جدا میکند۔



س ۷۶

پس این عبارت (قوس یک درجه) قوسی را معلوم نمیکند مگر آنکه دائره اش معلوم باشد۔

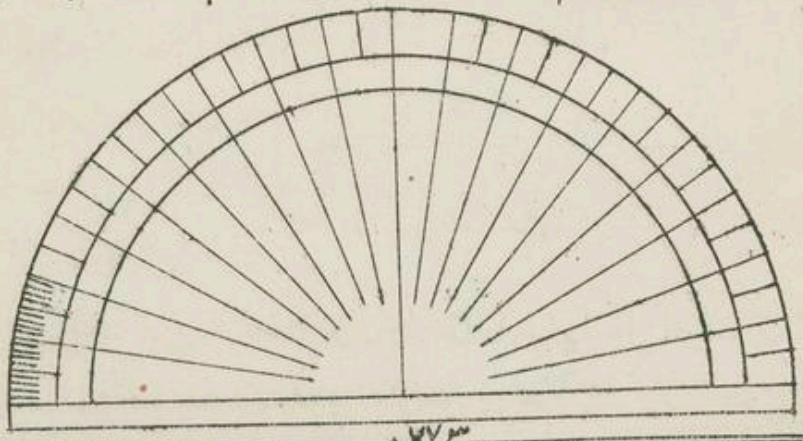
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 79 of 326

بالعکس قطعه خط یک گزی بهیچ وجه تغییر نمی کند در روی هر خطی که آن را بگیریم .

پس عبارت "قوس یك درجه" مختصر جملهٔ ذیل است قوسی که بواسطهٔ یك زاویهٔ مرکزی یك درجهٔ از دائره جدا شده باشد .

۹۴ - نقاله - نقاله نیم دائره است (س۷۸) که محیط آن به ۱۸۰ قوس مساوی تقسیم شده بعدها طریق ساختن آن را خواهیم دانست .

مرکز آن نیم دائره بطور وضوح معلوم است غالباً درجه



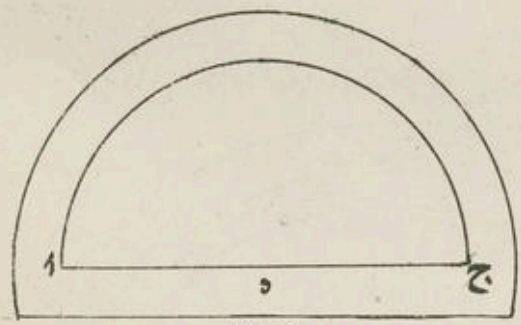
س۷۷

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 80 of 326

های آن از دو طرف است یعنی از ۱۸۰ درجه به صفر و از صفر به ۱۸۰ درجه .

اگر نقاله از مادهٔ شفافی مانند شاخ و سلولوئید ساخته شده باشد مانند س۷۷ است ولی اگر از چوب یا فلز باشد در وسطِ آن سوراخ است و خط ا ج (س۷۸) قطر نیم دائره است . مرکز آن بواسطهٔ بریدگی کوچکی نمایان است .

هر گونه نقاله که در دست باشد همیشه ممکن است مرکز آنها بر روی راس هر زاویهٔ مفروضی منطبق نمود .



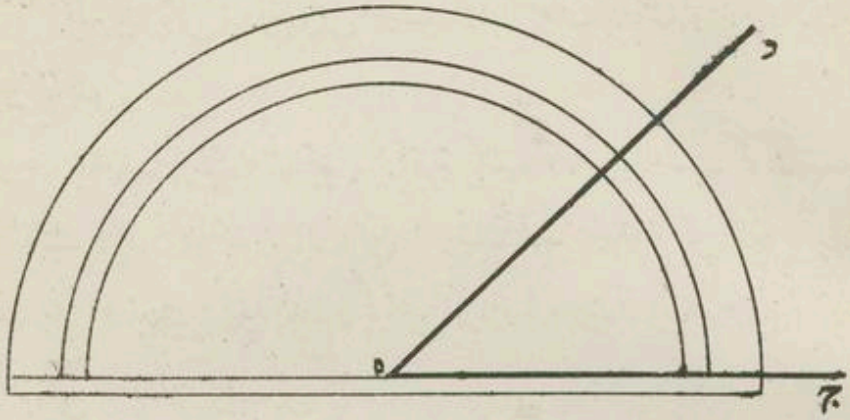
س۷۸

۹۵- اندازه گرفتن یک زاویه بتوسط نقاله -

از آنچه گفته شد اندازه گرفتن هر زاویه توسط نقاله کار نقاله بسیار آسانی است ابتدا اضلاع آنرا در صورت لزوم امتداد می دهیم بقسمی که از شعاع

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 81 of 326

نقاله بزرگتر شوند آن گاه نقاله را روی زاویه قرار مے دہیم.
(س۷۹) بہ قسمی کہ مرکز نقاله درراس زاویہ وقطر آن بہ ضلع ہ ج



س۷۹

منطبق گردد پس زاویۂ مایک زاویۂ مرکزی مے شود و برائے اندازہ گرفتن آن کافی است کہ بہ بینیم ضلع ہ د از پہلوے کدام درجہ گذشتہ است مثلاً در س۷۹ زاویہ د ہ ج مساوی ۴۵ درجہ است.

۹۶ - بالعکس توسط نقاله مے توانیم مسئلہ ذیل را حل کنیم:

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 82 of 326

زاویهٔ رسم کنید که اندازهٔ آن بدرجه معلوم باشد -

طریقهٔ عمل کردن این مسئله را ما بعهدهٔ شاگردان واگذار میکنیم .

۹۷- دقیقه وثانیه - زاویهٔ یک درجه بالنسبه کوچک است واز معائنهٔ نقاله این مسئله بخوبی معلوم می شود اگرچه عجالتهً وسیله برای اندازه گرفتن اجزاء درجه نداریم ولی آنها را بدین قسم تعریف می کنیم :

یك درجه مساوی است به شصت دقیقه

یك دقیقه مساوی است به شصت ثانیه

یک زاویهٔ ۳۷ درجه و ۴۵ دقیقه و ۲۸ ثانیه را اینطور می نویسند :

۳۷° ۴۵′ ۲۸″

۹۸- گراد - علاوه بر درجه واحد دیگری برای اندازه گرفتن زوایا بکار می برند ازین قرار :

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 83 of 326

گراد عبارت است از یك صدم زاویهٔ قائمه

پس معلوم می شود که ۹۰ درجه مساوی ۱۰۰ گراد است

هر گراد به صد سانتی گراد تقسیم می شود. هر سانتی گراد را دقیقه صد قسمتی هم می گویند.

فائده این تقسیم آن است که اجزاے آن به نسبت اعشارے هستند فقط عیب آن این است که بعضی زوایای مهم مانند ۶۰ درجه و ۳۰ درجه بصورت ذیل نمایش داده می شوند:

$$\frac{۲۰۰}{۳} \text{ و } \frac{۱۰۰}{۳}$$

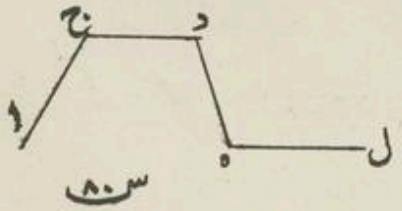
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 84 of 326

فصل چهارم

کثیر الاضلاع - اشکال مساویه - تناظر

۱- کثیر الاضلاعها

۹۹ - خط منکسر - نقاطی مانند ا و ج و د و ه و ل فرض کرده (س۸۰) قطعات خط ا ج و ج د و د ه و ه ل را رسم می نمائیم حال شکلی که حاصل شده است یک خط منکسر است پس

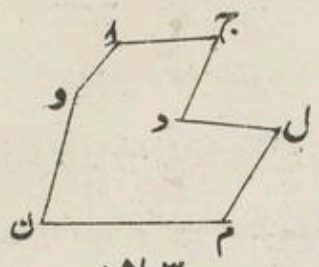


س۸۰

خط منکسر آن است که از اجتماع چندین قطعه خط که نوك به نوك پهلوی هم قرار داده شده اند تشکیل شود.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 85 of 326

۱۰۰ - کثیر الاضلاع - اگر دو انتهاے خط منکسرے بهم وصل شده باشند می گویند که آن خط بسته است و آن را کثیر الاضلاع می نامند. پس کثیر الاضلاع خط منکسر بسته است.



س ۸۱

نقاط (ا) و (ج) و (د) و (ل) و (م) و (ن) و (و) را رؤس کثیر الاضلاع می گویند و قطعه خطهاے (ا ج) و (ج د) و (د ل) وغیره را اضلاع آن می نامند.

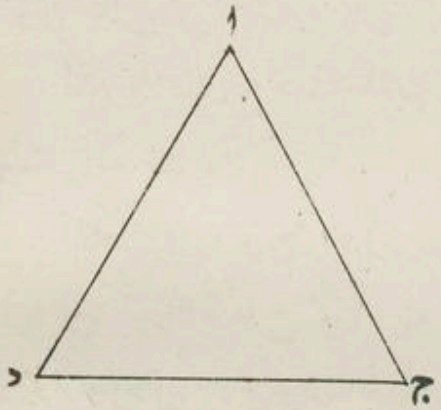
هر کثیر الاضلاع را بواسطهٔ حروف رؤس آن بترتیبے که نوشته شده می خوانند. مثلاً در س ۸۱ می گوئیم کثیر الاضلاع ا ج د ل م ن و.

عدّه رؤس هر کثیر الاضلاع بعدّهٔ اضلاع آن است مثلاً کثیر الاضلاع ا ج د ل م ن و دارای ۷ راس و ۷ ضلع است.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 86 of 326

۱۰۱- محیط - محیط هر کثیر الاضلاع مجموع اضلاع آنست .

۱۰۲- مثلث - مثلث کثیر الاضلاعی است که دارای سه زاویه یعنی سه ضلع و سه راس است (س۸۲)



س۸۲

۱۰۳- مثلث متساوی الساقین

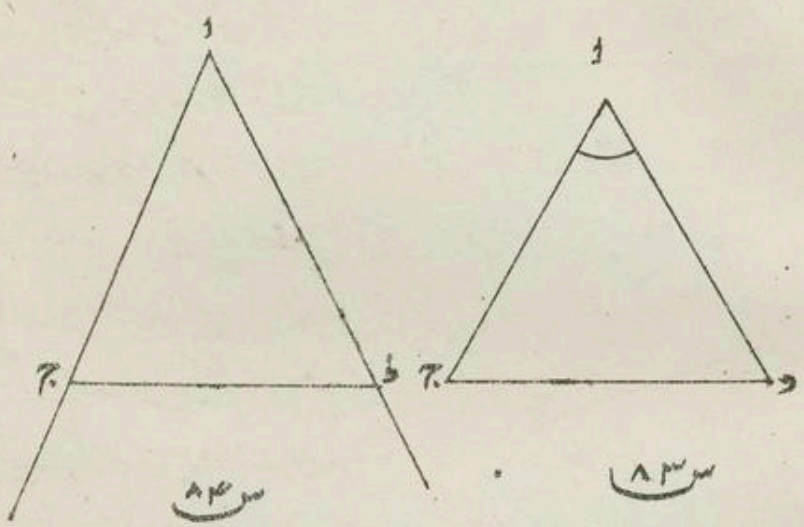
مثلث متساوی الساقین مثلثی است که دو ضلع آن با هم مساوی اند ما طریقهٔ ساختن چنین مثلثی را میدانیم زیراکه از رأس هر زاویهٔ ممکن است دو قسمت مساوی (ج و اد) را در روی دو ضلع آن جدا کرده بعد آنها را بیکدیگر وصل نمائیم (س۸۴)

۱۰۴- مثلث متساوی الاضلاع - هرگاه سه ضلع مثلثی باهم مساوی باشند می گویند آن مثلث متساوی الاضلاع

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 87 of 326

است .

تا حال طریقهٔ ساختن چنین مثلثے را نمیدانیم ولی اگر زاویهٔ باندازهٔ ۶۰ درجه رسم کرده و از دو ضلع آن دو قسمت مساوی جدا

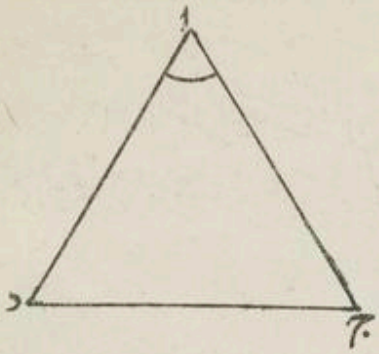


س ۸۴ س ۸۳

کرده انتهای آنها را بهم وصل کنیم مثلث متساوی الاضلاعے بدست می آید (س ۸۵) دلیل را بعد خواهیم دانست .

۱۰۵ - ذو اربعه اضلاع - ذو اربعة اضلاع کثیر الاضلاعے

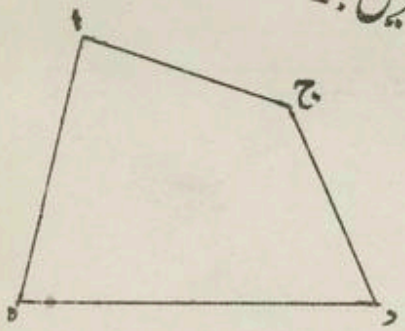
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 88 of 326



س ۸۵

است که دارای چهار راس
و بنابراین دارای چهار ضلع
است (س ۸۶).
بعدها اسامی ذواربعة
اضلاع هائی را که بعضی خواص
معینه دارند خواهیم دید.

۱۰۶ - کثیرالاضلاع بیش از چهار ضلعی - آنهارا
باسامی عربی می نامند بدین طریق :-



س ۸۶

مخمس کثیرالاضلاعی
است که ۵ ضلع داشته باشد.
مسدّس کثیرالاضلاعی
است که ۶ ضلع داشته باشد.
مسبّع کثیرالاضلاعی
است که ۷ ضلع داشته باشد.
مثمّن کثیرالاضلاعی است که ۸ ضلع داشته باشد.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 89 of 326

متسّع کثیرالاضلاعی است که ۹ ضلع داشته باشد.
معشّر کثیرالاضلاعی است که ۱۰ ضلع داشته باشد.
ازان ببعد را بواسطه عدّه اضلاع معین می کنید. مثلاً میگوئید کثیرالاضلاع پانزده ضلعے و کثیرالاضلاع سی و هشت ضلعی وغیره.

۲ - اشکال مساویه

۱۰۷ - سابقاً تعریف قطعات خط مساویه و زوایاے مساویه و قسی مساویه را کرده ایم تعریف ما درهمه جا یکے بوده است حال هم بطور کلّی می گوئیم:

دو شکل درصورتی مساوی هستند که بتوان آنهارا برروی یکدیگر منطبق نمود.

۱۰۸ - سابقاً بواسطهٔ کاغذ نازک شکلی مساوی شکل دیگر رسم کرده بودیم وقتیکه مهری را مثلاً ده دفعه بروے کاغذ میزنیم اشکال مساویه رسم مے کنیم زیرا که بواسطهٔ مهر آنهارا برهم

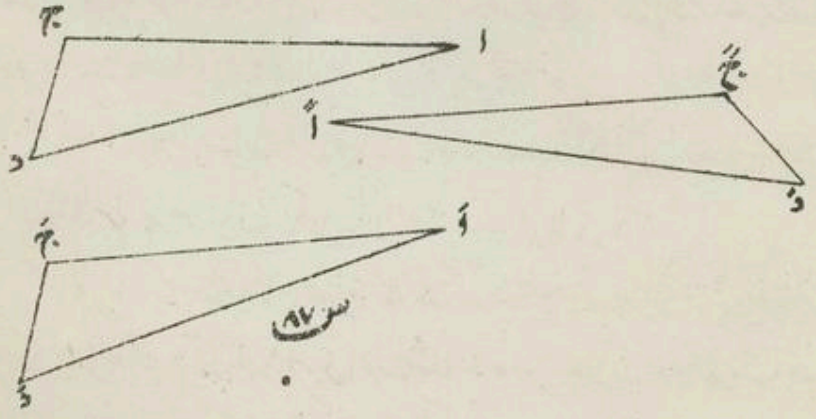
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 90 of 326

تطبیق نموده ایم واضح است که چون آن اشکال همه با شکل روی مهر مساوی اند پس همه باهم مساوی مے باشند ازین رو خاصیّت ذیل را بدست می آوریم:

وقتیکه چندین شکل بایك شکل واحد مساوی باشند بایکدیگر مساویند.

۱۰۹- اشکال مستقیماً مساوی و معکوساً مساوی-

قطعهٔ مقوائی را برداشته آن را بشکل مثلث ا ج د می چسپانیم بعد آن را روی کاغذ گذاشته بامدادی مدور



س ۸۷

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 91 of 326

آن خطے می کشیم تا مثلث ا ج د (س۸۲) در روی کاغذ رسم شود.

بعد اگر همان قطعه مقوا را بدون آنکه برگردانیم تغییر محل داده مداد را بدور آن بگردانیم شکل دیگری مانند اَ جَ دَ بدست می آید که با شکل اوّل مساوی است.

حال اگر مقوّا را برگردانیم و مداد را بدور آن بگردانیم شکل اً جً دً بدست می آید که با دو شکل اوّل مساوی است. فقط اختلافی که دارد آن است که برای بدست آوردن شکل اَ جَ دَ مقوا را از جای خود حرکت داده ایم ولے برای ترسیم اً جً دً علاوه بر تغییر محل مقوا را هم برگردانده ایم.

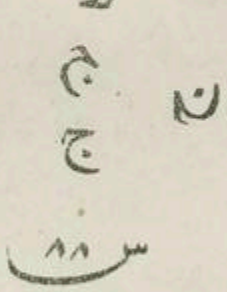
از آنچه گفتیم معلوم می شود که اشکال مساویه بر دو قسم اند.

اوّل - اشکال مستقیماً مساوی که می توانند بدون برگرداندن بواسطهٔ تغییر محل بر هم منطبق شوند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 92 of 326

دوم - اشکال معکوساً مساوی که بعد از تغییر محلّ بواسطهٔ برگرداندن یکی از آنها برهم منطبق می گردند.

۱۱۰ - مثال دیگر - اگر یک حرفی سربی مطبعه را مثلاً حرف ج را برداشته آن را چندین بار در یک طرف یک ورق کاغذ شفاف بزنیم (س۸۸) اشکالے بدست می آید که باهم بطور مستقیم مساوی اند.



حال اگر همان حرف را در پشت کاغذ چندین بار بزنیم (س۸۹) اشکالی بدست می آید که باهم بطور مستقیم مساویند

س ۸۸

ولی با اشکال اوّلیه بطور معکوس مساوی می باشند.

۱۱۱ - تبصره - اگر در ۱۰۹ بجاے آنکه مثلثے با مقوا درست کنیم دائره درست کرده و بدور آن مداد را کشیده بودیم خواه آنرا برمی گردانیم خواه برنمی گرداندیم تمام اشکال مرتسمه

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 93 of 326

بایک دیگر مساوی می شدند

و ابداً اشکال مستقیماً مساوی و

معکوساً مساوی پیدا نمیشد

پس معلوم مے شود که بعضی

اشکال ہم ہست که بدون برگرداندن

و بابرگرداندن بریک دیگر تطبیق مے شوند مثلاً دائره وقوس

و قطعه خط و زاویه و مثلث متساوی الساقین ازین نوع

مے باشند .

۳- تناظر نسبت بیک نقطه

۱۱۲- نقاط متناظره نسبت بیک نقطه - دو

نقطه در صورتے نسبت به نقطهٔ ثالثی متناظره

گفته می شوند که این نقطهٔ ثالث در وسط قطعه

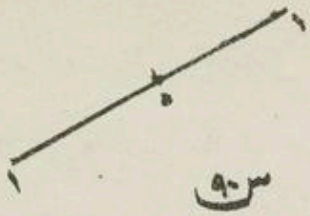
خط مرتسمهٔ بین انها باشد .

مثلاً (س، ۹) دو نقطه ا و ا نسبت به نقطهٔ ا متناظره

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 94 of 326

اند بشرائط ذیل:

اولاً - ا ه اَ خط مستقیم باشد.



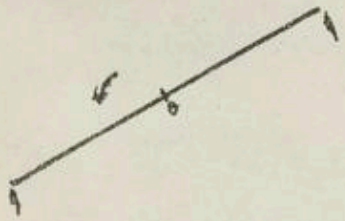
س ۹۰

ثانیاً - ا ه = ه اَ

در این وقت مے گویند ا نقطه متناظرهٔ اَ و اَ نقطه متناظره ا است و نقطهٔ ه را مرکز تناظر می نامند.

۱۱۳ - میخواهیم نقطهٔ متناظرهٔ نقطهٔ مفروضی را نسبت بمرکز مفروضی معلوم کنیم.

حل این مسئله خیلی آسان است (س ۹۱)



س ۹۱

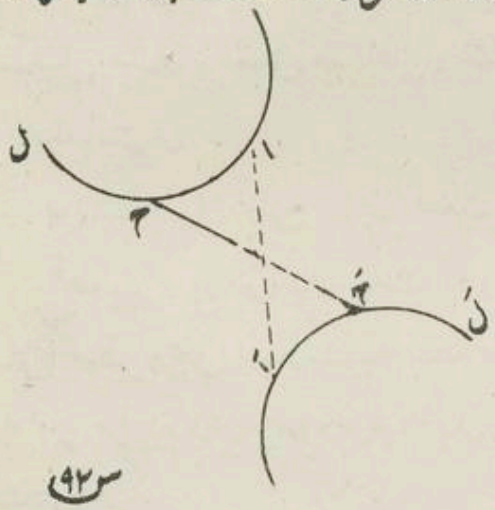
ابتداء نقطهٔ مفروضه ا را بمرکز ه وصل نموده بعد آنرا بقدر ه ا = ه اَ امتداد میدهیم اَ نقطه متناظره مطلوب است.

۱۱۴ - دوران ۱۸ درجه - فرض می کنیم (س ۹۱) ه ا

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 95 of 326

قطعه خطی باشد آن را بدور نقطه ه بقدر ۱۸۰ درجه می گردانیم
این قطعه خط بر روی امتداد خود یعنی ه ا' واقع خواهد شد و
نقطهٔ ا بر روی ا' واقع می گردد. بقسمی که ه ا = ه ا' پس در
وقت دوران ۱۸۰ درجه نقطه ا بر روی نقطهٔ متناظره خود
یعنی ا' می افتد ازین رو بخاصیت ذیل پی می بریم:

پیدا کردن نقطهٔ متناظره نقطهٔ نسبت بمرکز



س ۹۲

مفروضی عبارت
است از دوران
آن نقطه بدور
مرکز مرکز تناظر
بقدر ۱۸۰ درجه

۱۱۵- تناظر
بیک شکل نسبت

بیک نقطه - فرض می کنیم ل (س ۹۲) شکلی هندسی داریم که از
یک خط نامعین ل و یک مرکز تناظره تشکیل شده است

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 96 of 326

حال اگر شکل ل را بقدر ۱۸۰ درجه بدور نقطهٔ ه (ش۸۲) بگردانیم .
بجاے لَ می آید مے دانیم که اگر ا و ج دو نقطه ازان شکل باشند
و نیم خط ه ا و ه ج هر کدام بقدر ۱۸۰ درجه بدور نقطهٔ ه
(ش۸۲) گردیده و بر روی نقاط متناظرهٔ خود اَ و جَ منطبق
مے شوند و این دو نقطهٔ اخیر متعلق به ل مے باشند .
شکل لَ که بواسطهٔ نقاط متناظرهٔ نقاط شکل ل
تشکیل شده شکل متناظره شکل ل نسبت بمرکز
ه میباشد .

۱۱۶ - از امتحان سابقه قضیّه ذیل را نتیجه می گیریم :
قضیّه - برای بدست آوردن شکل متناظرهٔ
شکل مفروضی نسبت به نقطه مفروضهٔ کافی است
که ان را بقدر ۱۸۰ درجه بدور مرکز تناظر دوران
دهیم .

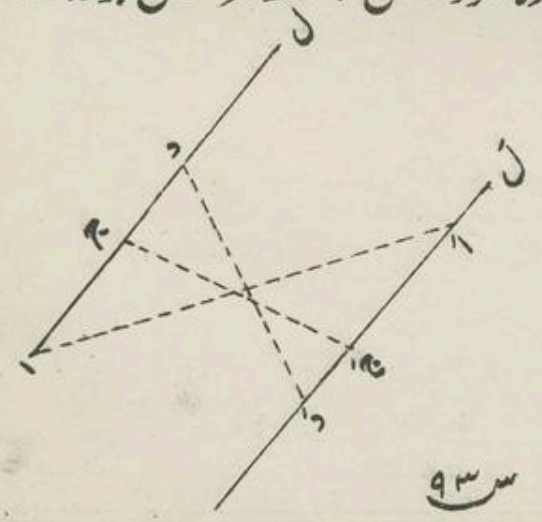
۱۱۷ - تساوی دو شکل متناظره - قضیّه فوق الذکر
اهمیت زیاد دارد زیرا که مطلب ذیل را بما میفهماند .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 97 of 326

دو شکل متناظر نسبت بیک نقطه بطور مستقیم مساویند.

زیرا که آنها را بواسطهٔ تغییر محل بدون برگرداندن میتوان برهم تطبیق نمود. حال اشکال متناظره اشکالی را که مے شناسیم یک بیک امتحان مے کنیم.

۱۱۸ - خط مستقیم - اگر مرکز تقارن روی خود خط باشد پس از دوران بدور آن نقطه بقدر ۱۸۰ درجه مجدداً آن خط بروے خود آمده خودش با متناظرش بر روے هم واقع می شوند.



س ۹۳

حال فرض می کنیم مرکز تقارن ٥ (س ۹۳) در خارج ل باشد از روے ۱۱۶ و ۱۱۷ می دانیم که متناظرهٔ آن

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 98 of 326

لَ می باشد برای ساختن آن کافی است که دو نقطه مانند ا و د در روی آن فرض کرده نقاط متناظره آن ها یعنی اَ و دَ را بواسطهٔ دوران آن ها بقدر ۱۸۰ درجه بدور نقطه ه (۱۱۳) بدست آورده بعد آن دو نقطه را بهم وصل مے نمائیم خط لَ خط متناظره مطلوب است حال اگر نقطهٔ دیگری غیر از ا و د مانند ج بروی خط ل فرض کنیم میدانیم که نقطهٔ متناظرهٔ آن نقطهٔ ج است زیراکه در وقت دوران ۱۸۰ درجه همان طور که ا و د بر روی اَ و دَ واقع شدند ج هم بر ج واقع می گردد.

۱۱۹- مسئله - میخواهیم امتحان کنیم که دو خط متناظره نسبت بیك نقطه همدیگر را تقاطع میکنند یا نه.

اگر آن دو خط نقطه مشترکی مانند ک داشته باشند. چون نقطهٔ ک روی خط ل است پس نقطهٔ متناظره آن یعنی کَ متمایز از ک روے لَ واقع مے گردد از طرف دیگر

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 99 of 326

چون نقطهٔ ک روی خط ل هم است پس نقطهٔ متناظره اش روے ل واقع خواهد شد بعبارت اخریٰ لازم می آید که دو خط متمائز ل و لَ دو نقطه مشترک داشته باشند و این محال است. درین جا فرض اینکه خط ل از نقطهٔ ه مرور نکند لازم است زیرا که آن وقت نقطهٔ ا ازه متمائز بوده متناظرش ا با خودش بر روے هم واقع نمے شوند پس

دو خط متناظرهٔ ل و لَ یکدیگر را قطع نمی کنند

۱۲۰- تعریف - دو خط واقعهٔ در یک سطح که یک دیگر را تلاقی نمی کنند باهم موازیند.

باید دانست که از عدم تلاقی مقصود ما نه فقط آنست که قسمتهاے مرسومهٔ در سطح یک دیگر را تلاقی نمی کنند بلکه هر قدر آن ها را از طرفین امتداد دهیم یک دیگر را قطع ننمایند.

۱۲۱- از کلیه آنچه مذکور شد نتائج ذیل را

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 100 of 326

می گیریم :

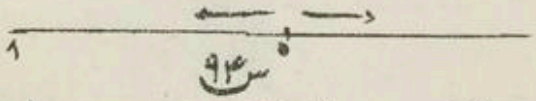
شکل متناظره یک خط مستقیم :

اوّلاً - خود آنست در صورتیکه از مرکز تناظر عبور کرده باشد .

ثانیاً - در مواقع دیگر خطی است موازی با آن خط .

۱۲۲ - نیم خط های متناظره - هرگاه نیم خطی مانند ه ا رسم کنیم مرکز تقارن ممکن است یک نقطهٔ غیر معینے باشد و نیز ممکن است در امتداد آن نیم خط باشد و بالآخره ممکن است در مبدهٔ نیم خط باشد .

اوّلاً - شکل متناظر نیم خط ه ا نسبت به مبدأش ه امتداد ه اَ میباشد (س ۹۴)

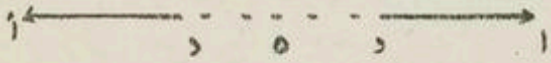


واضح است که این دو نیم خط دارای جهت های مختلف

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 101 of 326

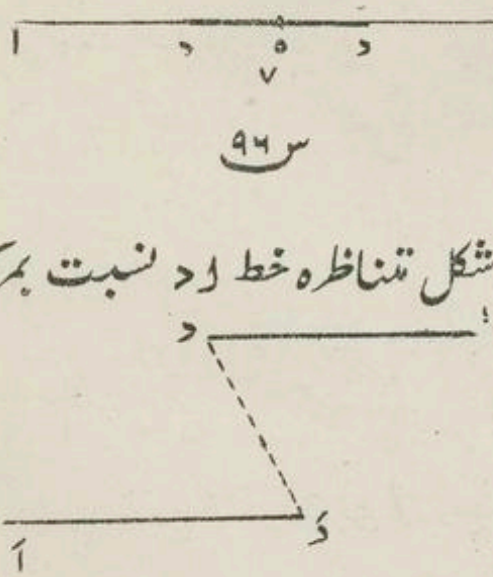
هستند (ع ۲۹) .

ثانیاً - س۹۵ و س۹۶ بسهولت اشکال تناظره نیم خط ا د را بما نشان می دهد بنابر اینکه مرکز تناظره در امتداد نیم خط (س۹۵) یا در روی خود نیم خط واقع شده باشد (س۹۶)



س۹۵

ثالثاً - حال فرض می کنیم که مرکز تناظر در روی نیم خط نباشد (س۹۷) شکل تناظره خط ا د نسبت بمرکز تناظره نیم خط اَ دَ است خطی که شامل آن است موازی است با خطی که شامل



س۹۷

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 102 of 326

و د است (شکل ۱۲۱) و از روی تیر معلوم است که این دو نیم خط دارای یک جهت نیستند.

آنچه را که گفتیم در عبارت ذیل خلاصه می کنیم.

شکل متناظر هر نیم خط نسبت بیك نقطه نیم خط دیگری است که برخلاف جهت آن است.

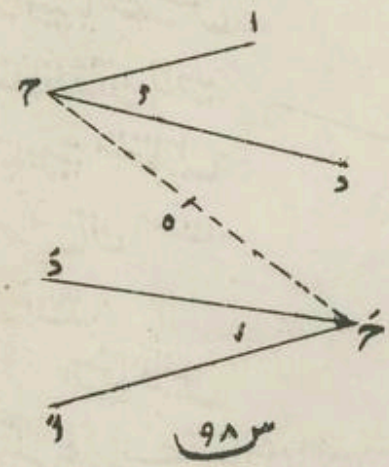
آن دو نیم خط یا در روی یك خط یا در روی دو خط موازی واقع اند.

۱۲۳ - تبصره - تاحال درباب جهت نیم خط آنچه گفتیم در روی یک خط بوده است ولی حال دیدیم که ممکن است که دو نیم خط دارای دو جهت مختلف و در روی دو خط موازی واقع شده باشند.

۱۲۴ - زوایای متناظره - در اینجا ما امتحان کلیتهً حالاتی را که ممکن است مرکز تناظر داشته باشد بعهدهٔ شاگردان وا میگذاریم فقط حالتی که مرکز تقارن هیچ اختصاصی ندارد بیان می کنیم.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 103 of 326

میدانیم که شکل متناظر زاویهٔ ا ج د نسبت به نقطه ه زاویه مساویهٔ ا ج د است (س۹۸) اگر ج د متناظر ج د است ج ا نیز متناظر ج ا خواهد بود. و دو زاویه (ا ج د) و (ا ج د) دارای یک جهت اند.



س ۹۸

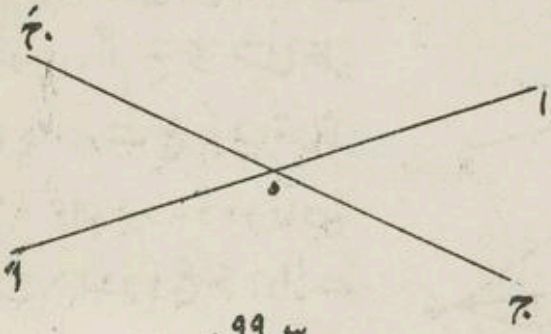
برای اینکه این مسئله محقق باشد لازم است که برای ضلع های ج ا هر زاویه دو ضلع متناظر را انتخاب کنیم.

شکل متناظر هر زاویه نسبت بیک خط زاویه ایست مساوی با آن زاویه و ممتدّ در همان جهت.

معلوم است که اضلاع آن دو زاویه با یک دیگر موازی و در جهت مخالفند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 104 of 326

۱۲۵ - حالت مخصوص - هرگاه مرکز تناظر در راس زاویه باشد شکل متناظرهٔ آن زاویه زاویهٔ متقابل براس آن است (س ۹۹)



س ۹۹

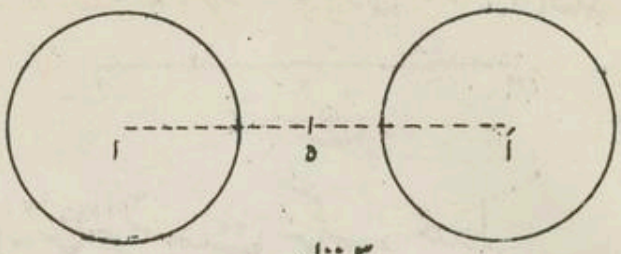
ازینجا دلیل دیگری برائے تساوی این دو زاویه بدست می آید.

۱۲۶ - دوائر متناظره - شکل متناظر هر دائره دائره دیگر مساوی با همان دائره است و مرکزش نقطهٔ متناظر مرکز دائرهٔ مفروض مے باشد (س ۱۰۰)

۱۲۷ - حالت مخصوص - اگر مرکز تناظر در مرکز دائره باشد - دور آن دائره بقدر ۱۸۰ درجه آن را مجدداً بروی خود منطبق می سازد.

(س ۱۰۱) واضح است که دو انتهائے هر قطرے مانند

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 105 of 326



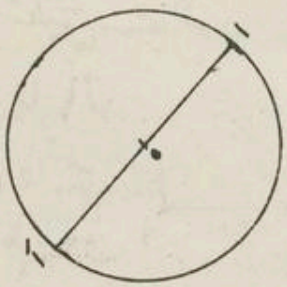
س ۱۰۰

ا آ نسبت بمرکز ه متناظر اند .

دراین حالت می گویند که دائره شکل متناظر خودش است یا آنکه نقطهٔ ه مرکز تناظر دائره است .

۱۲۸ - مرکز تناظر

یک شکل - شکلی را می گویند دارای مرکز تناظر است درصورتیکه بتواند نسبت با آن نقطه بر شکل متناظرش منطبق شود .

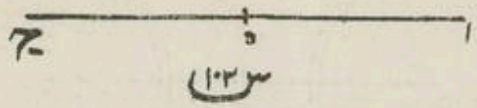


س ۱۰۱

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 106 of 326

مثلاً قطعه خط ا ج مرکز متناظرش در وسطش می باشد

(س ۱۰۲)

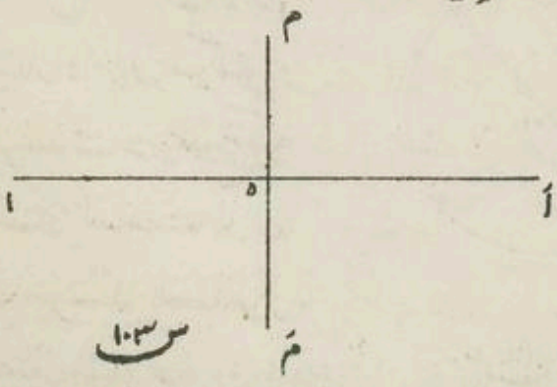


س ۱۰۲

۴- تناظر نسبت بیک خط

۱۲۹- نقاط متناظره نسبت بیک خط- خطی مانند

ا اَ داریم (س ۱۰۳) کاغذ را در امتداد آن خط تا مے کنیم همان طور که در ۶۵ کرده بودیم نقطهٔ م مثلاً بر روی نقطهٔ ثانی مَ منطبق مے شود



س ۱۰۳

حال کاغذ را باز مے کنیم می دانیم که خط م مَ بر اَ اَ عمود است علاوه بر آن ه م = ه مَ

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 107 of 326

این دو نقطهٔ م و مَ را نسبت بخط ا اَ متناظره می گویند پس مے گوئیم:

دو نقطه نسبت بیك خط متناظره اند در صورتیکه آن خط عمود باشد بر وسط قطعه خطی که آن دو نقطه را بهم وصل میکند.

مثلاً میگوئیم نقطه م متناظر م یا م متناظر م است نسبت بخط ا اَ خط ا اَ را محور تناظر میگوئیم.

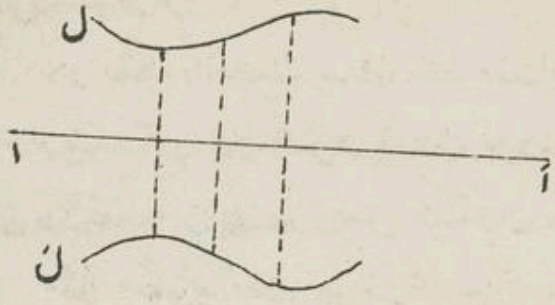
۱۳۰- مسئله- نقطهٔ متناظرهٔ نقطهٔ مفروضی را نسبت بمحور مفروضی رسم کنید.

برای ساختن نقطهٔ متناظرهٔ م نسبت به محور ا اَ (س ۱۰۳) از آن نقطه عمودی بر ا اَ فرود آورده نقطهٔ مَ را بقسمے در روے آن نشان مے کنیم که ه م = ه مَ باشد نقطهٔ مَ نقطهٔ مطلوب است.

۱۳۱- تناظر یک شکل نسبت بیک خط- با مرکب شکلی مانند ل رسم کرده (س ۱۰۴) قبل از آنکه مرکب خشک شده

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 108 of 326

باشد کاغذ را در امتداد ا اَ تا مے کنیم شکل ل در روی کاغذ
در لَ رسم می شود
در این حرکت هر یک
از نقاط شکل ل
برروی نقطهٔ
متناظرهٔ خود نسبت
به ا اَ واقع میگردد



س ۱۰۴

و تمام این نقاط متناظره نقاط شکل لَ می باشند.

شکل لَ که از متناظره های نقاط مختلفهٔ شکل ل نسبت به ا اَ تشکیل شده شکل متناظرهٔ ل نسبت به ا اَ می باشد.

۱۳۲ - از آنچه مذکور شد قضیهٔ ذیل نتیجه مے شود:

قضیّه - وقتیکه سطح را در امتداد خطی تا کنیم دو شکل متناظرهٔ نسبت بان خط برروی هم واقع می شوند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 109 of 326

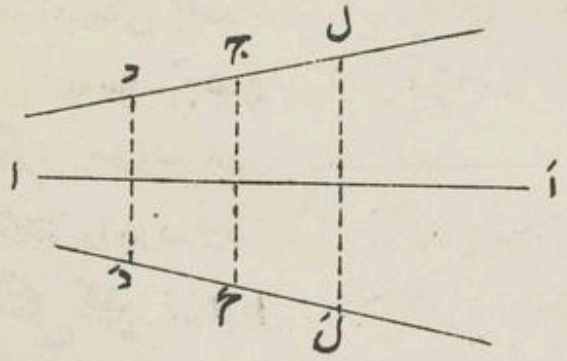
۱۳۳- تساوی دو شکل متناظره - قضیّه فوق الذّکر بما مے فهماند که برای تطبیق آن دو شکل متناظره باید یکے از آن ها را بر گرداند پس:

دو شکل متناظرهٔ نسبت بیك خط معکوساً با هم مساویند.

۱۳۴- دو تناظرے را که تحصیل کردیم مثال اشکال مستقیماً و معکوساً مساوی بوده اند.

حال تناظر بعضی اشکالی را که می شناسیم تحصیل می کنیم:

۱۳۵- خط مستقیم - میدانیم (۱۳۳) که شکل متناظره خط مستقیم یک خط مستقیم است برائے تعیین آن کافی است

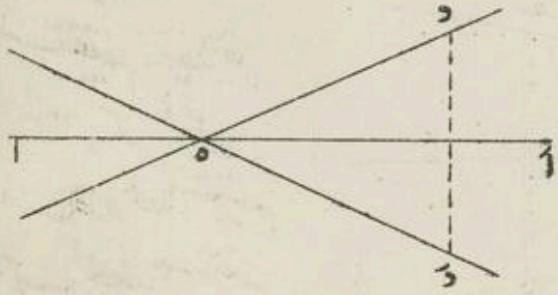


س ۱۰۵

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 110 of 326

(س۱۰۵) که در روی خط مفروض دو نقطهٔ د و ل را اختیار کرده و نقاط متناظرهٔ آن ها یعنی دَ و لَ را نسبت به خط ا اَ بدست بیاوریم (ت۱۳۰) خطی که این دو نقطهٔ اخیر را بیک دیگر وصل می کند خط متناظره مطلوب است.

میدانیم که هرگاه سطح را در امتداد ا اَ تا کنیم نقطهٔ ل بر روے لَ و د بر روے دَ منطبق شده و تمام خط د ل بر روے خط دَ لَ واقع خواهد شد در ضمن هر نقطهٔ دیگری مانند ج بر روی نقطهٔ متناظرش جَ روی همان خط متناظره می افتد.



س۱۰۶

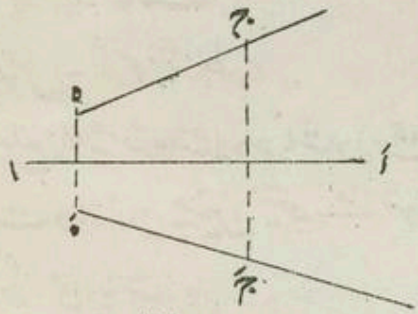
۱۳۶- تبصره

اگر خط مفروض محور تناظر را در حدود شکل قطع نماید (س۱۰۶) بهتر آن است که نقطهٔ ه

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 111 of 326

را اوّلین نقطهٔ خط مفروض حساب کنیم زیراکه این نقطه با متناظره اش بر روی هم واقع مے شوند حال کافی است که این نقطه ه را به نقطهٔ متناظره نقطهٔ دیگری ازان خط مانند دَ وصل کنیم تا شکل متناظرهٔ مطلوبه بدست بیاید پس مطلب ذیل را بخاطر می سپاریم:

دو خط متناظره یکدیگر را در روی محور تناظر قطع می کنند.



س ۱۰۷

۱۳۷- نیم خط-

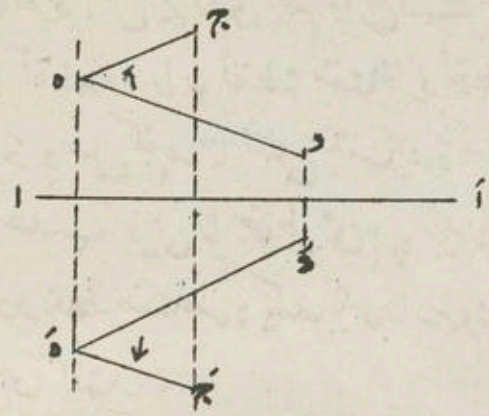
س ۱۰۷ نیم خط متناظره نیم خط مفروضی را نشان میدهد.

۱۳۸- زاویه-

شکل متناظره هر زاویه زاویهٔ دیگری مساوی با آن است (س ۱۰۸) اگر ده ج شکل اوّل ودَ هَ جَ شکل دوم باشد چون ه د متناظر هَ دَ است

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 112 of 326

فوراً می فهمیم که این دو زاویه در جهات مختلفه اند.

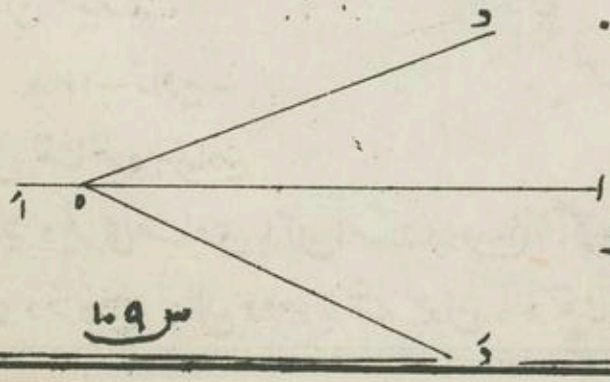


س ۱۰۸

برای اینکه این مسئله صحیح باشد باید ملتفت بود که اوّلین ضلع هاے هر زاویه باهم متناظر باشند.

۱۳۹- حالت

مخصوص - اگر محور تناظر ه ا ضلع زاویهٔ مفروضهٔ ا ه د باشد - (س ۱۰۹) زاویه متناظرهٔ مطلوبه ا ه د' است و از آن چنین نتیجه مے شود که ه ا منصف زاویهٔ د ه د' می باشد.



س ۱۰۹

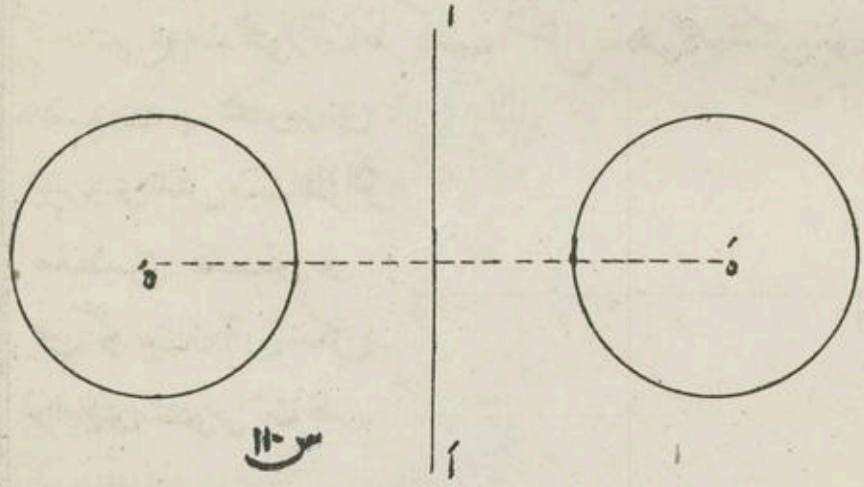
هر منصف زاویه آن را نسبت بخود بدو زاویهٔ متناظره

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 113 of 326

تقسیم می نماید.

۱۴۰ - دائره - شکل متناظر هر دائره دائره ایست. مساوی با خودش دو مرکز آن با نقاط متناظره نسبت به محور می باشند (س ۱۱۰).

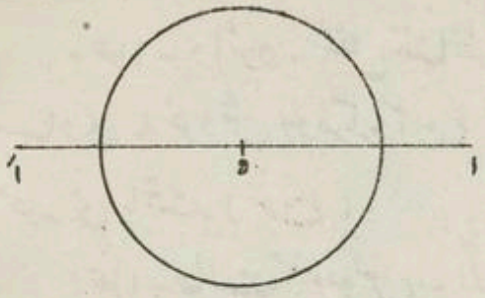
۱۴۱ - حالت مخصوص - اگر محور تناظر قطری از دائره باشد چون متناظرهٔ آن دائره ایست مساوی و دارای همان مرکز پس بر روی خودش منطبق مے شود (س ۱۱۱)



س ۱۱۰

پس می گوئیم که هر قطر محور تناظری است برای دائره

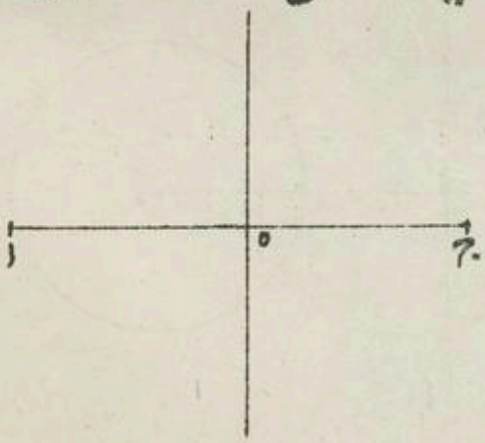
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 114 of 326



س ۱۱۱

درینجا مقصود مان از قطر خطی است که از مرکز عبور کرده باشد من بعد هم هر وقت قطر بگوئیم مقصود مان یک خط لا یتناهی است که جزئی ازان قطر حقیقی دائره است.

۱۴۲ - محور تناظر یک شکل - هرگاه شکلی بتواند نسبت به محوری بر روی شکل متناظرش منطبق شود می گویند آن شکل دارای محور تناظر است.



س ۱۱۲

مثلاً محور تناظر هر

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 115 of 326

قطعه خط مستقیم خطی است که بر وسط آن عمود باشد (س ۱۱۲).
و نیز منصف هر زاویه محور تناظری برای آن زاویه است.

۱۴۳ - تبصره - شکلی که دارای محور تناظر باشد بعد از برگردانیدن نیز بر خودش منطبق می شود (ع ۱۳۲)
پس چنین اشکال هم مستقیماً و هم معکوساً با هم مساویند.

امثله

۱ - مثلثی مانند ا ب ج د رسم کرده زوایای آن را با نقاله اندازه بگیرید بعد این کار را در ۱۰ مثلث مختلف بجا آورده نتائج حاصله را با هم مقایسه نمایند.

۲ - دائره و خطی مفروض است تناظر مجموعهٔ آن ها را تحصیل کنید.

۳ - دائره و نقطهٔ مفروض است تناظر مجموعهٔ آنها را تحصیل کنید.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 116 of 326

۴ - درچه شرایطے یک دائره و دو نقطه دارائے تناظرند .

۵ - درچه شرایطے یک دائره و دو خط دارائے تناظرند .

۶ - درچه شرایطے یک دائره و یک خط و یک نقطه دارای تناظرند .

۷ - نسبت به مرکز ہ نقطۂ تناظرۂ ا یعنی اَ را بسازید بعد نقطۂ تناظرۂ دیگر ا یعنی اً را نسبت بمرکز ثانی ہً بسازید بالآخره نقطۂ تناظرۂ ا یعنی اً را نسبت بمرکز ہً رسم کنید بعد ثابت نمائید که دو نقطۂ اً و اً نسبت به نقطۂ ہً که بین ہ و ہً واقع شده متناظر اند و این نقطه ہً را تعیین نمائید .

۸ - از مسئله فوق نتیجه بگیرید که شکلی که دارای ابعاد محدوده باشد نمی تواند بیش از یک مرکز تقارن داشته باشد .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 117 of 326

۹ - هرگاه شکل محدودے دارای مرکز و محور تناظر باشد محور از مرکز عبور مے کند بعد یک مثال ساده بزنید - (از مثال سابق)

۱۰ - ابتدا نقطهٔ تناظرهٔ اَ از ا را نسبت به محور دَ بسازید بعد نقطهٔ تناظره اً از همان نقطهٔ ا را نسبت به محور ثانی دً رسم کنید بالآخره نقطهٔ متناظرهٔ اً از اَ را نسبت به محور ثانی دً ترسیم نمائید حال ثابت کنید که اَ و اً نسبت به محور ثالثی مانند دً که بین دَ و دً واقع است باهم متناظرند و نیز بگوئید در چه وقت دً با دَ بر روے هم مے افتد .

۱۱ - اگر شکلی دو محور تناظر عمود بر یک دیگر قبول کند محل تقاطع آن ها مرکز تناظر است مثالی ذکر کنید .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 118 of 326

فصل پنجم

مثلث های متساوی السّاقین

خطوط عمود و مائل

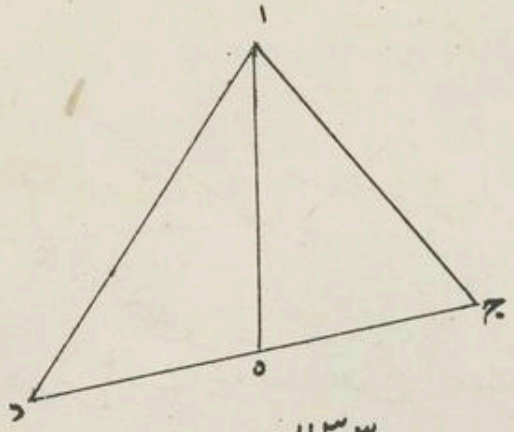
ترسیمات هندسی باستاره و پرکار

۱۴۴ - ذیلاً مطالبی را که سابقاً گفتیم در مثلث متساوی السّاقین بکار می بریم و پیش از شروع در مطلب بعضی تعاریف که برای ما لازم است ذکر می نمائیم.

۱۴۵ - میانه - میاندهر مثلّث عبارت از خطی است که یکی از رؤس آن را بوسط ضلع مقابل وصل نماید.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 119 of 326

مثلاً در مثلّث ا ج د (س۱۱۳) خط ا ه که رأس ا را بوسط ج د وصل کرده است یک میانهٔ آن مثلّث است.



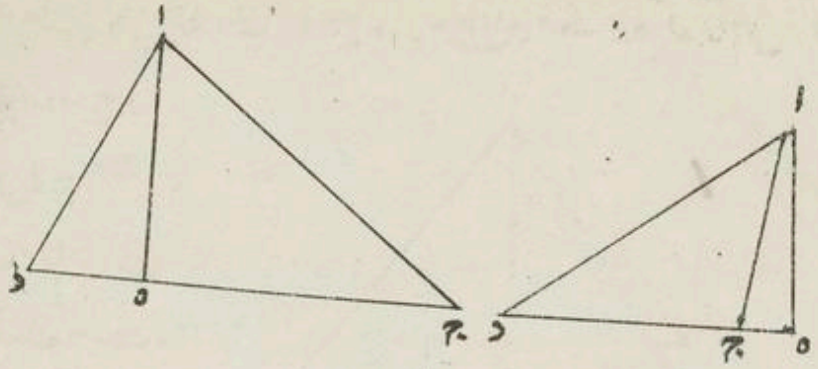
س۱۱۳

هر مثلّث سه میانه دارد۔ زیرا که دارائی سه رأس وسه ضلع است.

۱۴۶- ارتفاع - ارتفاع هر مثلث عمودی است که از یکی از رؤس آن بر ضلع مقابل فرود بیاید.

مثلاً اگر (س۱۱۴) زاویهٔ ا ه د قائمه باشد ا ه ارتفاع مثلث ا ج د است گاه اتفاق می افتد که برائے ترسیم ارتفاع باید ضلع مثلث را امتداد داد مانند س۱۱۵.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 120 of 326



س ۱۱۴ س ۱۱۵

در هر مثلث نیز سه ارتفاع است .

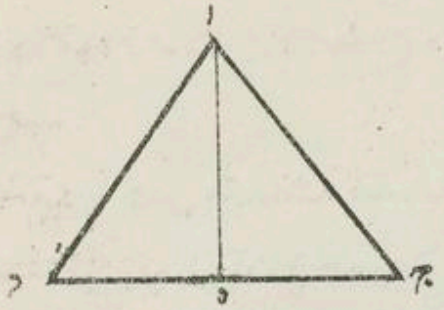
۱۱۷ - منصف الزّاویه - سه زاویهٔ هر مثلث هر کدام دارای یک منصف الزّاویه است که نیم خط است من بعد هر وقت از منصف الزّاویه مثلثات ذکری کنیم مقصودمان خطوط لایتناهی است که شامل آن منصف الزّوایا می باشد.

۱۱۸ - خاصیّت اصلی مثلث متساوی السّاقین - مے دانیم که مثلث متساوی السّاقین داری دو ضلع مساوی است - فرض می کنیم (س ۱۱۶) ا ج د مثلثی باشد متساوی السّاقین که دران ا ج = ا د و فرض می کنیم که منصف الزّاویه

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 121 of 326

آن اه نیز رسم
شده باشد.

اه محور تناظر
زاویهٔ ج اد است
(۱۴۲)



س ۱۱۶

پس اگر شکل
را بدور آن تا کنیم ضلع اد بر روی ضلع اج منطبق می شود و نقطهٔ د روی نقطهٔ ج واقع مے گردد زیرا که دو ضلع مثلث مساویند و ازان چنین نتیجه مے شود که دو نقطهٔ ج و د نسبت به اه متناظرند و خط اه محور تناظر مثلث است پس چنین بیان مے کنیم:

قضیّه - هر مثلث متساوی الساقین یک محور تناظر دارد و آن منصف زاویه ایست که از دو ضلع مساوی تشکیل شده است.

۱۴۹ - نتیجه - از قضیهٔ فوق فوراً نتیجه می گیریم.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 122 of 326

اوّلاً - دو نقطهٔ ج و د چون نسبت به اد متناظره اند
پس اه عمود است بر وسط ج د و این طور بیان
مے کنیم.

قضیّه - در مثلث متساوی السّاقین
منصف الزّاویه ارتفاع و میانهٔ آن نیز هست.

ثانیاً - دو زاویهٔ متناظره ج و د باهم مساویند
پس

قضیّه - در مثلث متساوی السّاقین دو
زاویهٔ مقابل بدو ضلع متساویه مساویند.

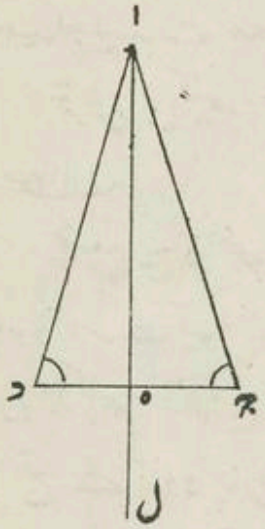
۱۵۰ - تبصره - اهمیت خواص ۱۴۸ در آن است
که فقط مخصوص به مثلث متساوی السّاقین می باشد
حال خواهیم دید که هرگاه خواص مذکوره در مثلثی پیدا شود
آن مثلث متساوی السّاقین است.

۱۵۱ - مسئله - مثلثی یك محور تناظر که بر یك
راسش گذشته است قبول میکند می خواهیم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 123 of 326

خواص آن را معلوم کنیم .

فرض می کنیم (س۱۱۶) ا ج د مثلثی باشد که محور تناظر ا ه را قبول میکند - پس لازم می آید که دو راس ج و د نسبت به ا ه متناظر باشند .



س۱۱۶

حال اگر این شکل را بدور ا ه تا کنیم ا د بر ا ج منطبق می شود و چنین معلوم مے شود که مثلث مفروض متساوی الساقین و دو ضلع ا د و ا ج باهم مساویند پس میگوئیم :

قضیهٔ عکس ۱۲۸ - هرگاه مثلثی محور تناظری که از یکی یك راسش گذشته باشد قبول کند متساوی الساقین است و دو ضلع مساوی ازان راس خارج شده اند .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 124 of 326

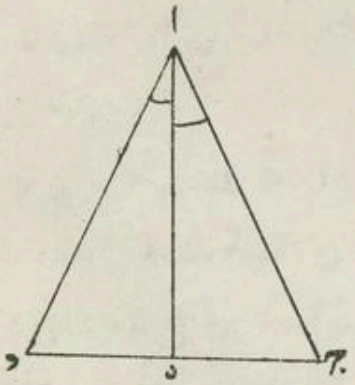
۱۵۲ - حال عکس قضیهٔ ۱۴۹ را امتحان می کنیم.
میخواهیم خواص مثلثی را که دارای دو زاویهٔ مساویست معلوم کنیم.
فرض می کنیم ا ج د مثلثی باشد که دران ج̂ = د̂ (س ۱۱۷).
ضلع ج د محور تناظر ا ل را که بر وسطش در نقطهٔ ه عمود است قبول مے کند حال اگر شکل را در امتداد محور ا ل تا کنیم نقطهٔ ج بر روی نقطهٔ د و ج ه بر روی ه د واقع مے گردد چون دو زاویهٔ ج̂ و د̂ مساویند ضلع ج ا هم بر روی ضلع د ا می افتد پس این دو خط نسبت به ا ل متناظره اند و ازان چنین نتیجه مے شود که آن ها در روی ا ل همدیگر را قطع می کنند (۱۳۶) و با یک دیگر مساوی اند زیرا که بر روی هم واقع شده اند پس میگوئیم.
دوّمین قضیّه عکس ۱۴۹ - اگر مثلثی دارای دو زاویهٔ مساوی باشد اضلاع مقابل بآن دو زاویه

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 125 of 326

مساوی اند.

۱۵۳ - تبصره - باید دانست که تمام دلائلے که آوردیم مربوط بخاصیت مثلث متساوی الساقین است یک محور تقارن قبول مے کند.

۱۵۴ - مسئله - میخواهیم خواص مثلثی را که منصف یکی از زوایایش ارتفاعش هم هست معلوم کنیم.



س ۱۱۸

دو زاویهٔ مجاورهٔ مساوی د ا ه و ه ا ج را رسم می کنیم (س ۱۱۸) بعد بر خط ا ه از نقطهٔ ه خط د ه ج را بران عمود مے کنیم حال شکلی داریم که مطابق فرض مسئله ما است.

دو خط ا د و ا ج نسبت به ا ه متناظره اند و دو نقطهٔ د و ج در روی آن دو خط چون در روی ج د یعنی

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 126 of 326

عمود بر محور تناظر واقع شده اند با یکدیگر متناظر اند و مثلّث محور تناظر را قبول می نماید پس متساوی الساقین است (۱۵۱) و مے گوئیم:

قضیّه - اگر در مثلثی منصف یک زاویه ارتفاع مثلث هم باشد آن مثلّث متساوی السّاقین است.

۱۵۵ - برای سائر امثله شاگردان باید به مسئله ۱۲ رجوع کنند.

۱۵۶ - مثلث متساوی الاضلاع - کلّیه آنچه را که در باب مثلث متساوی السّاقین مذکور داشتیم در مثلث متساوی الاضلاع نیز صدق مے کند ولی در آنجا با هر دو ضلع مے توان استدلال نمود زیرا که تمام اضلاع آن باهم مساویند - پس

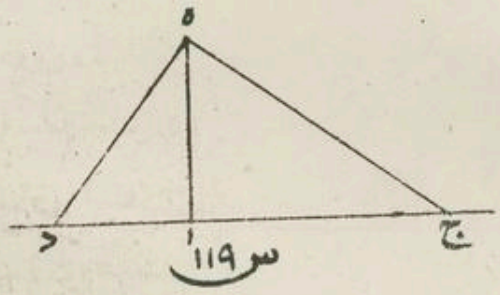
مثلث متساوی الاضلاع دارای سه محور تناظر است و منصف الزّوایا میانه ها و ارتفاعات

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 127 of 326

مثلث نیز می باشند و سه زاویهٔ آن مساوی است.

۲- خطوط عمود و مائل

۱۵۷- میدانیم که از نقطهٔ ه غیر واقعه در روی خط ج د (س ۱۱۹) میتوان فقط یک عمود ه ا را بر آن خط فرود آورد. خطوط



س ۱۱۹

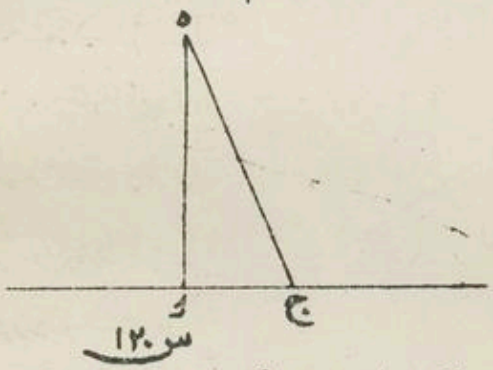
دیگری که نقطهٔ ه را به نقاط دیگر ج و د وصل می نمایند بخطوط مائل موسومند.

۱۵۸- موقع و طول خطوط عمود و مائل - نقطهٔ ا را (س ۱۱۹) موقع عمود مے گویند و دو نقطهٔ ج و د را نیز موقع دو مائل ه ج و ه د می خوانند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 128 of 326

من بعد هر وقت طول عمود بگوئیم مقصود مان طول قطعه خط ه ا است و نیز هر وقت طول مائل را نام ببریم مقصود مان طول قطعه خط های ه ج و ه د می باشد۔

۱۵۹۔ عدم تساوی عمود و مائل۔ ابتدا می بینیم که طول عمود ه ا و طول مائل ه ج با هم مساوی نیستند

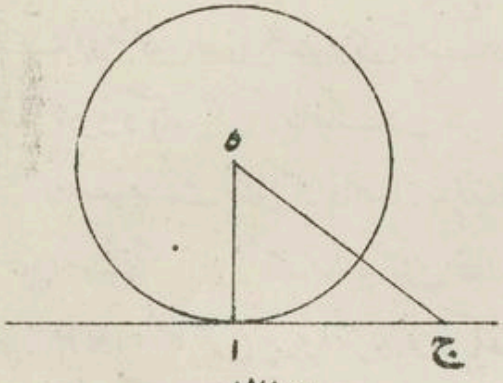


س ۱۲۰ زیرا که اگر مساوی بودند لازم می آمد که مثلث ج ه ا متساوی الساقین باشد و خطی که نقطهٔ ه را بوسط ج وصل نماید ارتفاع آن می گردد و آن وقت دو خط عمود از یک نقطه بر خطی فرود آورده ایم و این محال است۔

۱۶۰۔ مسئله۔ میخواهیم خط عمود را با یک خط مائل مقایسه کنیم۔

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 129 of 326

دائرهٔ بمرکز ه و شعاع ه ا رسم مے کنیم از آنچه در نمرهٔ قبل گفتیم معلوم مے شود که خط ا ج با این دائرهٔ نقطهٔ مشترکی غیر از نقطهٔ ا نمی تواند داشته باشد زیرا که اگر در نقطهٔ دیگری مانند د با دائرهٔ اشتراک داشت - لازم مے آید که مائل ه د با ه ا مساوی باشند زیرا که شعاع یک دائره اند - و این ممکن نیست علاوه بر این خط ا ج نمی تواند در دائره داخل شود زیرا که اگر از نقطهٔ ا داخل دائره می شد می بایست از نقطهٔ دیگری خارج شود و این هم بنا بر آنچه گفتیم محال است .



س ۱۲۱

پس نقطهٔ ج ازین خط در خارج دائره است و فاصله اش

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 130 of 326

تا مرکزه بزرگتر از شعاع ه ومی باشد از آنچه گفتیم میتوانیم چنین نتیجه بگیریم .

قضیّه - عمود همواره اقصر است از مایلی که از همان نقطه شروع شده باشد .

۱۶۱ - **فاصله یک نقطه از یک خط** - فاصلهٔ هر نقطه از خطی طول عمودی است که از آن نقطه بر آن خط فرود آمده باشد .

معلوم می شود که فاصلهٔ هر نقطه از خطی کوتاه ترین قطعه خطی است که آن نقطه را به آن خط وصل می نماید .

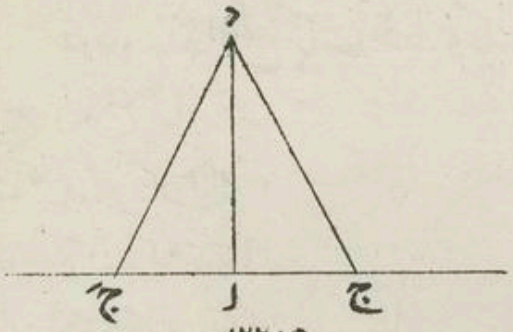
۱۶۲ - **مماس بر دائره در یک نقطه** - مماس خطی را گویند که با دائره بیش از یک نقطه اشتراک نداشته باشد .

سابقاً دیدیم که هر خطی که بانتهای شعاع دائرهٔ عمود باشد مماس بر آن دائره است .

نقطهٔ اشتراک دائره و خط را نقطهٔ تماس گویند .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 131 of 326

۱۶۳ مسئله - میخواهیم خط مایلی مساوی با مایل مفروضی رسم کنیم.



ص ۱۲۲

عمود ه ا را رسم می کنیم (ص ۱۲۲) و نقطهٔ ج را به تناظر ج نسبت به ا نشان میکنیم مثلث ه ج ج متساوی الساقین است زیرا که دارای محور تناظر ه ا است پس ج ا = ا ج چنین بیان می کنیم:

قضیّه - دو مایلی که موقع آنها بیک فاصله باشند از موقع عمود باهم مساویند.

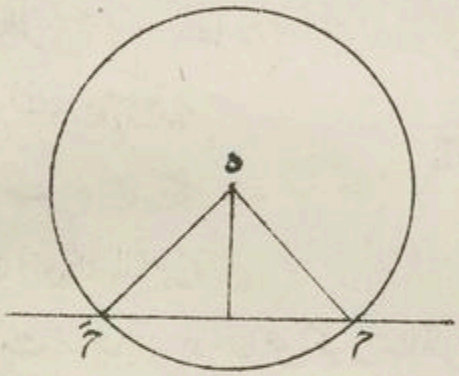
عکس این قضیه فوراً ثابت می شود یعنی اگر دو مائل مساوی باشند ه ج ج متساوی الساقین است و ارتفاع

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 132 of 326

۱۰ میانهٔ آن مثلث است پس
بالعکس مواقع دو مایل متساویه بیک فاصله
اند از موقع عمود.

۱۶۲- تقاطع یک خط و یک دائره - دو مایل مساوی

ه ج و ه جَ را رسم
می کنیم (س ۱۲۳)
دائره که بمرکز ه باشد
و از نقطهٔ ج عبور کند
از نقطهٔ جَ نیز مرور
خواهد نمود خط ج جَ
نمی تواند در نقاط دیگر
با دائره اشتراک داشته باشد.



س ۱۲۳

زیرا که اگر در نقطهٔ سوّمی مثلاً در نقطهٔ حَ مشترک باشد
لازم می آید که با ه ج مساوی باشد پس موقعش بیک فاصله
می شود از موقع عمود و بالضّرورة بر دو مایل ه حَ می

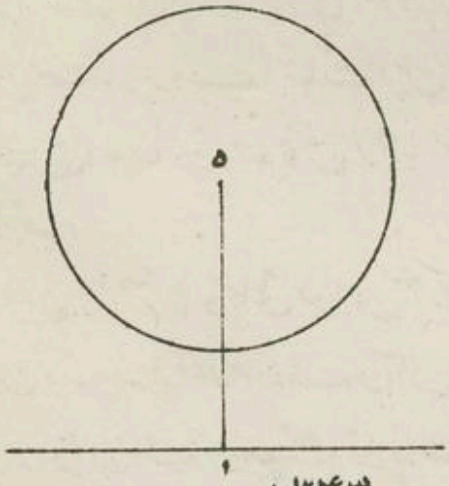
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 133 of 326

افتد پس .

یک خط نمی تواند در بیش از دو نقطه دائره را قطع نماید .

۱۶۵ - در س ۱۲۳ مشاهده می کنیم که فاصلهٔ ه ا از مرکز تا خط کوچک تر از شعاع دائره است .

سابقاً دیدیم ۱۶۲ (س ۱۲۱) که اگر این فاصله مساوی با شعاع باشد خط مماس بر دائره است اگر فاصله ه ا (س ۱۲۴) بزرگتر از شعاع باشد تمام نقاط خط از مرکز دورتر اند تا نقطهٔ ه پس دائره و خط یک دیگر را قطع نمیکنید



س ۱۲۴

از ملاحظات فوق سه قضیهٔ نتیجه می شود که عکس آن ها

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 134 of 326

نیز بسهولت می گردد .

۱۶۶- مثلاً وقتیکه خطی دائره را قطع کند فاصلهٔ مرکز دائره تا آن خط همواره کوچک تر است از شعاع دائره واین مسئله لازم است بالعکس هرگاه خطی طوری واقع شده باشد که فاصله مرکز دائره تا آن خط کوچک تر از شعاع دائره باشد (س ۱۲۳) نقطهٔ ا در درون دائره است وآن خط مجبور است از دائره خارج شود پس آن را قطع می نماید وفرض مسئله برای اثبات این امر کافی است .

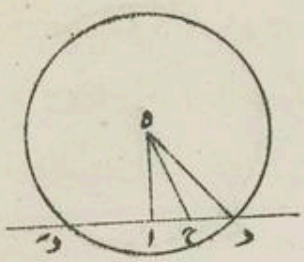
پس دو خاصیّت فوق را باهم جمع کرده چنین بیان می کنیم :

شرط لازم وکافی برای آنکه دائره وخطی یکدیگر را قطع کنند آن است که فاصلهٔ مرکز دائره ازان خط کوچک تر باشد از شعاع دائره

۱۶۷- مسئله - می خواهیم دو مائل را که مواقع آن ها بیک فاصله از مواقع عمود نیستند مقایسه

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 135 of 326

کنیم .



س ۱۲۵

فرض می کنیم که بخواهیم دو مائل ه ح ، ه د را باهم مقایسه کنیم (س ۱۲۵) یقیناً می دانیم که این دو مائل مساوی نیستند زیرا که اگر مساوی بودند مواقع آن ها از موقع عمود بیک فاصله بودند و این خلاف فرض است .

حال دائرهٔ بمرکز ه و شعاع ه د رسم می کنیم این دائره خط ا ح را در نقطهٔ د تناظر د نسبت به ا قطع میکند .

نقطهٔ ح در داخل قطعه خط د د' است پس در درون دائره می باشد و فاصلهٔ ه ح کوچک تر است از شعاع ه د .

قضیّه - از دو مائل غیر مساوی آنکه موقعش از موقع عمود دورتر است طویل تر است .

۱۶۸ - عکس این قضیه نیز فوراً برما ثابت می شود .

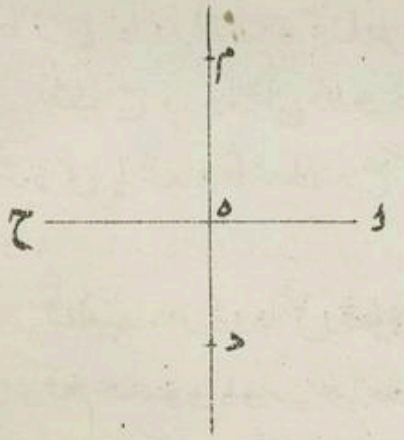
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 136 of 326

فرض می کنیم مائل ه د بزرگتر از مائل ه ح باشد
لازم مے آید که ا د بزرگتر از ا ج باشد زیرا که
اوّلاً - اگر ا د مساوی ا ج بود لازم می آمد که

ه ج = ه د

ثانیاً - اگر ا د کوچک تر از ا ج بود لازم مے آمد که
ه د کوچک تر باشد از ه ج و این خلاف فرض است -
پس

قضیّه عکس - از دو مایل غیر مساوی آنکه
بزرگتر است موقعش
از موقع عمود دورتر
است .



س ۱۲۶

۱۶۹ - نقاط متساوی
البعد از دو نقطه مفروضه
دو نقطه مانند ا و ج
فرض مے کنیم (س ۱۲۶)

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 137 of 326

بعد محور تناظر آن ها را بدست می آوریم مے دانیم که آن خطم د عمود بر وسط و ج است .

اگر م یک نقطهٔ از آن محور باشد و طول م ل و م ج باهم مساویند (۱۵۱)

بالعکس اگر نقطهٔ مانند د بیک فاصله از ل و ح فرض کنیم مثلث د ح ل متساوی الساقین است و محور تناظر آن همان محور تناظر ل ج می باشد که از نقطهٔ د هم می گزرد .

پس دو نتیجهٔ ذیل را فهمیدیم :

اوّلاً - هر نقطهٔ از محور تناظر بیک فاصله است از ل و ج .

ثانیاً - تمام نقاطے که از ل و ج بیک فاصله اند در روی محور تناظر واقع اند دو نتیجهٔ فوق را باهم در قضیهٔ ذیل بیان مے کنیم .

قضیّه - محور تناظر هر قطعه خط مکان هندسی

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 138 of 326

نقاطی است که بیک فاصله باشند از طرفین آن قطعه خط .

پس مکان هندسی عبارت از مجموعهٔ نقاطی است که دارای یک خاصیّت معینه اند و شامل تمام نقاط سطح که دارای آن خاصیّت اند می باشد .

۱۷۰ - تبصره - از آنچه گفتیم چنین نتیجه می شود - اگر بوسیلهٔ موفق شویم دو نقطهٔ مانند م و د تعیین کنیم که بیک فاصله از و و ج باشند خط م د بر وسط و ج عمود است این تبصره ما را به ترسیم اشکال ذیل هدایت مینماید .

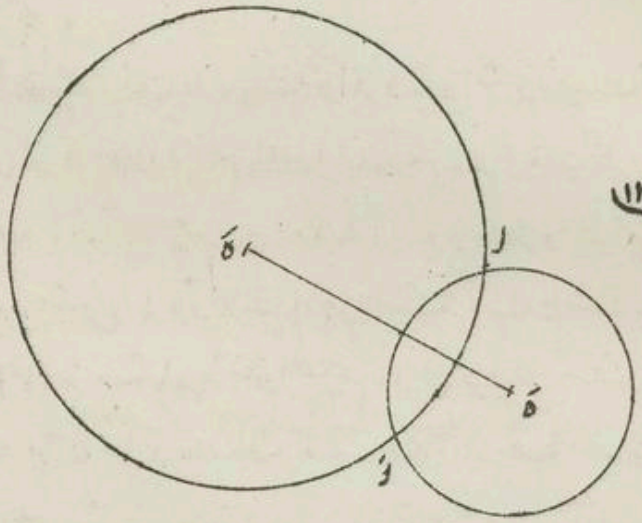
۳ - ترسیمات هندسی

۱۷۱ - تبصره مقدماتی - در تمام ترسیماتی که ذیلاً بیان می کنیم آلات ما فقط پرکار و ستاره است و هیچ گونیا را استعمال نمی کنیم ولی باید دانست که گونیا هم آلت خوبی است و در مواقع عدیده بکار می رود .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 139 of 326

۱۷۲ - میخواهیم وضع نقاط مشترکهٔ دو دائره را معلوم کنیم .

فرض می کنیم دو دائره ه و ه َ در دست است که هر دو از نقطهٔ ا گذشته اند (ص ۱۲۷) قطر مشترک ه ه َ برای



ص ۱۲۷

شکلی که از تقاطع این دو دائره حاصل شده محور تناظر است علاوه بر آن این دو دائره در نقطهٔ ا َ متناظرهٔ نقطهٔ ا نسبت به ه ه َ نیز مشترک می باشند .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 140 of 326

بالعکس اگر دو دائره ه و ه یک دیگر را در دو نقطه ا و اَ قطع کنند مرکز دائره اوّلی یعنی ه بیک فاصله است از دو نقطه ا و اَ و همچنین مرکز دائرهٔ دوّم یعنی هَ - سابقاً دیدیم (ش ۱۷۰) که خط ه هَ عمود است بر وسط ا اَ پس می گوئیم .

قضیّه - نقاط مشترکه دو دائره نسبت بخطی که دو مرکز آنها را بهم وصل میکند متناظره اند.

بعدها خواهیم دید (ش ۲۰۴) که دو دائره متمایز ممکن نیست بیش از دو نقطه باهم اشتراک داشته باشند.

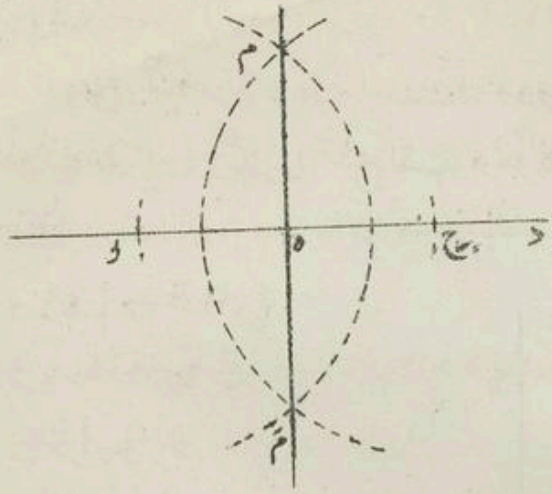
۱۲۳ - مسئله - میخواهیم از نقطهٔ مفروضی بمدد پرکار و ستّاده عمودی بر خط مفروضی فرود آوریم .

نقطهٔ مفروضه ممکن است در روی خط یا در خارج آن باشد پس این مسئله دارای دو حالت است :

اوّلاً - نقطه مفروضه ه روی خط واقع است

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 141 of 326

(س ۱۲۸)



س ۱۲۸

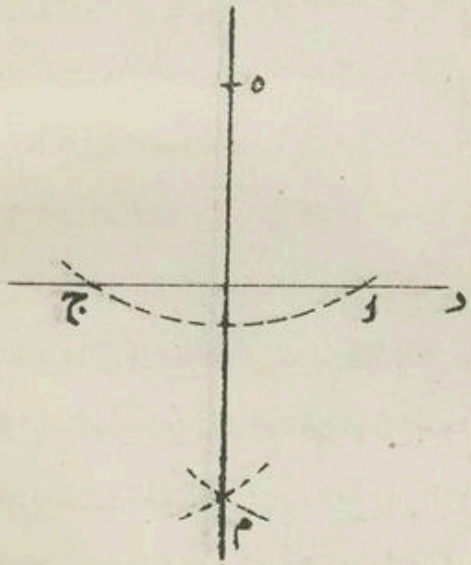
عمود مطلوب
محور تناظر قطعه
خطی است که
خط مفروض شامل
آن است و نقطهٔ
ه وسط آن است
پس با پرکار دو
طول مساوی ه ج و ه ا را از طرفین آن نقطه جدا میکنیم.
حال اگر بتوانیم نقطه بدست بیاوریم که بیک فاصله از
ج و ا باشد آن را به نقطهٔ ه وصل کرده عمود مطلوب
حاصل مے شود برائے این کار کافی است بمرکز ج و ا
دو دائره مساوی رسم کنیم که در نقطهٔ م متقاطع مے شوند.
خط م ه عمود مطلوب است.
این خط شامل نقطهٔ دیگر تقاطع دو دائره یعنی م نیز

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 142 of 326

می باشد.

۱۷۴- تبصره - لازم است که دو دائره در روی صفحهٔ کاغذیک دیگر را قطع کنند و نیز کافی است که قوسها را فقط در حوالی م د م رسم کنیم بالنسبه را آسان آن است که در عملیات شعاع دائره را تقریباً $\frac{3}{4}$ و ج قرار دهیم.

۱۷۵- ثانیاً- نقطه ه در خارج خط مفروض است



(س ۱۲۹)

از نقطه ه مایلهائی رسم می شوند که نسبت به عمود مطلوب متناظرند.

نقطهٔ ه را مرکز قرار داده قوسی بشعاعی رسم می کنیم

س ۱۲۹

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 143 of 326

که خط ما را در دو نقطهٔ و و ج قطع کند حال دو تا از ان مائل ها بدست آمده فقط کافی است که نقطهٔ دیگری غیر از ه مانند م پیدا کنیم که از دو نقطهٔ و و ج متساوی البعد باشند و این کار هم آسان است زیرا که دو قوس بیک شعاع بمرکز و و ج رسم می کنیم تا در نقطهٔ م متقاطع شوند خط ه م عمود مطلوب است (ت ۱۷۰).

۱۷۶ - مسئله - میخواهیم محور تناظر قطعه خط مفروضی را رسم کنیم.

سابقاً این مسئله را در ت ۱۲۳ (س ۱۲۸) حل کرده ایم دو دائره مساوی بمرکز ج و د که در م و مَ یک دیگر را قطع می کنند خط م مَ را تعیین می نمایند که محور مطلوب است.

حل مسئله فوق برای مسئله ذیل نیز مناسب است.

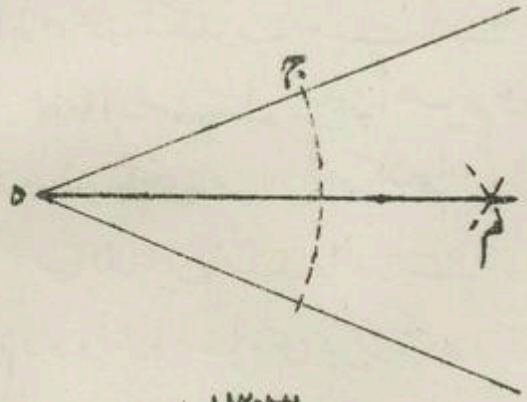
میخواهیم وسط قطعه خطی را معلوم کنیم.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 144 of 326

۱۷۷ مسئله - میخواهیم منصف زاویه را رسم نمائیم.

منصف مطلوب جزء محور تناظر مثلّث متساوی الساقینی است که با زاویهٔ مفروضه ساخته شده باشد.

نقطهٔ ه را مرکز قرار داده قوسی بشعاع اختیاری رسم میکنیم تا اضلاع زاویه را در دو نقطه و و ج قطع کند (س ۱۳۰) مثلّث متساوی الساقین ه ج و بدست می آید.



س ۱۳۰

منصف الزاویه جزء محور قطعه خط و ج است که از آن نقطه ه معلوم میباشد برای یافتن نقطهٔ دیگری دو نقطه و و ج را مرکز قرار داده بیک شعاع دو قوس رسم مینمائیم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 145 of 326

تا در نقطه م متقاطع شوند ه م منصف الزاویهٔ مطلوب است .

مسائل

۱۱- ثابت کنید که اگر مثلثی محور تناظری قبول کند قطعاً محور مذکور از یکی از رؤس آن مثلّث عبور خواهد نمود .

۱۲- مثلثی رسم کنید که ارتفاع و میانهٔ آن یکی باشد بعد ثابت کنید که آن مثلّث متساوی الساقین است .

۱۳- دو میانهٔ مثلّث متساوی الساقینی را از دو زاویهٔ مساوی رسم مے کنیم ثابت کنید که آنها باهم مساویند و در روی محور تناظر یک دیگر را قطع می کنند .

۱۴- دو ارتفاع مثلّث متساوی الساقینی را از زاویهٔ مساوی رسم مے کنیم ثابت کنید که آن دو باهم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 146 of 326

مساوی اند و در روی محور تناظر هم دیگر را تقاطع می نمایند .

۱۵- در روی خط مفروضی نقطهٔ معین کنید که از دو نقطهٔ مفروضه بیک فاصله باشد .

۱۶- در روی دائرهٔ مفروضی نقطهٔ پیدا کنید که از دو نقطهٔ مفروضه بیک فاصله باشد .

۱۷- آیا ممکن است مثلثی دارای مرکز تناظر باشد ؟

۱۸- مثلّث متساوی الساقینی رسم کنید که یک زاویه اش ۲۰° باشد بعد دو زاویهٔ دیگر آن را با تقاله اندازه بگیرید .

۱۹- نقطهٔ معین کنید که بفاصلهٔ مفروضی از دو نقطهٔ مفروضه قرار گرفته باشد .

۲۰- از روی مسئلهٔ سابق مثلث متساوی الاضلاعی رسم کنید که یک ضلعش در دست باشد .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 147 of 326

فصل ششم

خطوطِ متوازیه

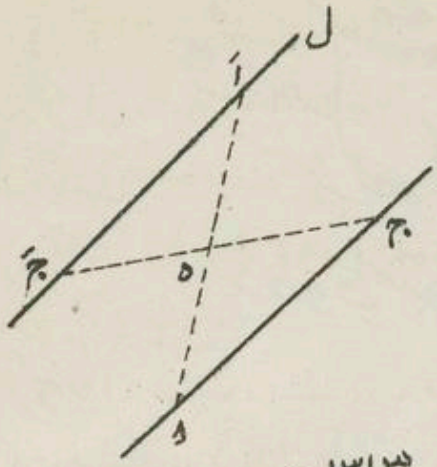
۱۷۸- سابقاً (ع ۱۱۹) دیدیم بعضی خطوط یافت میشوند که ممکن نیست باهم نقطهٔ مشترکه داشته باشند و آنها را خطوط متوازیه نامیدیم حال تعریفی را که آنجا کرده بودیم محض یادآوری در اینجا تکرار مینمائیم.

هرگاه دو خط واقعهٔ در یك سطح یکدیگر را قطع نکنند متوازیند.

۱۷۹- مسئله را که در ع ۱۱۸ حل کرده ما را بحلّ مسئلهٔ ذیل هدایت میکند:

مسئله- میخواهیم از نقطهٔ مفروضی خطی موازی با خطّ مفروضی رسم کنیم.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 148 of 326



س ۱۳۱

برای حل این مسئله کافی است که خط متناظر خط مفروض را نسبت بمرکزی چنان رسم کنیم که خط مرسومه از نقطهٔ مفروضه عبور کند پس فرض می کنیم ل خط مفروض و ا نقطهٔ مفروضه باشد (س ۱۳۱) نقطهٔ ا را بیک نقطهٔ نامعین از خط ل مانند نقطه ا وصل کرده نقطهٔ ه وسط اآ را نشان می کنیم بدین طریق نقطهٔ ا نقطهٔ متناظر نقطهٔ آ نسبت به ه است .

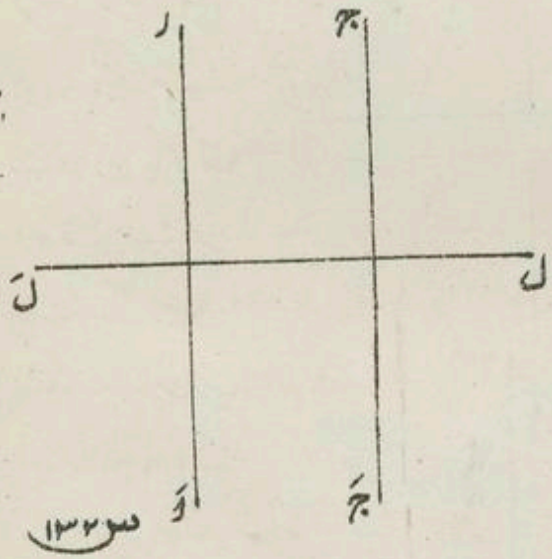
حال باید متناظر نقطهٔ نامعین دیگری از خط ل را مانند ج تعیین نمود و بعد دو نقطه ج و جَ را بهم وصل نمود تا خط مطلوب بدست آید .

۱۸۰ ـ قاعدهٔ فوق مقصود ما را حاصل کرد ولی معلوم نکرد

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 149 of 326

که آیا از نقطهٔ مفروضه خطوط دیگری هم مے توان بموازات خط مفروض ل رسم نمود یا خیر بنا براین خطوط متوازیه را از نقطهٔ نظر دیگری تحصیل مے کنیم.

۱۸۱- دو خط عمود بر یک خط - س ۱۳۲ دو خط اَ وج جَ را نشان می دهد که بر یک خط لَ عمود اند این دو خط باهم موازیند زیرا که اگر موازی نباشند باید نقطهٔ مشترکه داشته باشند آن وقت لازم مے آید که از یک نقطه دو خط



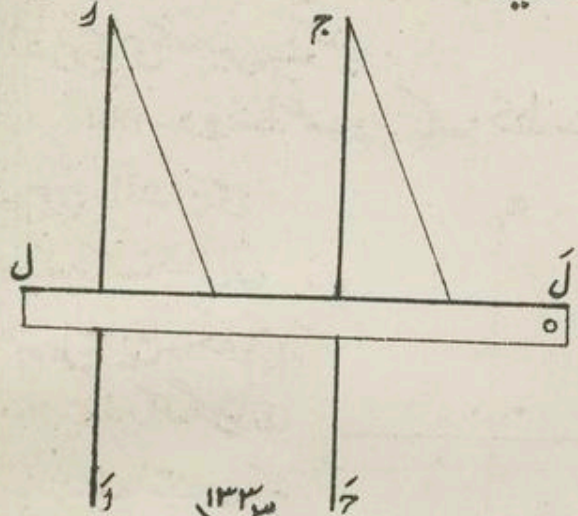
بر خطی عمود کرده باشیم و آن محال است پس می گوئیم:

قضیّه - دو خط عمود بر یک خط موازیند.

۱۸۲- ترسیم خطوط موازیه با گونیا - از آنچه گفتیم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 150 of 326

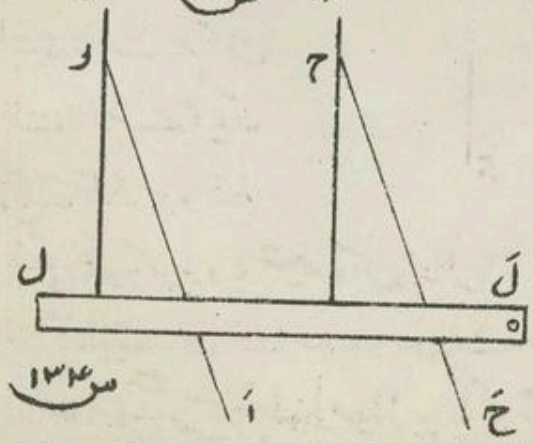
قاعدهٔ سهلی برائے ترسیم خطوط متوازیه توسط گونیا و ستّاره بدست مے آید بدین طریق که ستّاره را در کنار خط مفروض قرار داده گونیا را در کنار آن بلغزانیم



س ۱۳۳

نشان می دهد که چگونه مے توان با گونیا دو خط عمود بر یک خط رسم نمود که باهم موازیند

س ۱۳۳



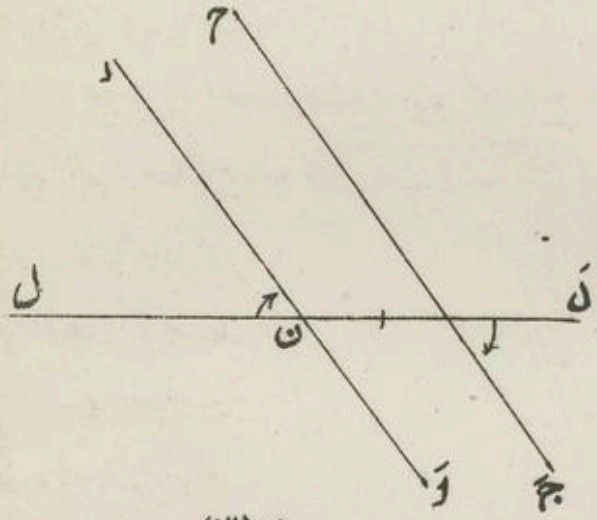
س ۱۳۴

۱۸۳ -

حال فرض میکنیم که در وقت لغزاندن گونیا در کنار ستاره

دو خط در کنار ضلع غیر مجاور بزاویهٔ قائمه رسم کنیم (ص ۱۳۴)
چون گونیا و ستاره را بر داریم ص ۱۳۵ بدست می آید دو
زاویهٔ ا ن ل ر ج د ل باهم مساویند زیرا که هر دو یک
زاویهٔ گونیا هستند (ص ۱۳۵) .

حال ثابت می کنیم که دو خط ا د و ج ج باهم موازیند زیرا که (ع ۱۷۹) آن نسبت به نقطه ه وسط دن متناظرند دو زاویهٔ ل د ج



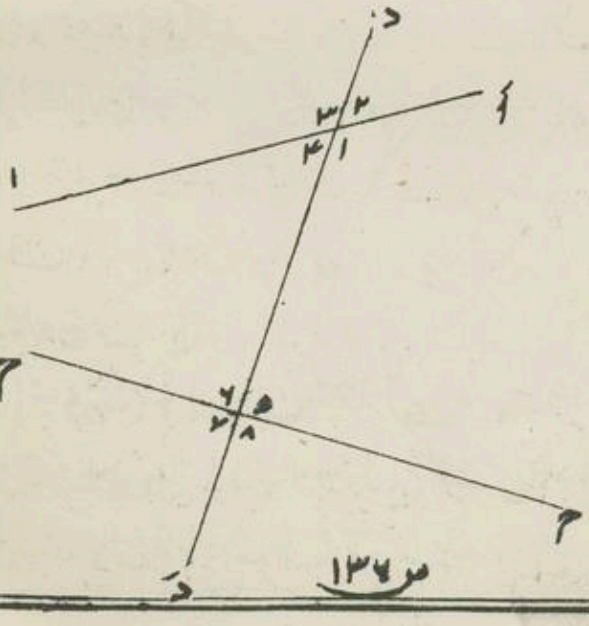
ص ۱۳۵

با زاویهٔ ج د ل چون متقابل بر است با آن مساوی است
بنا بر این با زاویهٔ ا ن ل مساوی است .
حال اگر ه ل و ح ح را بقدر ۱۸۰ درجه بدور نقطهٔ ه

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 152 of 326

دوران دهیم ه ل بر روی ه ل و د بر روی ن واقع خواهد شد
و زاویهٔ ل د ج بر روی مساویش ا ن ل خواهد افتاد
پس ح ج بر روی ا ا منطبق خواهد شد پس معلوم شد
که ح ج با ا ا نسبت بمرکز تناظره متناظرند بنا بر این باهم
موازی می باشند .

۱۸۴ - تعاریف - دو خط ا ا و ج ج را ملاحظه
می کنیم که خط ثالث د د آن ها را قطع کرده است (ص ۱۳۶)



ص ۱۳۶

در اینجا هشت زاویهٔ
بدست می آید که
برای سهولت
نمره ۱ و ۲ و ۳ و ۴
و ۵ و ۶ و ۷ و ۸
در آنها می گذاریم
چهار زاویهٔ ۱ و
۴ و ۵ و ۶ که

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 153 of 326

بین دو خط و وَ و ح ج واقع اند موسومند بزوایای داخله
و چهار زاویهٔ دیگر ۲ و ۳ و ۷ و ۸ را زوایای خارجه مینامند
دو زاویهٔ داخلی او ۶ که در دو طرف و وَ واقعند
و غیر مجاورند موسومند بزوایای متناوبه داخله و دو
زاویهٔ ۴ و ۵ نیز متناوبه داخله میباشند.
دو زاویهٔ خارجی ۳ و ۸ را که در دو طرف و وَ واقع
و غیر مجاورند زوایای متناوبه خارجه می نامند و دو
زاویه ۲ و ۷ نیز متناوبه خارجه مے باشند.
دو زاویهٔ غیر مجاوره را که یکی خارجی و دیگری داخلی و
در یک طرف و وَ باشد زوایای متقارنه مے گویند.
مثلاً دو زاویهٔ ۲ و ۵ و دو زاویهٔ ۱ و ۸ و دو زاویهٔ ۴ و ۷
و دو زاویهٔ ۳ و ۶ باهم متقارنه اند.
۱۸۵- حال به ۱۸۳ برمے گردیم تساوی دو زاویهٔ
متقارنه وَن ل و ج وَل برائے اثبات موازی بودن
آن خطوط کافی است پس چنین بیان می کنیم.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 154 of 326

قضیه - هرگاه دو خط با خط ثالثی زوایای متقاذئه مساوی تشکیل دهند باهم موازیند

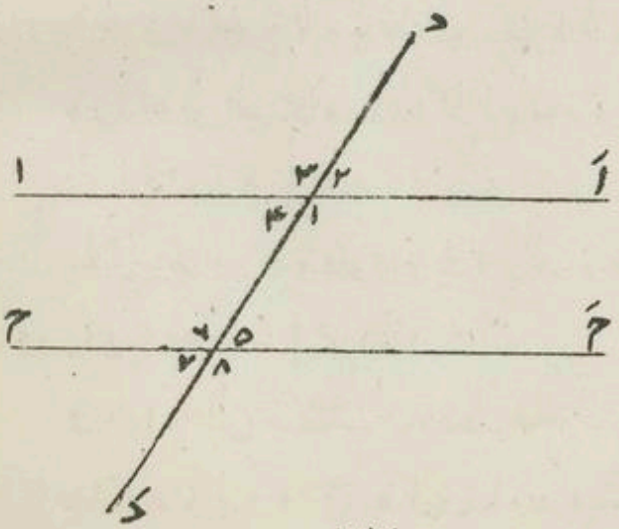
۱۸۶ - بسهولت معلوم مے شود که هریک از فروض ذیل باعث تساوی دو زاویهٔ متقارنه مے گردد:

زوایای متناوبهٔ داخلی مساوی

زوایای متناوبهٔ خارجی مساوی

زوایای داخلی مکمّله واقعه در یک طرف د دَ

مثلاً (س ۱۳۷)



س ۱۳۷

اگر زوایای متناوب داخلی ۴ و ۵ مساوی باشند چون زاویهٔ ۲ با زاویهٔ ۴ متقابل براس است. پس با آن مساوی

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 155 of 326

است وچنین لازم می آید که دو زاویهٔ متقارنه ۲ و ۵ مساوی باشند.

وهمچنین اگر دو زاویهٔ متناوب خارجی مساوی باشند پس ۱ و ۸ مساوی مے گردند.

و بالآخره اگر دو زاویهٔ ۱ و ۵ کمّل یک دیگر باشند زاویهٔ ۸ که متمم زاویهٔ ۵ است با زاویه متقارنهٔ ۱ مساوی است پس مے توانیم چهار قضیهٔ ذیل را بیان نمائیم:

قضیّه. هرگاه دو خط با خط ثالثی:

زوایای متناوبهٔ داخله مساوی تشکیل دهند.

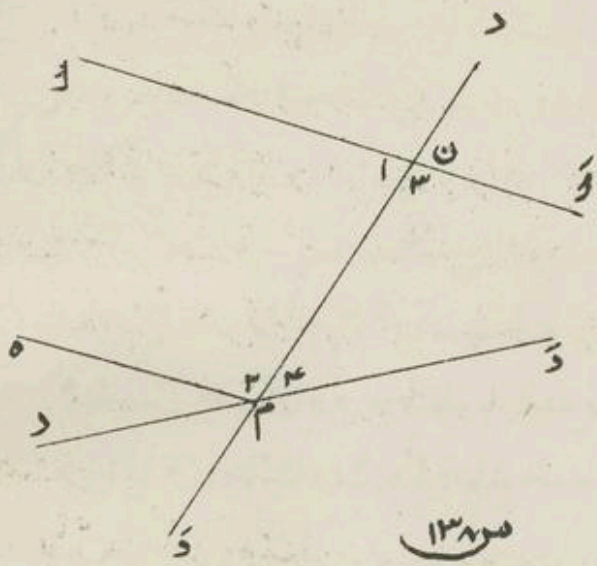
یا زوایای متناوبه خارجه مساوی تشکیل دهند.

یا زوایای متقارنهٔ مساوی تشکیل دهند.

یا زوایای داخلی مکمّله در یک طرف خط تشکیل دهند آن دو خط باهم موازیند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 156 of 326

۱۸۷- دو خط که با خط ثالثی دو زاویهٔ داخلی در یک طرف خط و غیر مکمّله تشکیل می دهند- س ۱۳۸.



س ۱۳۸

دو خط ا ا و د د را نشان می دهد که خط ن ن ثالث دو آنها را قطع کرده است و فرض می کنیم دو زاویهٔ داخله ۱ و ۲ مکمل هم نباشند.

چون دو زاویهٔ ۱ و ۳ همچنین دو زاویهٔ ۲ و ۴ مکمّل یک دیگرند پس مجموع این چهار زاویه مساوی با چهار قائمه است.

اگر مجموع دو زاویهٔ ۱ و ۲ از دو قائمه بیشتر باشد مجموع دو زاویهٔ ۲ و ۴ از دو قائمه کوچک تر خواهد شد و اگر

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 157 of 326

مجموع دو زاویهٔ ۱ و ۲ از دو قائمه کوچک تر باشد مجموع دو زاویهٔ دیگر یعنی ۳ و ۴ از دو قائمه بزرگتر خواهد گردید.
پس همیشه یکی ازین دو مجموع بزرگتر از دو قائمه است.
حال فرض می کنیم که مجموع دو زاویهٔ ۱ و ۲ بزرگتر از دو قائمه باشد.
پس زاویهٔ ۲ بزرگتر از مکمل زاویهٔ ۱ است و اگر نیم خطی مانند م ه رسم کنیم بقسمی که دو زاویهٔ ا ن م و ن م ه مکمل یک دیگر شوند این خط در درون زاویهٔ ۲ واقع شده علاوه بر آن با آن نیز موازی خواهد بود (۱۸۶)
دو نیم خط ن د و م د که در دو طرف م ه واقع شده اند نمی توانند یک دیگر را تقاطع کنند ولی دو امتداد آنها ن د و م د یک دیگر را قطع خواهند کرد پس خاصیت ذیل را که مشهور بمطلب اقلیدس است بیان می کنیم،
۱۸۸ - مطلب اقلیدس - هرگاه دو خط را خط ثالثی قطع کند بقسمی که با آنها زوایای داخلی

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 158 of 326

واقعه در یک طرف خط وغیر مکمّل تشکیل دهد
آن دو خط همدیگر را قطع میکنند .

قضیّه - در حالت سابقه محلّ تقاطع آنها
در طرفی است که مجموع دو زاویه از دو قائمه
کمتر باشد .

۱۸۹ - مطلب اقلیدس یکی از مسائلی است که
نمیتوان اثبات نمود از زمان یونانیان قدیم اقلیدس
مهندس مشهور آن را سوال کرده علاوه بر آنکه تا حال
حال کسی نتوانسته است آن را اثبات کند بالآخره در
این دوره ثابت کرده اند که هرگز ممکن نیست اثبات نمود .

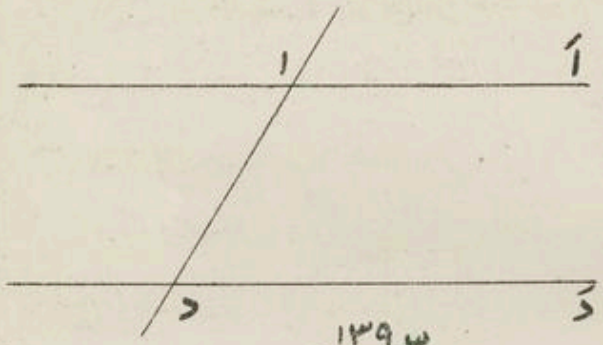
ما فقط بملاحظه این مطلب اکتفا نموده همین قدر میگوئیم
که هرگاه نقطهٔ تقاطع آن دو خط خارج از صفحهٔ کاغذ باشد
هرگونه اثبات تجربهٔ هم محال است .

۱۹۰ - نتیجه مطلب اقلیدس - از مطلب اقلیدس
چنین نتیجه می شود که از نقطهٔ واقعه در خارج خطی ممکن

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 159 of 326

نیست بیش از یک خط موازی با آن خط رسم نمود.

برای ترسیم خطی موازی با خط د دَ از نقطهٔ ا (س ۱۳۹)
ابتدا خط ا د را رسم کرده د^ ا دَ مکمل زاویهٔ ا^ د دَ
را رسم می کنیم.



س ۱۳۹

هر خط دیگری غیر از ا اَ که از نقطهٔ ا و در همان طرف خط ا د رسم شود زاویهٔ احداث میکند که کوچک تر از زاویهٔ د^ ا دَ است بنابراین متمم ا دَ نخواهد بود و د دَ را قطع خواهد کرد پس

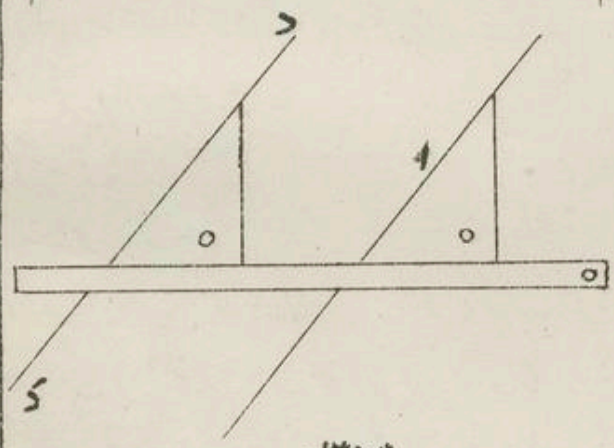
قضیّه - از نقطهٔ واقعه در خارج خطی یک خط میتوان بموازات آن رسم نمود بیش از یک خط ممکن نیست.

۱۹۱ - ترسیم خطوط متوازیه توسط گونیا - سابقاً در

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 160 of 326

۱۸۳ دیدیم که هرگاه گونیا را در کنار ستاره بلغزانیم و در کنار یک ضلع گونیا در دو جای مختلف رسم کنیم آن دو خط با یک دیگر موازی خواهند بود.

این خاصیت را برای ترسیم خطوط متوازیه بکار می برند فرض می کنیم بخواهیم از نقطه ا خطی بموازات دَ رسم کنیم (س ۱۴۰) ابتدا یک ضلع گونیا را در کنار دَ قرار داده ستاره را در کنار دیگر آن میگزاریم



س ۱۴۰

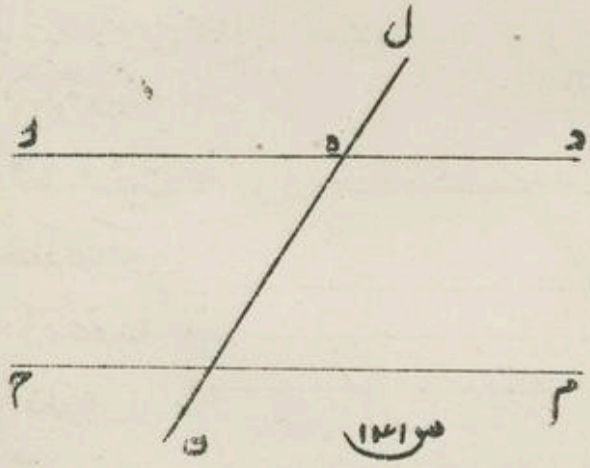
بعد ستاره را ثابت نگاهداشته گونیا را در کنار آن میلغزانیم تا وقتیکه همان ضلع گونیا که در کنار دَ بوده بر نقطهٔ ا بگذرد آن وقت خطی در کنار آن رسم می کنیم که با خط مفروض

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 161 of 326

متوازی است .

در عملیات گونیا را باید طوری قرار داد که در وقت لغزش نقطهٔ ا در کنار گونیا واقع گردد نه در کنار امتداد آن . البتّه قدری عمل هرگونه اشکال را مرتفع خواهد ساخت .

۱۹۲ - نتیجهٔ قضیه ۱۹۰ - دو خط موازی ا د و ج م و خط ثالثی را مانند ل ن فرض می کنیم .



س ۱۳۱

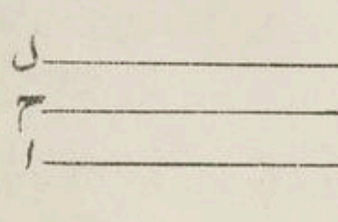
اوّلاً - خط ل ن خط د ا را در نقطهٔ ه قطع می کند (س ۱۳۱) پس بطور حتم ج م را قطع خواهد نمود زیرا که اگر آن را قطع ننماید با آن موازی خواهد بود - و چنین لازم می آید که از نقطهٔ ه دو خط ا د و ل ن با خط م ج موازی باشند و

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 162 of 326

این محال است .

ثانیاً - اگر ل ن موازی با ا د باشد (ص ۱۴۲) آن وقت دو خط ج م و ل ن که هر دو با ا د موازی هستند خود شان نیز باهم موازی خواهند بود زیرا که اگر موازی نباشند - یک دیگر را قطع خواهند نمود آن وقت لازم می آید که از نقطهٔ تقاطع آن ها دو خط بموازات خط ا د رسم شده باشد و این محال است پس حتماً باهم موازیند و چنین می گوئیم ؛

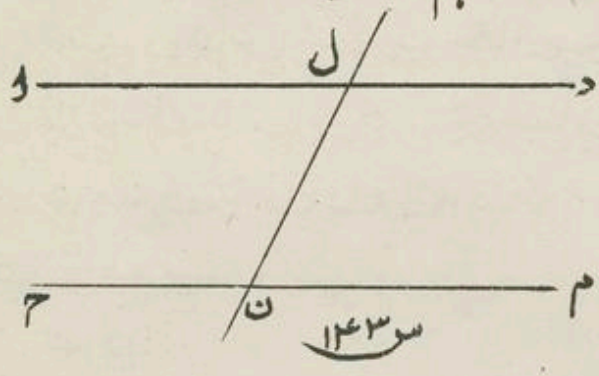
قضیّه - اگر دو خط باهم موازی باشند هر خط که یکی از آنها را قطع کند دیگری را هم قطع خواهد نمود - هر گاه دو خط باخط ثالثی موازی باشند باهم موازیند .



ص ۱۴۲

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 163 of 326

۱۹۳ - عکس قضیهٔ ۱۸۶ - دیدیم که هرگاه زوایائیکه دو خط با خط ثالثی تشکیل میدهند دو بدو مساوی یا مکمل هم باشند آن دو خط باهم موازی اند.



عکس این قضایا نیز صحیح است زیرا که از یک نقطه بیش از یک موازی با خط مفروضی نمی توان رسم کرد مثلاً (س ۱۴۳) ، هرگاه دو خط ا د و ج م باهم موازی باشند خط ل ن دو زاویه داخله در یک طرف خط و مکمل تشکیل مے دهد اگر این زوایا باهم مکمل نباشند لازم می آید که آن دو خط یک دیگر را قطع کنند (ع ۱۸۸) .

از روی ملاحظات ع ۱۱۶ بسهولت می فهمیم که زوایای متناوبهٔ داخلی و متناوبهٔ خارجی و متقارنه نیز باهم مساویند پس .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 164 of 326

قضیهٔ عکس ۱۸۶ - هرگاه دو خط موازی را خط ثالثی قطع کند.

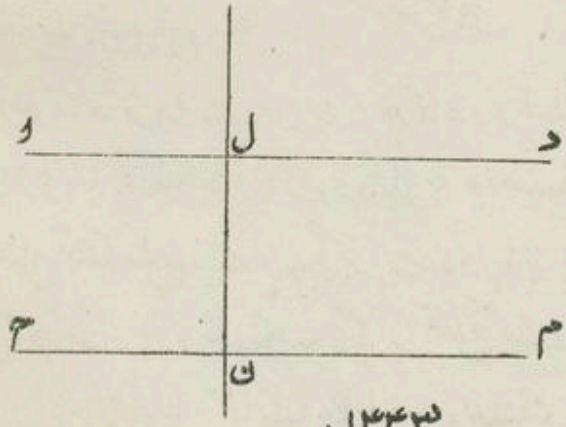
اوّلاً - زوایای متناوبهٔ داخله مساویند.

ثانیاً - زوایای متناوبه خارجه مساویند.

ثالثاً - زوایای متقارنه مساویند.

رابعاً - زوایای داخله واقعه در یکطرف خط قاطع مساویند.

۱۹۴ - اگر یکی از زوایای فوق الذکر قائمه باشد جمیع زوایای دیگر قائمه خواهند بود مثلاً (س ۱۴۴)



س ۱۴۴

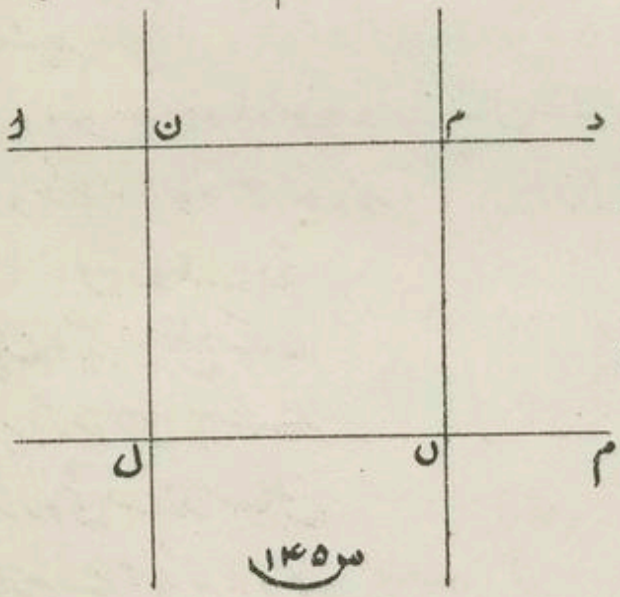
هرگاه ا د و ج م باهم موازی باشند د ل ن بر ا د عمود باشد زوایای واقعه در حول نقطه ن نیز قائمه خواهند بود

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 165 of 326

ول ن بر ج م نیز عمود است پس

قضیّهٔ عکس ۱۸۱ - هرگاه دو خط باهم موازی باشند هر خط که بر یکی عمود باشد بر دیگری نیز عمود خواهد بود.

۱۹۵ مسئله - فرض میکنیم دو خط ا د و ج م باهم موازیند و ك ل عمود بر م ج و م ن عمود بر ا د است میخواهیم خواص این دو خط را معلوم کنیم.



س ۱۴۵

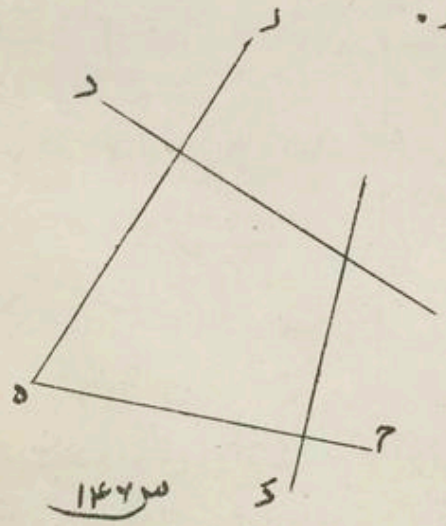
فرض ما این است زوایای دو نقطهٔ م و ل قائمه اند پس زوایای نقطهٔ ن نیز قائمه اند (۱۹۴) ولی آن وقت م ن و ك ل

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 166 of 326

با یک دیگر موازی مے شوند پس
هر گاه دو خط بترتیب بر دو خط موازی عمود
باشند خود شان موازیند .

۱۹۶ - مسئله - میخواهیم خاصیّت دو خطّی
را که بترتیب بر دو خط متقاطعه عمودند معلوم
کنیم .

(س ۱۴۶) دو خط د و دَ را نشان مے دهد که بترتیب بر
دو خط ه ا و ه ج عمودند .



س ۱۴۶

این دو خط د و دَ
یک دیگر را قطع میکنند
زیرا که موازی باشند
از روی مسئلهٔ سابق
لازم مے آید که ه ا و
ه ج هم موازی باشند
و این خلاف فرض است

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 167 of 326

پس

قضیّه - هرگاه دو خط بترتیب بر دو خط متقاطعه عمود باشند خودشان متقاطع اند.

فصل هفتم

تعیین دائره

وضع دو دائره نسبت بیکدیگر و اوتار و قسّی

۱- تعیین دائره

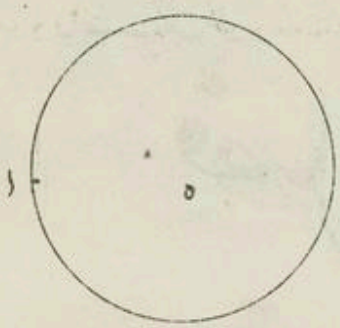
۱۹۷- ما در صفحات ذیل طریقه ترسیم دو دائری را که از نقاط مفروضه عبور میکنند بیان می کنیم.

۱۹۸- مسئله - دائره رسم کنید که از یك یا دو

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 168 of 326

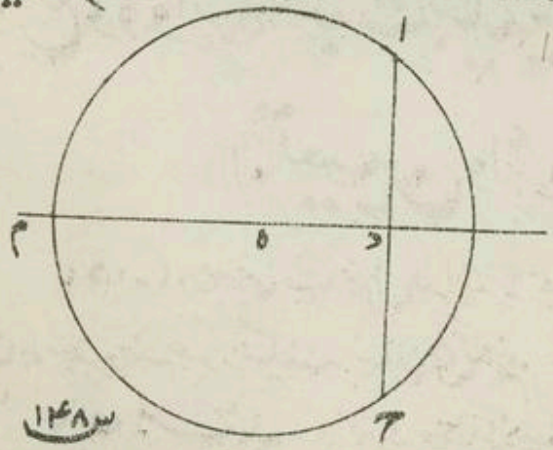
یا سه یا . . . . نقطهٔ مفروضه عبور کند .

اوّلاً - از یك نقطهٔ مفروضه ا - درین حالت باید نقطهٔ مانده برای مرکز دائرهٔ انتخاب نموده بعد بشعاع ه ا دائره رسم کنیم (س ۱۴۷) این مسئله دارای عدّه لایتناهی جواب است زیرا که می توان هر نقطه از سطح را برای مرکز انتخاب نمود .



س ۱۴۷

۱۹۹ - ثانیاً از دو نقطهٔ مفروضهٔ ا و ج . درینحالت (س ۱۴۸) مرکز دائره باید از دو نقطه ا و ج بیک فاصله باشد پس باید در روی عمود وارد بر وسط ا ج باشد (ر ۱۶۹) اگر نقطه

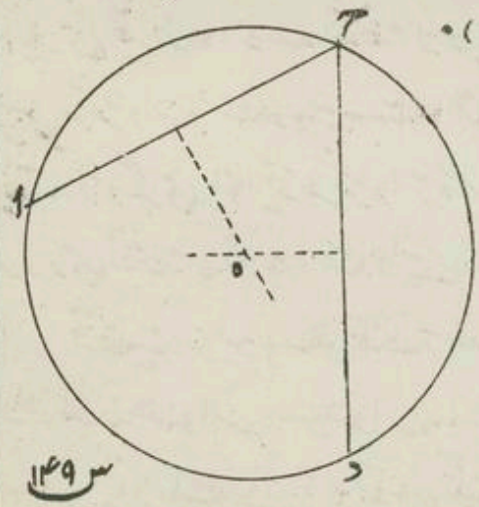


س ۱۴۸

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 169 of 326

غیر معینی مانند ه در روی این عمود دم فرض کنیم و دائره ه
بشعاع ه ا رسم نمائیم از دو نقطهٔ مفروضه خواهد گزشت .
این مسئله نیز عدّه لایتناهی جواب دارد ولی نقطهٔ ه را
نمیتوانیم هرجا که میل مان باشد انتخاب کنیم بلکه مجبوریم آن را
در روی عمود دم د بگیریم .

۲۰۰- ثالثاً از سه نقطه مفروضه ا و ج و د -
بدواً مے گوئیم سه نقطهٔ مفروضه نباید بر استقامت یک خط
باشند زیرا که یک دائره ممکن نیست در بیش از دو نقطه خط
مستقیم را قطع کند (ص ۱۶۴) .



پس فرض می کنیم
سه نقطهٔ ا و ج و د
بر استقامت یک خط
نباشند (ص ۱۴۹)
دائره که بر دو نقطه
ج و ا بگذرد مرکزش

س ۱۴۹

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 170 of 326

بر روی محور تناظر قطعه خط ج ا واقع است و همچنین دائره که بر دو نقطهٔ ج و د عبور کند مرکزش بر روی محور تناظر قطعه خط ج د خواهد بود.

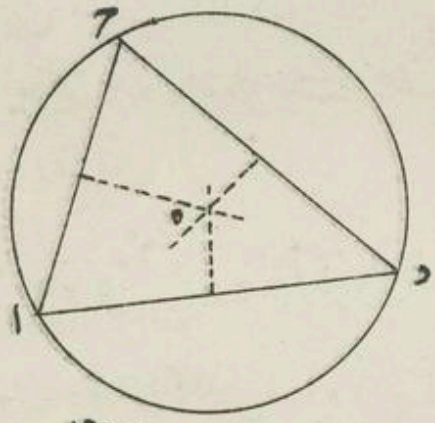
چون دو قطعه خط ا ج و ج د همدیگر را قطع کرده اند پس دو محور تناظر آنها هم که بطور نقطه چین نموده شده اند یک دیگر را در نقطهٔ ه قطع خواهند بود (۱۹۶) پس نقطهٔ ه مرکز دائره مطلوب است که از سه نقطهٔ ا و ج و د خواهد گذشت در اینجا می بینیم که مسئله بیش از یک جواب ندارد زیرا که هر نقطهٔ دیگری غیر از ه از سه نقطهٔ ا و ج و د بیک فاصله نخواهد بود پس مرکز دائرهٔ مطلوبه نیست و از اینجا معلوم می شود که اگر بقاعدهٔ دیگری بتوانیم مرکز دائرهٔ مطلوبه را پیدا کنیم آن نقطه بر روی نقطهٔ ه خواهد افتاد پس می گوئیم:

قضیه - بر سه نقطهٔ غیر واقعه بر استقامت یک خط هموار ه میتوان یک دائره مرور داد و بیش از یک دائره ممکن نیست.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 171 of 326

۲۰۱- رابعاً بیش از سه نقطه - فرض می کنیم بیشتر از سه نقطه مثلاً چهار نقطه ا و ج و د و ل مفروض باشد دائره منحصر بفردی که از سه نقطه ا و ج و د عبور می کند. معمولاً از نقطهٔ چهارم ل مرور نخواهد نمود پس بطریق اولی اگر نقاط دیگری هم باشند بر آنها نخواهد گذشت.

۲۰۲- تبصره - حال مجدداً به ترسیم ۲۰۰ برمی گردیم نقطهٔ ه از دو نقطهٔ ا و د نیز بیک فاصله است پس بر روی محور تناظر قطعه خط ا د واقع است (س ۱۵۰)، پس میگوئیم.



س ۱۵۰

قضیه - خطوطی که بر وسط اضلاع مثلث عمود باشند قاطع یکدیگرند.

۲۰۳- تعریف - دائره که از سه رأس مثلث عبور

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 172 of 326

کند موسوم به دائرهٔ محیطیه اوست مرکز آن نقطهٔ مشترک سه محور متناظر اضلاع مثلث می باشد.

۲۰۴- نقاط مشترکهٔ دو دائره - از آنچه پیش دیدیم معلوم مے شود و دو دائره در بیش از دو نقطه ممکن نیست باهم مشترک باشند زیرا که اگر در سه نقطه باهم اشتراک داشته باشند برهم منطبق می گردند.

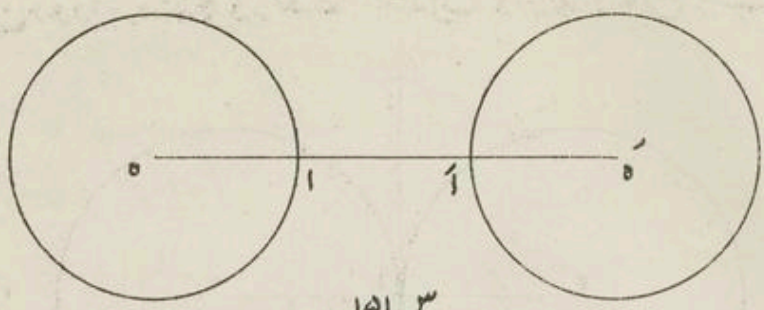
این مسئله را سابقاً در ۱۷۲ هم دیده بودیم و از انرو می دانیم که آن دو نقطهٔ مشترکه نسبت به خط بین المرکزین متناظره اند.

۲- وضع دو دائره نسبت بیکدیگر

حال اوضاع مختلفی که دو دائره ممکن است بهم داشته باشند بیان می کنیم.

۲۰۵- دو دائرهٔ خارجی - دو دائره مانند س ۱۵۱ رسم مے کنیم که یک دیگر را قطع نمی کنند و هریک در خارج دیگری

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 173 of 326



س ۱۵۱

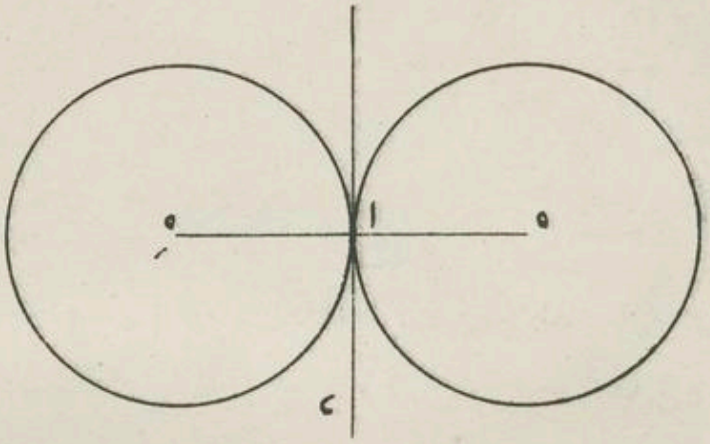
هستند و آن ها را دوائر خارجی می نامند در اینجا می بینیم که قطعه خط بین المرکزین ه هَ از مجموع دو شعاع ه ا و هَ اَ بزرگتر است پس می گوئیم .

قضیّه - هرگاه دو دائره نسبت بهم خارجی باشند فاصلهٔ بین المرکزین بزرگتر از مجموع دو شعاع آنها است .

۲۰۶ - دوائر مماس خارجی - بدون آنکه شعاعهای دوائر را تغییر دهیم نقطهٔ هَ را در روی خط المرکزین می لغزانیم و به نقطهٔ ه آن را نزدیک می کنیم در این لغزش بموقعی میرسیم که نقطهٔ اَ بر روی نقطهٔ ا خواهد افتاد (س ۱۵۲) در این وقت

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 174 of 326

این دو دائره فقط در نقطهٔ اشتراک دارند و ممکن نیست در



س ۱۵۲

نقطهٔ دیگری مشترک باشند زیرا که اگر در نقطه دیگری مانند ج در خارج ه ه مشترک باشند لازم می آید که در نقطهٔ جَ متناظرهٔ ج نسبت به ه ه نیز مشترک باشند آن وقت آن دو دائره در سه نقطه ا و ج و جَ مشترک شده بر روی هم منطبق میگردند و این ممکن نیست .

علاوه بر این خط ا د از نقطهٔ ا بر ه ه عمود شده است

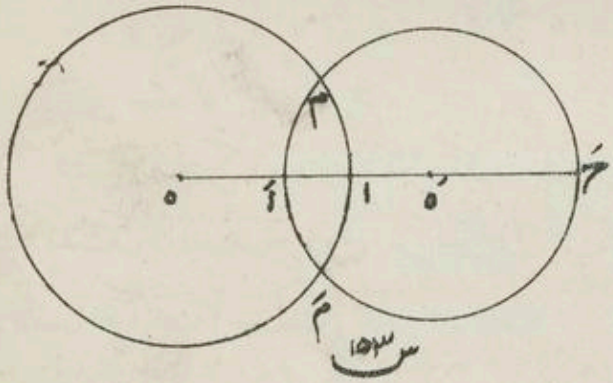
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 175 of 326

بر هر دو دائره مماس است (ص ۱۶۲) .

این دو دائره را مماس خارجی می نامند و بر ما معلوم شد که خط المرکزین مساوی یا مجموع دو شعاع است. پس می گوئیم:

قضیّه - هر گاه دو دائره مماس خارجی باشند فاصلهٔ بین المرکزین مساوی یا مجموع دو شعاع است .

۲۰۷ - دو دائرهٔ متقاطعه - باز هم نقطهٔ ه را به نقطهٔ ه نزدیک می کنیم نقطهٔ ا داخل دائره ه می شود (ص ۱۵۳) و وقتیکه نقطهٔ جَ در خارج دائره ه است می ایستیم



ص ۱۵۳

چون دائرهٔ ه یک نقطه در درون و یک نقطه در بیرون

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 176 of 326

دائرهٔ ه دارد پس آن را در دو نقطهٔ م و مَ قطع مے کند.

از روی فرض مواقع دو نقطهٔ جَ و اَ نامساوی هائے ذیل حاصل مے شود

اَه > ۱ه و حَه < ۱ه

حال بر طرفین این دو نامساوی دو مقدار مساوی میفزائیم و کم مے کنیم.

اَهَ + ۱ه > اَهَ + اَه و حَهَ - ۱ه < حَهَ - حَه

و آن ها را این طور می نویسیم

اَهَ + ۱ه > هَه و حَهَ - ۱ه < هَه

پس مے توانیم بگوئیم:

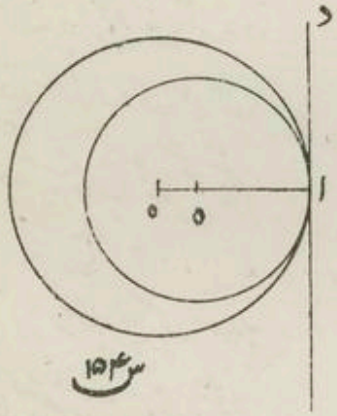
قضیه - هرگاه دو دائره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند فاصلهٔ بین المرکزین بین مجموع و تفاضل دو شعاع آنها است.

۲۰۸ - تبصره - هرگاه بگوئیم عددی بین دو عدد دیگر است مقصود آن است که از عدد بزرگتر کوچکتر و از

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 177 of 326

عدد کوچک تر بزرگتر است .

۲۰۹- دوائر مماس داخلی - در شکل سابق باز نقطه ه َ را به ه نزدیک می کنیم تا حدّی که نقطهٔ ح َ بر روی نقطهٔ ا بیفتند (س ۱۵۴) در این حال دو دائره در نقطه ا فقط مشترک اند و مطابق همان دلیل که در ۲۰۶ دیدیم ممکن نیست در نقاط دیگر مشترک باشند مگر آنکه مساوی بوده بر روی هم منطبق شوند.



س ۱۵۴

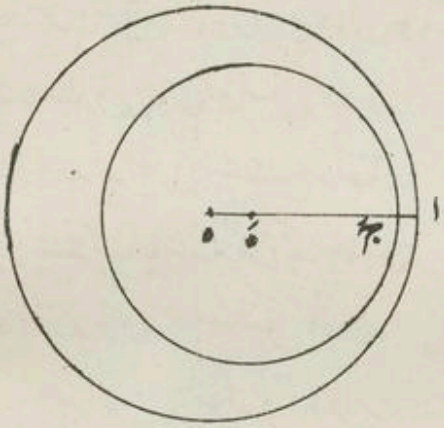
غیر از این همواره دو دائره در یک نقطهٔ ا مشترکند و خط د ا مماس مشترک آنها است و آنها را دوائر مماس داخلی می گویند از روی شکل معلوم است که ه َ ه اختلاف دو شعاع ه ا و ه َ ا است پس می گوئیم :

قضیه - هرگاه دو دائره مماس داخل باشند فاصله بین المرکزین مساوی با تفاضل اشعهٔ آن

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 178 of 326

دوائر است.

۲۱۰ - دوائر داخلی - باز هم در شکل سابق نقطهٔ ه را به ه نزدیک می کنیم نقطهٔ ج وارد دائره ه و دائره کوچک کاملاً در درون دائره بزرگ واقع می گردد



س ۱۵۵

(س ۱۵۵) از روی فرض مسئله چنین می گوئیم

ا ه > ج ه

حال از طرفین یک مقدار کم می کنیم چنین می شود

ح َه - ا ه > ح َه - ح َه

یا

ح َه - ا ه > َه ه

پس می توانیم بگوئیم:

قضیه - هرگاه دو دائره در داخل یکدیگر باشند

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 179 of 326

فاصلۂ بین المرکزین کوچک تر است از تفاضل دو شعاع.

۲۱۱- دوائر متحد المرکز- حال اگر در شکل سابق باز هم حرکت نقطۂ ہ را امتداد دهیم بر روی نقطه ه واقع می شود آن وقت دو دائره متحد المرکز می شوند و آن حالت مخصوصی از قضیّه سابق است اگر از نقطۂ ه باز هم ہ را حرکت دهیم عیناً همان مطالب که گفتیم معکوساً بدست می آید.

۲۱۲- خلاصه- فاصله بین المرکزین را بواسطۂ حرف ف و اشعه دو دائره را بدو حرف س و سَ نمایش میدهیم کلیّه نتایجی را که سابقاً دیدیم در جدول ذیل خلاصه میشود.

دوائر خارجی	سَ + س > ف
دوائر مماس خارجی	سَ + س = ف
دوائر متقاطعه	س + س > ف > سَ - س
دوائر مماس داخلی	سَ - س = ف
دوائر داخلی	سَ - س > ف

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 180 of 326

۲۱۳- قضایای عکس- جدول فوق پنج قضیه را که ثابت کرده بودیم برای ما خلاصه می کند در ستون اوّل فروض و در ستون دوم مستنبطات نوشته شده است- عکس تمام آنها هم صحیح است.

مثلاً هرگاه فاصلهٔ بین المرکزین بین مجموع و اختلاف دو شعاع باشد آن دو دائره متقاطع اند زیرا که اگر خارجی یا داخلی یا مماس داخلی یا مماس خارجی باشند لازم می آید که فاصلهٔ بین المرکزین بین مجموع و تفاضل دو شعاع نباشد پس بطور یقین متقاطع خواهند بود

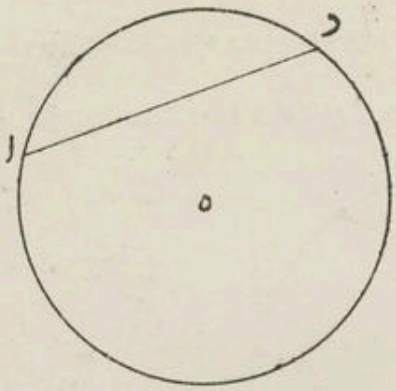
عکس چهار قضیّه دیگر را بهمین طریق ممکن است اثبات کرد و ما آن را بعهدهٔ شاگردان واگذار می کنیم.

۳- اوتار و قسّی

۲۱۴- تعریف - وتر عبارت از قطعه خطی است که دو انتهای آن دو نقطه از دائره باشند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 181 of 326

مثلاً در س ۱۵۶ ا د یک وتر از دائرهٔ ه است و مقابل آن دو قوس می باشند که بدو نقطهٔ ا و د ختم شده اند در این حال مے گویند که قوس ا د موتّر بدو وتر است .



س ۱۵۶

درمیان دو قوس که موتّر بیک وتر ند همواره ما از قوسی که کوچک تر از نیم دائره باشد صحبت می داریم که اشتباهی واقع نشود .

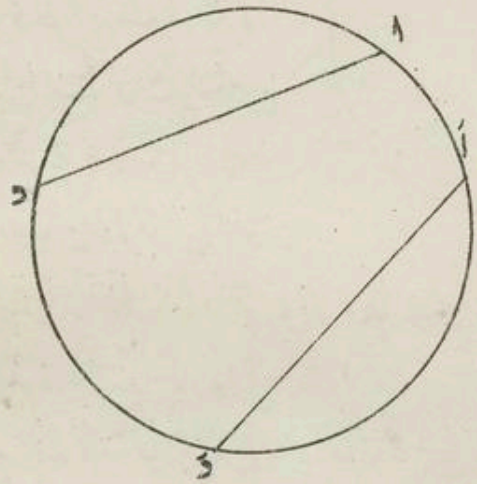
هرگاه اتفاقاً محتاج شدیم که قوس بزرگتر را بخوانیم آن را جداگانه بطور واضح بیان می کنیم .

۲۱۵ - تبصرهٔ اصلی - حال مطالب راجعهٔ به قسی و اوتار واقعهٔ در یک دائره را بیان می کنیم و چون دو دائره مساوی همواره قابل انطباق بر یک دیگر ند پس آنچه در باب اوتار و قسّی یک دائره بگوئیم در دو دائر مساویه هم صدق میکند .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 182 of 326

۲۱۶ - مسئله - می خواهیم نسبت اوتار دو قوس مساوی یک دائره را معلوم کنیم.

فرض می کنیم دو قوس ا د و ا َ د َ باهم مساوی باشند



س ۱۵۷

(س ۱۵۷) چون مساویند میتوانیم آنهارا بر یک دیگر منطبق کنیم ولی در آن وقت اوتار آنها هم بر روی یک دیگر واقع شده باهم مساوی میگردند - پس

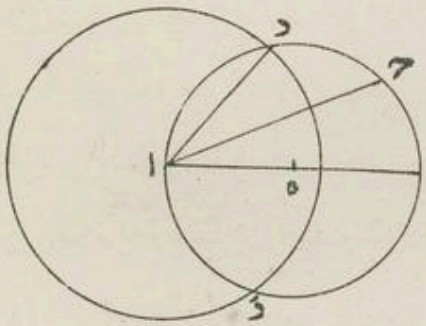
قضیه - هرگاه دو قوس از یک دائره باهم مساوی باشند اوتار آنها نیز با یک دیگر مساویند

۲۱۷ - میخواهیم نسبت اوتاری که در یک دائره

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 183 of 326

مقابل به قسّی غیر مساویند معلوم کنیم .

همان طور که در ع۲۱۴ گفتیم فرض مے کنیم قسّی کوچک تر از نیم دائره اند پس فرض می کنیم که دو قوس ا د و ا ج غیر مساوی باشند (س۱۵۸) که از مبدأ ا شروع شده و در قسمت ا د مشترک می باشند اگر قطر ا ه را رسم کنیم دو نقطهٔ د و ج در یک طرف آن خواهند افتاد زیرا که از نیم دائره کوچکتر اند برای مقایسه بین دو وتر نقطهٔ ا را مرکز قرار داده دائره



س۱۵۸

بشعاع ا د رسم مے کنیم که دائره ه را در د متناظره نقطهٔ د نسبت به ا ه قطع کند (ع۱۷۲) پس این نقطهٔ د از نقطهٔ ج مجزّی و متمایز است .

چون این دو دائره متحد المرکز نیستند پس ممکن نیست برهم منطبق شوند و فقط در دو نقطه د و دَ باهم اشتراک دارند و

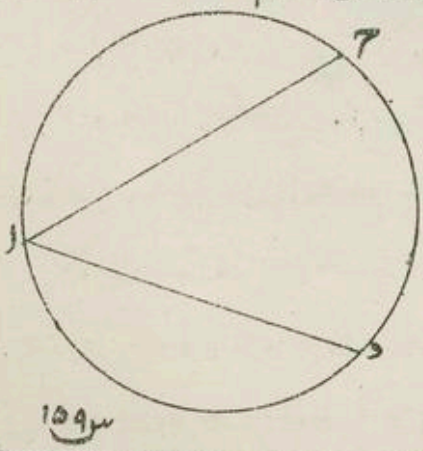
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 184 of 326

نقطهٔ ج در روی دائره ا نیست پس دو وتر غیر مساویند .

چون نقطهٔ ا مرکز دائره است پس قوس د ا د در درون آن است و قوس د ج د در خارج آن واقع می گردد بنابراین نقطهٔ ج در خارج دائره واقع است و فاصلهٔ آن از نقطهٔ ا بزرگتر از فاصلهٔ د تا ا میباشد پس

قضیه - هرگاه در یك دائره یا دو دائره مساویه دو قوس غیر مساوی و هر دو کوچکتر از نیم دائره باشند قوس بزرگتر مقابل است بوتر بزرگتر .

۲۱۸ - تبصره - در قضیه فوق لازم است که آن دو قوس هر دو از نیم دائره کوچک تر باشند چنانکه در س ۱۵۹ دیده می شود قوس ا ج د از قوس ا ج بزرگتر است ولی چون از نیم دائره بزرگتر است وتر مقابل بآن یعنی ا د کوچکتر



س ۱۵۹

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 185 of 326

از وتر اج میباشد.

۲۱۹- قضایای عکس - عکس قضایای فوق بسهولت برما ثابت می شود.

مثلاً هرگاه دو وتر غیر مساوی باشند لازم می آید که قسی مقابل به آن ها نیز غیر مساوی باشند زیرا که اگر مساوی باشند لازم می آید که قسی نیز باهم مساوی باشند و این خلاف فرض است.

و نیز در این حالت وتر بزرگتر مقابل بقوس بزرگتر است زیرا که اگر برعکس باشد لازم می آید که وتر بزرگتر کوچک تر باشد و این نیز خلاف فرض است پس می گوئیم.

قضایای عکس - در یک دائره یا دو دائره مساویه

اولاً - هرگاه دو وتر باهم مساوی باشند دو قوس مقابل بآنها نیز مساویند.

ثانیاً - هرگاه دو وتر باهم غیر مساوی باشند دو قوس مقابل بآنها هم غیر مساویند و قوس بزرگتر

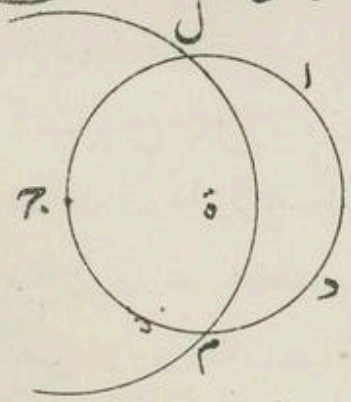
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 186 of 326

مقابل بوتر بزرگتر است.

۲۲۰- تبصره - از آنچه گفتیم معلوم می شود که هرگاه قوسی از صفر ترقی کند تا به نیم دائره برسد وتر آن نیز از صفر ترقی کرده بقطر خواهد رسید پس قطر بزرگترین وتر هر دائره است.

۲۲۱- موارد استعمال آن - میخواهیم قوسی مساوی قوس مفروضی رسم کنیم.

برای حل این مسئله کافی است که وتری مساوی وتر مفروض رسم کنیم قوس مقابل آن جواب مسئله است فرض می کنیم در دائرهٔ ه قوس ا د مفروض است (س ۱۶۰) نقطهٔ مانند ج در روی دائره نشان کرده آن را یک انتهای قوس مطلوب قرار می دهیم و فرض می کنیم نقطهٔ ل انتهای دیگر آن است برای آنکه قوس مطلوب مساوی قوس ا د



س ۱۶۰

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 187 of 326

باشد کافی است که وتر آن مساوی وتر ا د گردد پس نقطهٔ ج را مرکز قرار داده بشعاع مساوی ا د یک دائره رسم می کنیم تا دائرهٔ ما را در دو نقطهٔ ل و م قطع کند آن وقت دو قوس ج ل و ج م دو جواب مسئله است .

۲۲۲- بحث - ما اثبات اینکه دو دائره یک دیگر را قطع می کنند بعهدهٔ شاگردان واگزار می کنیم برای این کار کافی است که ثابت کنند فاصله بین المرکزین بین تفاضل و مجموع دو شعاع است و وتر ا د کوچک تر یا مساوی قطر دائره مفروض می باشد .

۲۲۳- میخواهیم زاویهٔ مساوی زاویهٔ مفروضی رسم کنیم .

از تساوی قسی یک دائره تساوی روایای مرکز مقابل به آنها نتیجه می شود (۸۹) ، پس این مسئله را هم مانند مسئلهٔ سابق حل می کنیم فرض می کنیم ا ه د زاویهٔ مفروضه باشد (س ۱۶۱) ، نقطهٔ ه را مرکز قرار داده بشعاع اختیاری قوسی مانند

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 188 of 326

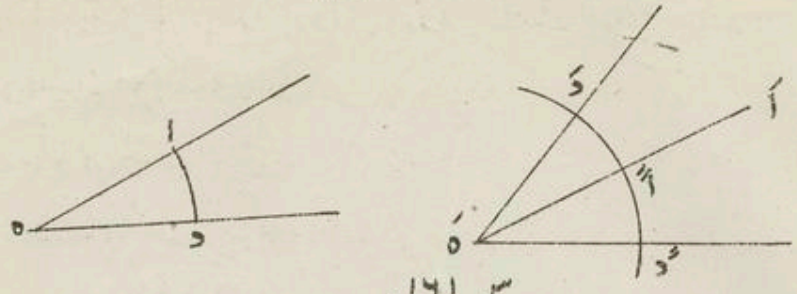
است و دیگری با آن زاویه دارای دو جهت مخالف است پس هرگاه در بیان مسئله جهت آن را نیز معلوم کنیم فقط یکی از آن دو زاویه جواب ما خواهد بود .

۲۲۵ـ مسئله ـ میخواهیم فاصله دو وتر مساوی از یک دائره را تا مرکز باهم مقایسه کنیم .

بدواً ملاحظه می کنیم که اگر وتر از دائره ه مانند ا د مفروض باشد (س ۱۶۲) چون نقطهٔ ه از دو نقطه ا و د بیک فاصله است پس در روی عمود دار و بر وسط آن واقع است . پس این عمود محور تناظر وتر و دائره است و فاصلهٔ مرکز از وتر عمود ه ج است .

حال وتر دیگری مانند ز د را مساوی با ا د ملاحظه می کنیم که وسطش ج و فاصله اش تا مرکز ه ج است بواسطهٔ دوران بدور نقطهٔ قوس ز د بر روی ا د می افتد و قوسها با وترشان بر روی یک دیگر خواهند افتاد و دو فاصله ه ج و ه ج چون برهم منطبق می شوند مساویند پس

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 189 of 326



س ۱۶۱

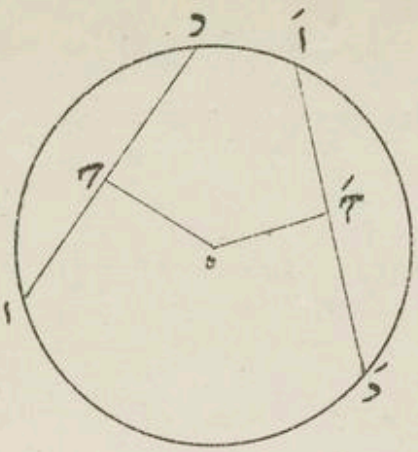
ا د بین اضلاع زاویه رسم می کنیم تا زاویهٔ ما زاویهٔ مرکزی بشود.

حال باختیار نیم خطی مانند ه ا انتخاب کرده نقطهٔ ه را مرکز قرار داده بهمان شعاع قوس دیگری رسم می کنیم تا نیم خط ه ا را در نقطهٔ ا قطع کند پس اگر دو قوس ا د و ا د را مساوی قوس ا د جدا کرده دو خط ه د و ه د را رسم کنیم دو زاویهٔ ا ه د و ا ه د دو جواب مسئلهٔ ما خواهد بود.

(ع ۲۲۱).

۲۲۴- تبصره - هرگاه ه ا و ه ا را دو ضلع مقابل دو زاویه بگیریم یکی از جوابها با زاویهٔ مفروض دارای یکجهت

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 190 of 326



س ۱۶۳

قضیهٔ تسعی مساوی از یک دائره یا دو دائره مساوی متساوی البعد اند از مرکز.

۲۲۶ - قضیهٔ عکس

هرگاه دو فاصله ه ح و ه ح' مساوی باشند بواسطهٔ دوران بر روی یک دیگر می افتند و دو وتر ا د و ا د' که بر آنها عمودند نیز بر هم منطبق شده نقطهٔ ا بر روی د و د' بر روی د واقع خواهد شد پس می توان بگوئیم:

قضیهٔ عکس - هرگاه دو وتر از یک دائره یا دو دائرهٔ مساوی به یک فاصله باشند از مرکز باهم مساویند.

۲۲۷ - از روی قضایای فوق مے توان به سهولت مطالب ذیل را که عکس قضایای سابقه اند اثبات نمود:

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 191 of 326

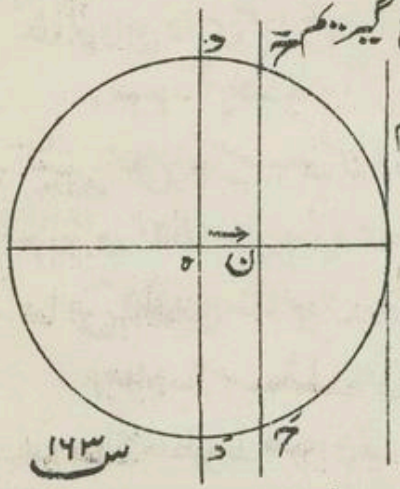
در یک دائره یا دو دائره مساویه :-

اوّلاً - دو وتر غیر مساوی غیر متساوی البعدند از مرکز -

ثانیاً - دو وتر غیر متساوی البعد از مرکز غیر مساویند -

۲۲۸ - میخواهیم دو وتر را که غیر متساوی البعد از مرکز اند با هم مقایسه کنیم -

طبیعی است که برای آنکه فرض ما خوب واضح باشد دو وتر را عمود بر یک شعاع گیریم



س ۱۶۳

در س ۱۶۳ قطر د ه د عمود بر شعاع ه ا است حال وتری مانند ح ر ا بموازات د د تغییر محل میدهیم مرکز آن ن خط ه ا را خواهد پیمود - در این

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 192 of 326

حرکت دو نقطهٔ ج و ج به ا نزدیک می شوند و هر قدر که ه
ن افزوده شود وتر و قوس کوچک می شوند (ع ۲۱۷) پس مینویسیم
نتیجه بگیریم..

قضیه - از دو وتر غیر متساوی الطول در یک
دائره یا در دو دائرهٔ مساویه آنکه بزرگتر است
بمرکز نزدیک تر است -

۲۲۹ - قضیهٔ عکس - عکس این قضیه آسان و مانند
عکس قضایای سابقه اثبات می شود و ما آن را بعهدهٔ
شاگردان وا می گزاریم -

۲۳۰ - تبصره - اگر در شکل سابق بقدری وتر را
تغییر محل بدهیم که نقطهٔ ن بر روی ا بیفتد وتر
ج ج در نقطهٔ ا بر دائره مماس خواهد شد پس معلوم میشود که خط
مماس آخرین مقام وتر در وقت لغزش است -

۲۳۱ - مسئله - قوس های را که از یک دائره
بواسطهٔ خطوط موازیه جدا می شوند متقابله

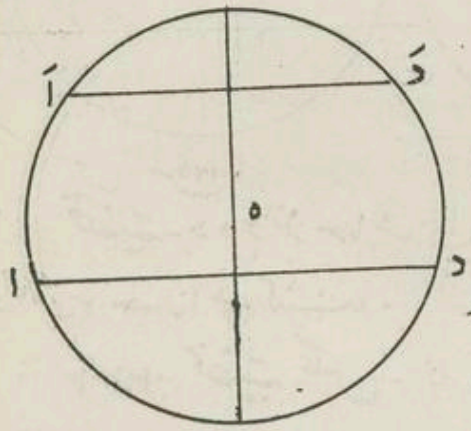
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 193 of 326

کنید.

فرض میکنیم اد و اَدَ دو وتر موازی یک دائره باشند (س ۱۶۳) می خواهیم دو قوس اَاَ و دد َ را باهم مقایسه کنیم.

قطر عمود بر آن ا محور تناظر تمام شکل است (ع ۲۲۵)

پس دو قوس اَاَ و دد که نسبت به آن تناظر اند باهم مساویند (ع ۱۲۳)



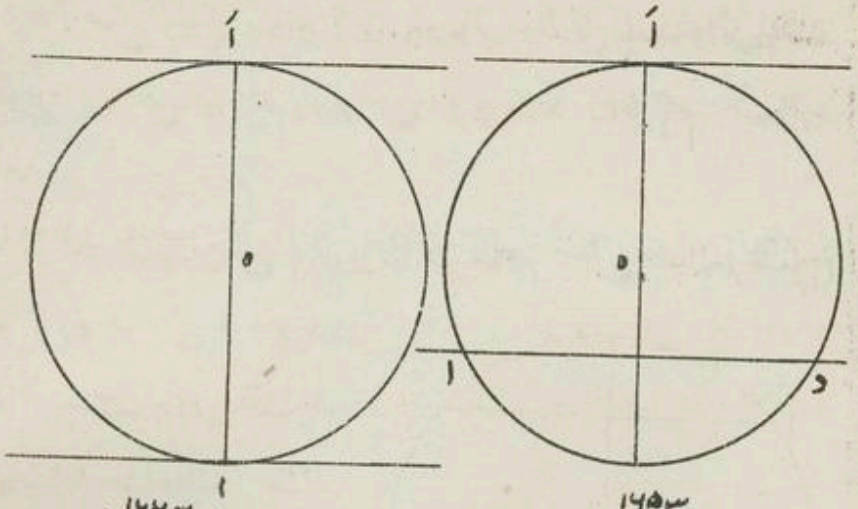
هرگاه یکی از وترها بر دائره مماس شوند خاصیت مزبور نیز ثابت است. (س ۱۶۵)

زیرا که دو قوس اَاَ و دَاَ نسبت به قطر عمود بر دو وتر تناظر و مساویند بالآخره هرگاه دو وتر بر دائره مماس موازی شوند (س ۱۶۶)

س ۱۶۴

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 194 of 326

دو نیم دائره مساوی تعیین می کنند پس



س ۱۶۵ س ۱۶۶

قضیّه - دو وتر موازی دو قوس مساوی از دائره جدا می کنند .

۲۳۲ - قضیّه عکس - در س ۱۶۴ فرض می کنیم وتر اد در دست است در یک طرف آن دو قوس مساوی اا َ و د دَ را جدا کرده دو نقطه اَ و دَ را بهم وصل می کنیم میخواهیم به بینیم این دو وتر نسبت بهم چه طور اند -

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 195 of 326

دو قوس اَ و دَ نسبت بمحور تناظر قطر عمود بر او
متناظر اند و از تا کردن شکل در امتداد قطر واضح میشود.
دو نقطهٔ اَ و دَ نسبت باین قطر متناظر اند و
اَدَ بر قطر عمود است پس اَدَ با د موازی است
(ع ۱۸۱) و چنین بیان می کنیم:

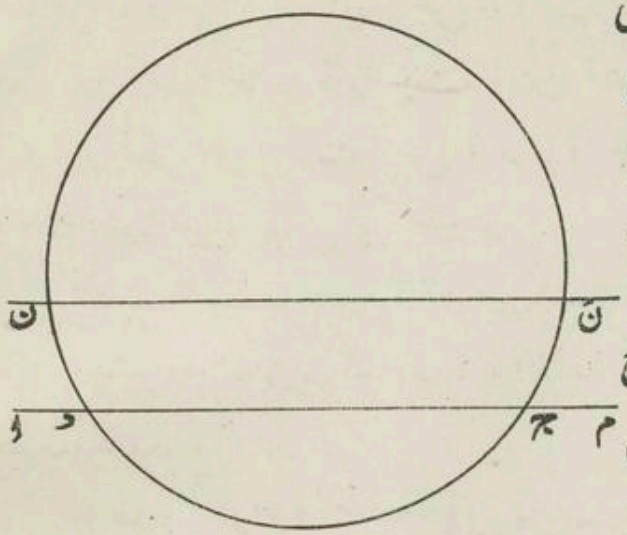
قضیهٔ عکس - دو قوس مساوی از دائره
را میتوان تصور کرد که بواسطهٔ دو وتر موازی
جدا شده اند.

۲۳۳- موارد استعمال آن - از نقطهٔ مفروضهٔ
بمدد پرکار و ستارهٔ خطی موازی با خط
مفروضی رسم کنید.

فرض می کنیم بخواهیم از نقطهٔ ن خطی بموازات
ا م رسم کنیم (س ۱۶۷) دائره رسم می کنیم که از نقطهٔ
ن عبور کرده خط ا م را در دو نقطهٔ ح و د قطع کند.
حال قوس ح ن را مساوی قوس د ن جدا کرده بعد

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 196 of 326

دو نقطهٔ ن و
نَ را بهم وصل
می کنیم ن نَ
خط متوازی
مطلوب است
معلوم است
که قوس ج نَ
را در همان
جهت و ن
باید انتخاب کرد



س ۱۶۷

مسائل

۲۱ - با شعاع مفروضی دائرهٔ رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروضه عبور کند -

۲۲ - دائرهٔ مانند ه و نقطهٔ مانند ا فرض می کنیم بعد نقطهٔ

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 197 of 326

ا را به نقطهٔ از دائره ما نندم وصل می نمائیم ثابت کنید که هرگاه خط ام از مرکز بگذرد بزرگترین یا کوچکترین خطی است که بین آن دو نقطه ممکن است رسم نمود۔

۲۳- از مثلثی دو ضلع و شعاع دائرهٔ محیطیه در دست است آن را رسم کنید.

۲۴- نقطهٔ در درون دائره مفروضی است وتری رسم کنید که آن نقطه وسطش باشد۔

۲۵- آیا دو وتر دائره ممکن است یک دیگر را در وسط هم قطع کنند.

۲۶- دو وتر مساوی که از یک مبداء مشترک شروع می شوند نسبت به قطری که ازان مبداء مشترک گذشته باشد متناظر اند۔

۲۷- از دو انتهای قطر اَ دو وتر مساوی اد و اَدَ رسم می کنیم ثابت کنید که خط د دَ هم یک قطر دائره است۔

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 198 of 326

فصل هشتم

زوایائیکه اضلاع شان باهم موازی یا برهم عمودند

مجموع زوایای کثیر الاضلاع محدّب

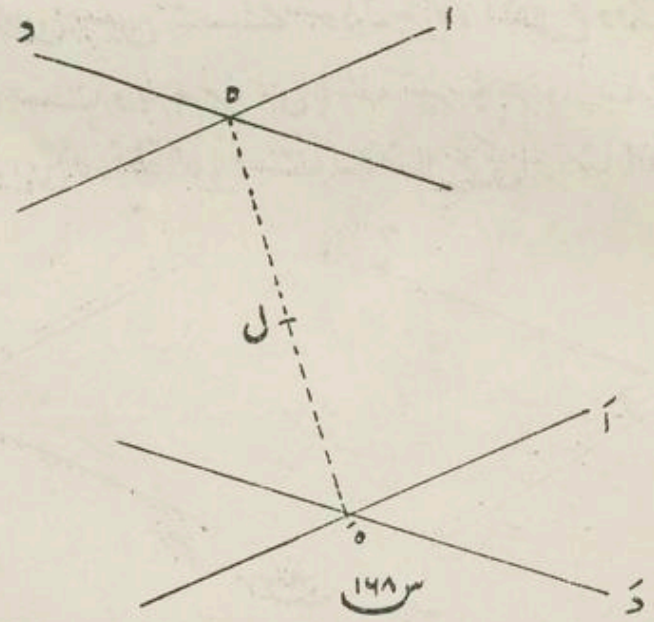
۱- زوایائیکه اضلاع شان باهم موازی یا برهم عمودند

۲۳۴- میخواهیم دو زاویه را که اضلاع شان باهم موازیند مقایسه کنیم -

بدواً دو خط ا و د رسم میکنیم که یک دیگر را از نقطهٔ ه قطع کنند (س ۱۶۸) بعد خط آ را بموازات ا و خط دَ را بموازات د رسم کنیم این دو خط اخیر در نقطهٔ هَ یک دیگر

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 199 of 326

را تقاطع می نمایند حال چهار زاویهٔ را که در حول نقطهٔ ه تشکیل شده با چهار زاویهٔ که در حول نقطهٔ ه تشکیل شده اند. مقایسه می کنیم. می دانیم که دو خط ا و اَ نسبت به نقطهٔ ل وسط ه هَ متناظر اند و همچنین دو خط د و دَ نسبت به آن نقطه متناظر می باشند.



س ۱۶۸

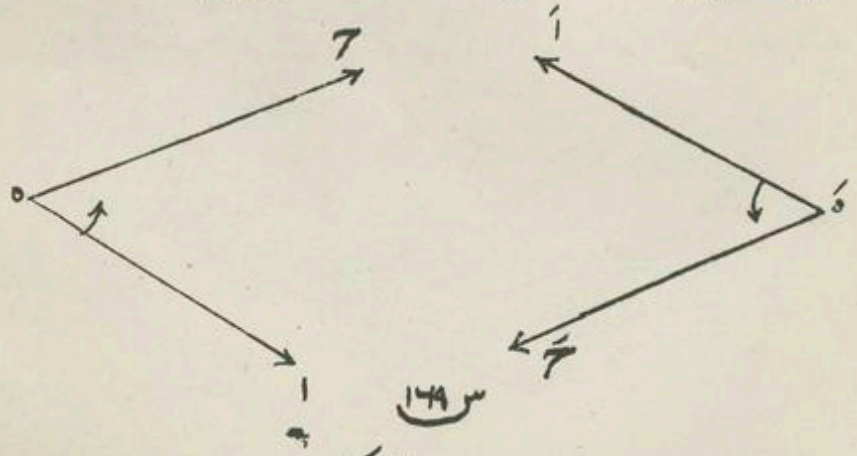
پس چهار زاویهٔ که در حول نقطهٔ ه تشکیل شده با چهار

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 200 of 326

زاویۂ کہ در حول نقطۂ ہ تشکیل گردیدہ باہم متناظر و بنابرین باہم مساویند۔

حال اگر نقطۂ دو زاویہ را ملاحظہ کنیم می دانیم ع۱۲۴ کہ ہر گاہ اضلاع دو زاویہ متوازی و در جہت مختلف باشند باہم مساویند (س۱۶۹)

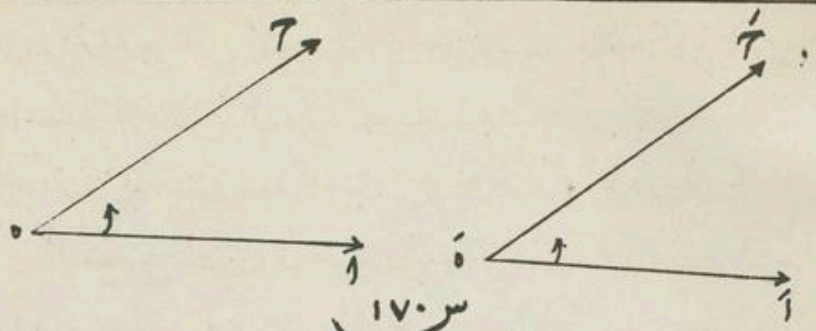
و ازان چنین نتیجہ مے شود کہ ہر گاہ اضلاع دو زاویہ در یک جہت و باہم موازی باشند نیز باہم موازیند زیرا کہ برائے این کار فقط کافی است کہ اضلاع یکی از آنہا را امتداد



س۱۶۹

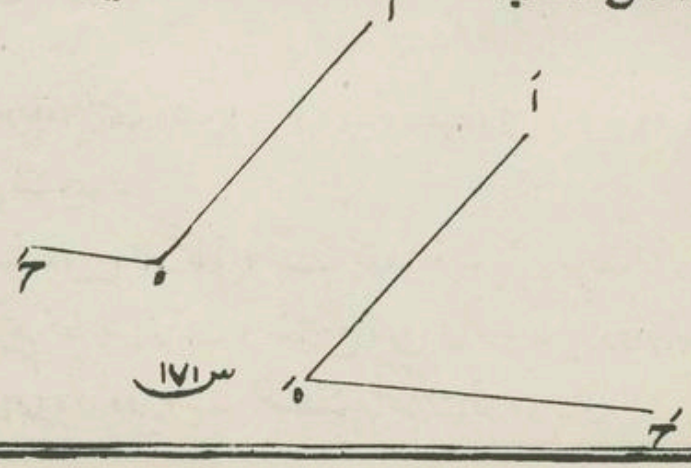
دہیم تا زاویۂ متقابل برأسش تشکیل شود (س۱۷۰) در بین

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 201 of 326



س ۱۷۰

دو حالت دو زاویه دارای یک جهت اند بالآخره
س ۱۷۱ نشان مے دهد دو زاویه را که دو ضلع آنها
باهم موازی و در یک جهت اند ولے دو ضلع دیگر
موازی و در دو جهت مختلف اند و در این حالت



س ۱۷۱

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 202 of 326

آن دو زاویه مکمل یک دیگر اند۔ و برای ثبوت آن کافی است که اضلاع یکی از آنها را در طرف دیگر رأس امتداد دهیم از آنچه گفته شد قضیهٔ ذیل نتیجه می شود:

قضیّه۔ دو زاویه که اضلاع آنها دو بدو باهم موازی و هر دو در یک جهت یا هر دو در جهات مختلف باشند باهم مساوی و دارای یک جهت اند ولی در زاویه که اضلاع آنها دو بدو باهم موازی ولی دو ضلع آنها دارای یک جهت و دو ضلع دیگر دارای دو جهت مختلف اند مکمل یکدیگر اند۔

۲۳۵۔ میخواهیم زاویهٔ مساوی زاویهٔ مفروضی رسم کنیم۔

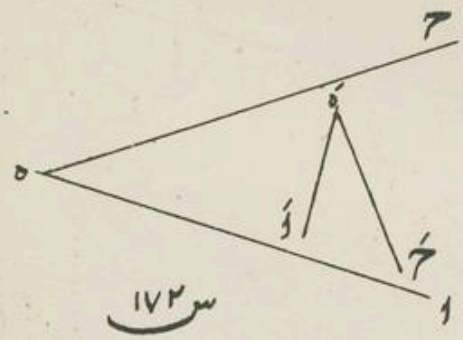
برای این کار کافی است نقطهٔ فرض کرده بعد از آن نقطه دو نیم خط بموازات اضلاع آن زاویه یا هر دو در یک جهت یا هر دو در دو جهت مختلف رسم کنیم۔

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 203 of 326

این جواب مانند جواب ع۲۲۳ خوب نیست زیرا که بمیل خود نمیتوانیم یک ضلع آن را انتخاب کنیم بلکه باید آن را از میان خطوط موازی با اضلاع زاویه انتخاب نمائیم۔

۲۳۶۔ میخواهیم دو زاویه را که اضلاع شان برهم دو بدو عمود اند مقایسه کنیم۔

فرض میکنیم دو زاویهٔ ا ه ح و ا َ ه َ ح در دست است که ضلع ا َ ه َ بر ا ه و ح َ ه َ بر ح ه عمود است (س ۱۷۲)۔



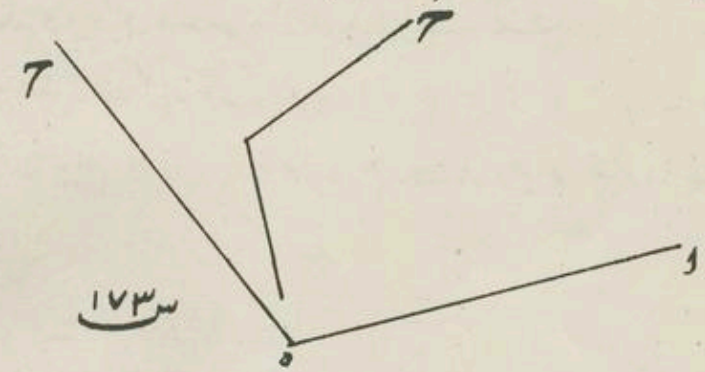
س ۱۷۲

زاویهٔ ا َ ه َ ح را بدور نقطهٔ ه َ بقدر ۹۰ دوران میدهیم اضلاع آن با اضلاع زاویهٔ ا ه ح موازی خواهند شد پس آن دو زاویه باهم یا مساوی اند یا مکمل یک دیگر اند۔

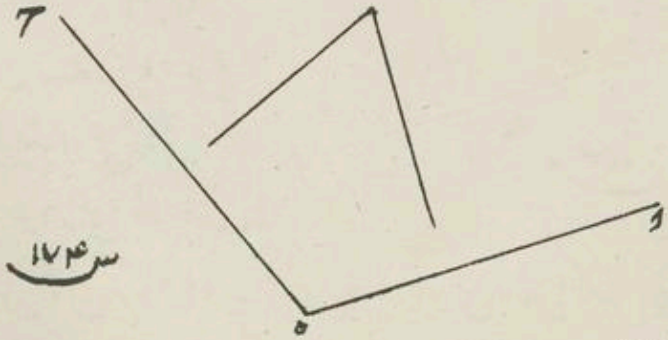
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 204 of 326

اگر مانند س۱۷۲ هر دو حادّه اند باهم مساویند واگر مانند س۱۷۳ هر دو منفرجه اند باز هم مساویند۔

بالآخره اگر مانند س۱۷۴ یکی حاده و دیگری منفرجه است مکمّل یک دیگر اند پس می گوئیم۔



س۱۷۳



س۱۷۴

قضیّه۔ هرگاه اضلاع دو زاویه دو بدو بر هم عمود

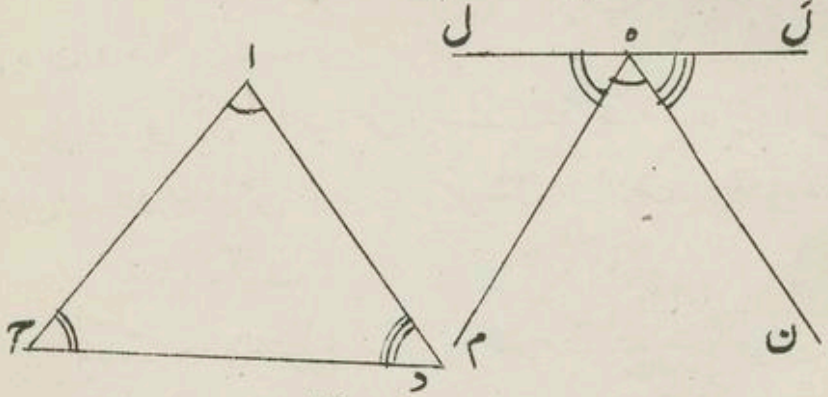
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 205 of 326

باشند باهم مساویند مگر آنکه یکی از آنها حادّه
ودیگری منفرجه باشد درین حالت مکمل یکدیگرند

۲ مجموع زوایای کثیر الاضلاع محدّب

۲۳۷- مسئله میخواهیم مجموع زوایای یک
مثلّث را معلوم کنیم -

مثلّث ا ج د مفروض است (س ۱۷۵) میخواهیم سه
زاویهٔ آن را باهم جمع کنیم -



س ۱۷۵

نقطهٔ مانند ه فرض کرده از آن نقطه دو نیم خط ه م وه ن

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 206 of 326

را بموازات (ا ح) و (ا د) رسم می کنیم زاویه م ه ن مساوی بازاویهٔ ا است (ع ۲۳۴)۔

حال از نقطهٔ ه خطّ ه ل را بموازات د ح رسم میکنیم چون ه م موازی و در خلاف جهت ج ا و ه ل موازی و در خلاف جهت ح د است پس زاویهٔ ل ه م مساوی زاویهٔ ج است۔

حال از نقطهٔ ه نیم خط ه لَ را بموازات ح د رسم می کنیم بدلیلی که در تساوی زاویهٔ ح بال ه م گفتیم دو زاویهٔ لَ ه ن و د هم بایک دیگر مساویند۔

از روی نتیجهٔ اقلیدس (ع ۱۹) دو نیم خط ه ل و ه لَ چون هر دو موازی با د ح هستند در امتداد یک دیگرند۔

پس میتوان گفت۔

قضیّه۔ مجموع سه زاویه مثلث مساوی با دو قائمه است۔

۲۳۸۔ از قضیهٔ فوق بعضی خواص مثلث را بسهولت

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 207 of 326

بدست می آوریم ازین قرار۔

اوّلاً۔ ممکن نیست که مثلثی دارای دو زاویه منفرجه یا قائمه باشد۔

زیرا که آن وقت مجموع سه زاویه از دو قائمه تجاوز خواهد کرد۔

ثانیاً۔ اگر یک زاویهٔ مثلثی قائمه باشد مجموع دو زاویهٔ دیگر نیز یک قائمه خواهد بود و آن دو متمم یکدیگر اند۔

ثالثاً۔ هرگاه مثلثی متساوی الاضلاع باشد هر یک از زوایای آن ۶۰ درجه است۔

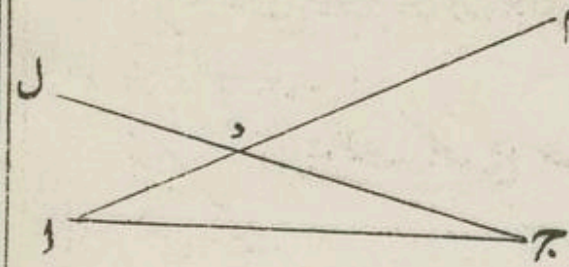
این خاصیت ترسیم ۱۰۴ را اثبات می نماید۔

رابعاً۔ هرگاه دو زاویه در دست باشد که مجموع شان از دو قائمه کمتر باشد همواره میتوان مثلثی رسم نمود که دارای آن دو زاویه باشد زاویهٔ سیّم آن نیز معلوم است۔

نتیجه مسطح

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 208 of 326

فرض می کنیم دو زاویه ا و ج در دست باشد (س ۱۷۶)
کافی است که قطعه م
خطی مانند ا ج رسم
کرده از نقطهٔ ا زاویه
مانند م ا ج مساوی ج
یا ا ا از نقطهٔ ج
زاویهٔ مانند ل ج ا
مساوی یا ج در یک طرف ا ج رسم نمائیم -
دو خط ج ل و ا م در نقطهٔ د یک دیگر را قطع میکنند
(مطلب اقلیدس) و مثلث ا ج د جواب مطلوب است
عدّه جواب بلے این مسئله لا یتناهی است زیرا که قطعه
خط ا ج را بمیل خود بهر طول که خواسته باشیم ممکن است
انتخاب کنیم ولی زوایاے تمام مثلثات مرتباً باهم مساویند -



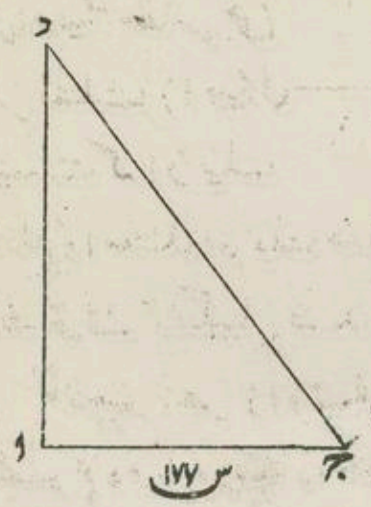
س ۱۷۶

۲۳۹ - تعریف - مثلثی را که یک زاویه اش
قائمه باشد - مثلث قائمه الزاویه مینامند

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 209 of 326

وضلع مقابل بزاویۂ قائمہ را وتر میگویند۔

س ۱۷۷ مثلث قائمۃ الزاویۂ ا ج د را نشان میدہد زاویۂ ا قائمہ و ضلع د ج وتر آن است چونکہ وتر نسبت بہر یک از دو ضلع دیگر مائل است پس از آن ہا بزرگتر است (ع ۱۶۰)



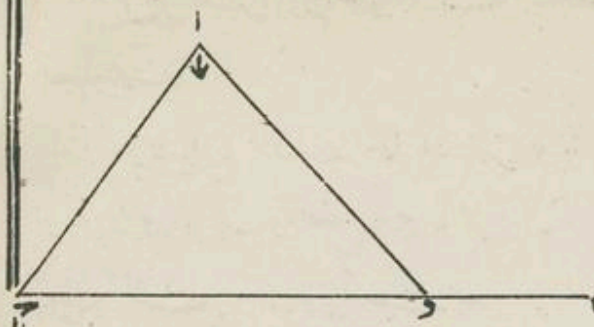
۲۴۰۔ زاویۂ خارجی مثلث

مثلث ا ج د مفروض است (س ۱۷۸) ضلع ج د را در آن طرف نقطہ د امتداد میدہیم۔

زاویۂ ا د ل مکمل زاویۂ ا د ج از مثلث است۔ وچون مجموع دو زاویۂ ا و ج نیز مکمل ہمان زاویۂ است پس زاویۂ خارجی ا د ل مساوی است با مجموع دو زاویۂ

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 210 of 326

داخلی و وج پس
می گوئیم -



س ۱۷۸

تعریف

زاویۂ خارجی
هر مثلث زاویۂ ل
ایست که از یک
ضلع و امتداد یک ضلع دیگر در آن طرف راس
مشترک تشکیل شده باشد -

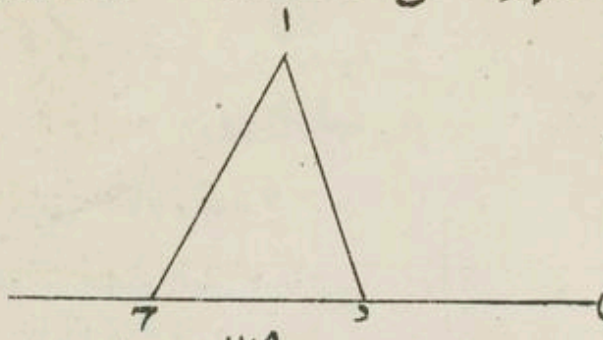
قضیه - هر زاویۂ خارجی مثلث مساویست
با مجموع دو زاویۂ داخلی که با آن مجاور نیستند -

۲۴۱ - تبصره - معلوم است که هر زاویۂ خارجی بزرگتر
است از هر یک از دو زاویۂ که با آن مجاور نیستند -

۲۴۲ - کثیر الاضلاع محدب - مثلث ا ج د
مفروض است (س ۱۷۹) اگر خط غیر محدود ج د را رسم
کنیم تمام مثلث در یک طرف آن خط خواهد افتاد -

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 211 of 326

این مسئله در هر سه ضلع مثلث ثابت است پس میگوئیم که مثلث کثیر الاضلاع محدّبی است و بطور عمومی ل میگوئیم -



س ۱۷۹

کثیر الاضلاع محدّب آن است که چون یک ضلع آن را از هر دو طرف امتداد دهیم تمام کثیر الاضلاع در یک طرف آن واقع شود -

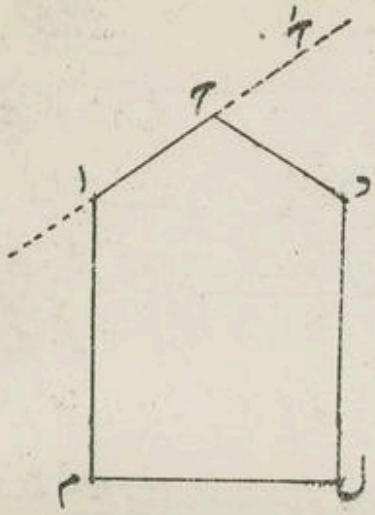
بعبارة اخری اگر هر ضلع کثیر الاضلاع را امتداد دهیم خطی که حاصل می شود در کثیر الاضلاع داخل نشود آن کثیر الاضلاع محدّب است -

مثلاً کثیر الاضلاع ا ج د ل م (س ۱۸۰) محدب است و کثیر الاضلاع ا ج د ل محدب نیست (س ۱۸۱)

۲۴۳ - زاویهٔ خارجی کثیر الاضلاع محدّب - ضلع

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 212 of 326

ا ج را تا ج' امتداد می دهیم (س ۱۸۰)



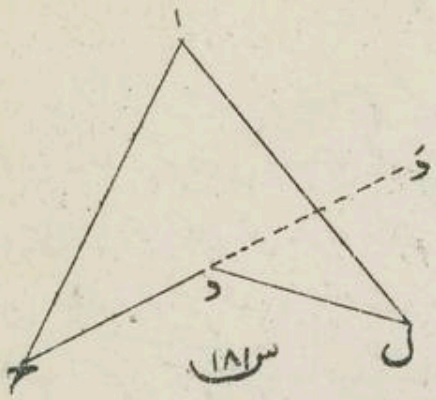
س ۱۸۰

اگر کثیر الاضلاع یا محدب باشد نیم خط ج ج' در خارج آن خواهد افتاد زاویهٔ ج ج د را زاویهٔ خارجی مینامیم پس زاویهٔ خارجی هر کثیر الاضلاع محدب از امتداد یک ضلع با ضلع مجاور تشکیل میشود۔

معلوم است که وجود زاویهٔ خارجی بسته بمحدب بودن کثیر الاضلاع است چنانکه نمی توان گفت زاویهٔ د ل زاویهٔ خارجی است (س ۱۸۱)

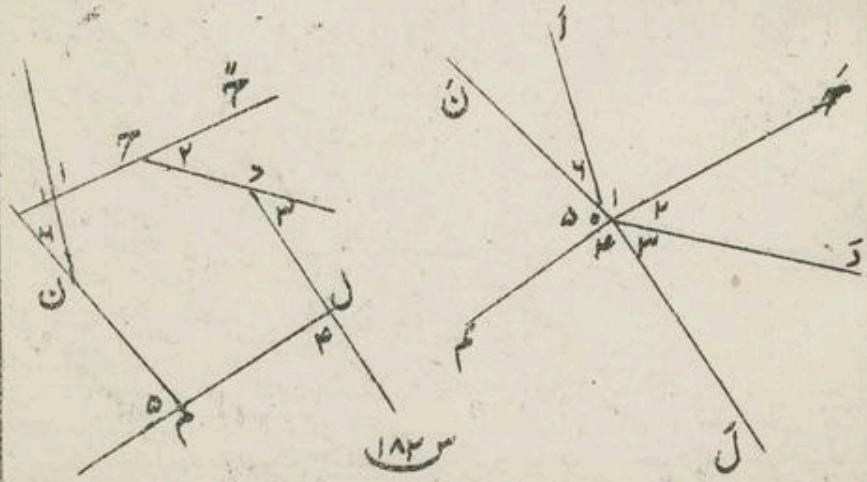
۲۴۴ - مسئله - هرگاه محیط کثیر الاضلاع محدبی را در یک جهت معینی بپیمائیم و چون بسر رأس برسیم آن را در همان جهت امتداد دهیم یک عدّه

زوایای خارجی
بدست می آید
میخواهیم مجموع
آن زوایا را معلوم
کنیم.



س ۱۸۱

کثیر الاضلاع
ا ج د ل م ن مفروض
است (س ۱۸۲) از طرف ا بسمت ج محیط آن را پیموده اضلاع



س ۱۸۲

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 214 of 326

را امتداد داده و زوایاے خارجی را نمرۂ ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و
۶ می گزاریم حال می خواهیم مجموع این زوایا را معلوم کنیم
همان قاعده که دریافتن مجموع زوایای مثلث بکار بردیم
درین جا هم بکار می بریم۔ یعنی نقطۂ مانده فرض کرده از
آن نقطه دو نیم خط ه جَ و ه دَ را بموازات ج جً و ج د در یک
جهت رسم می کنیم زاویۂ حاصله مساوی با زاویۂ ۱ است برای
ساختن زاویۂ مساوی با زاویۂ ۲ نیم خط ه ر دست است فقط از نقطۂ ه نیم
خطی بموازات د ل در همان جهت رسم مینمائیم و بهمین طریق هم خط ها دیگر را
رسم میکنیم تا ه جَ و ه دَ و ه لَ و ه مَ و ه نَ و ه لَ موازی با
ا ج و ج د و د ل و ل م و م ن و ن ا بدست می آیند
پس معلوم می شود که تمام زوایاے خارجی کثیر الاضلاع
بدور نقطۂ ه جمع شده جاے خالی باقی نمانده است از
روے شکل قضیۂ ذیل را بیان می کنیم۔

قضیه۔ هرگاه اضلاع کثیر الاضلاعی را در یک
جهت امتداد دهیم مجموع زوایای خارجی حاصله

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 215 of 326

مساوی است بچهار قائمه۔

۲۴۵۔ مسئله۔ میخواهیم مجموع زوایای کثیر الاضلاعی را معلوم کنیم۔

در س ۱۸۲ زاویهٔ د را ملاحظه می کنیم که با زاویهٔ ۶ مکمل یک دیگرند و همچنین هر زاویهٔ داخلی با زاویهٔ خارجیش مکمل همدیگر میباشند۔

هرگاه تمام زوایای داخلی و خارجی را برهم بیفزائیم حاصل جمع بقدر دو برابر عدهٔ اضلاع یا رؤس زاویهٔ قائمه خواهد شد و چون مجموع تمام زوایای خارجی مساوی چهار قائمه است۔ پس مجموع زوایای داخلی هر کثیر الاضلاع محدّب مساوی است با دو برابر عدّهٔ رؤس منهای چهار قائمه۔

فرض می کنیم ن عدّهٔ رؤس باشد مجموع زوایای داخلی از این تساوی بدست می آید۔

(۲ - ن) ۲ = ۴ - ن ۲

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 216 of 326

پس می گوئیم

قضیّه - مجموع زوایای هر کثیر الاضلاع محدّب مساوی است با آن قدر دو قائمه که عدد اضلاع باشد منهای دو

مثلاً مجموع زوایای مسبّع چنین است

۲ × ۵ = ۱۰

و چهار ضلعی چنین ۴ = ۲ × ۲

و مثلّث چنین ۲ = ۱ × ۲

وغیره

۲۴۶ - نتیجه - سابقاً در ع ۱۳۹ ثابت کردیم که هرگاه در مثلثی دو ضلع مساوی باشند زوایای مقابل به آنها هم متساویند و در ع ۱۵۲ عکس آن را به ثبوت رسانیدیم حال بسهولت ممکن است مطالب ذیل را اثبات نمود -

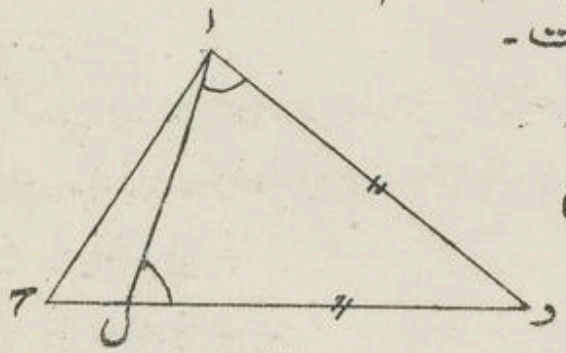
هرگاه در مثلثی دو ضلع غیر مساوی باشد دو زاویهٔ مقابل بآنها هم غیر مساویند -

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 217 of 326

بالعکس هرگاه در مثلثی دو زاویه غیر مساوی باشند دو ضلع مقابل بآن ها نیز غیر مساویند۔

(اثبات این مسئله بعهدهٔ متعلمین است)۔

۲۴۷ مسئله۔ در مثلثی دو ضلع غیر مساویند میخواهیم معلوم کنیم کدام یک از دو زاویهٔ مقابل بآنها بزرگتر است۔



س ۱۸۳

فرض میکنیم در مثلث ا ج د ضلع ا د کوچک تر از ضلع د ج باشد (س ۱۸۳) حال دو زاویهٔ ح و ل را باهم مقایسه می کنیم۔

ضلع د ا را بدور نقطهٔ د بقدر زاویهٔ د دوران میدهیم تا بر روی د ح بیفتد چون دو نقطهٔ د و ج مثلاً در نقطهٔ ل خواهد افتاد پس خط ا ل در درون مثلث است باین طریق

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 218 of 326

مثلث متساوی الساقینی تشکیل شده که در آن دو زاویهٔ ل ا ک و د ل ک باهم مساویند زاویهٔ ا ل ک نسبت بمثلث ا ل ج خارجی است پس از زاویهٔ ج بزرگتر است (ع ۲۴۱ - ۱)

بنا براین مساوی آن یعنی زاویهٔ ل ا ک از ج بزرگتر خواهد بود پس به طریق اولی زاویهٔ ا از زاویهٔ ج بزرگتر است پس -

قضیه - هرگاه در مثلثی دو ضلع غیر مساوی باشند زاویهٔ مقابل بضلع اعظم بزرگتر است از زاویهٔ مقابل بضلع اصغر -

۲۴۸ - قضیهٔ عکس - هرگاه در مثلث ا ج د زاویهٔ ا بزرگتر از زاویهٔ ج باشد ضلع مقابل بآن یعنی د ج هم از د ا بزرگتر است زیرا که اگر کوچک تر باشد لازم می آید زاویهٔ ا هم کوچک تر از زاویهٔ ج باشد و این خلاف فرض است پس مے گوئیم -

قضیهٔ عکس - هرگاه در مثلثی دو زاویه غیر

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 219 of 326

مساوی باشد ضلع مقابل بزاویۂ اعظم بزرگتر است از ضلع مقابل بزاویۂ اصغر۔

مسائل

۲۸۔ ثابت کنید کہ یک خط مستقیم نمے تواند در بیش از دو نقطۂ کثیر الاضلاع محدّب را قطع کند۔

۲۹۔ ثابت کنید کہ وتر مقابل بقوس ۶۰ درجہ مساوی با شعاعِ دائرہ است۔

۳۰۔ قطر دائرۂ مانند ا ہ ج مفروض است کہ در آن ہ مرکز دائرہ است از نقطۂ ل وسط ہ ج خط م ن را بر قطر دائرہ عمود مے کنیم ثابت کنید کہ این وتر مقابل بقوس ۱۲۰ درجہ است و خاصیّت مثلّث ا م ن را معلوم نمایند۔

۳۱۔ از روی مسئلہ ع۲۹ قاعدۂ تقسیم محیط دائرہ را بہ ۶ قسمت مساوی تعیین کنید۔

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 220 of 326

۳۲- زوایای مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین را معلوم کنید.

۳۳- در مثلث قائم الزاویه یک زاویه مساوی با ۳۰ درجه است کوچک ترین ضلع مثلث را با وتر آن بسنجید و این مسئله را با مسئله ع۳۰ مقایسه کنید.

ع۳۴- رؤس مسدس محدبی در روی محیط دائره واقع شده و آن را به ۶ قوس مساوی تقسیم کرده اند (مسئله ع۳۱) حال اضلاع و زوایای آن را باهم مقایسه کنید و اندازهٔ زوایای آن را بدرجهٔ حساب نمایند.

۳۵- دو ذوار بعته اضلاع محدب ا ج د ل معلومات ذیل در دست است.

$\hat{ا} = ۱۰۰^\circ \quad \hat{ج} = ۶۰^\circ \quad \hat{د} = ۷۰^\circ$

حال معلوم کنید زاویهٔ ل را و زوایائی را که از تقاطع اضلاع مقابل ا د و ج ل و د ج و ا ل و زوایائیکه از تقاطع منصف زوایای ا و ج و د و ل تشکیل می شود.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 221 of 326

فصل نهم

ترسیم مثلثات - حالت های تساوی مثلثات و موارد استعمال آن ها

۱- ترسیم مثلثات

۲۲۹ - اجزاء مثلث - هر مثلث دارای سه زاویه وسه ضلع است که آن ها را اجزاء مثلث می گویند -

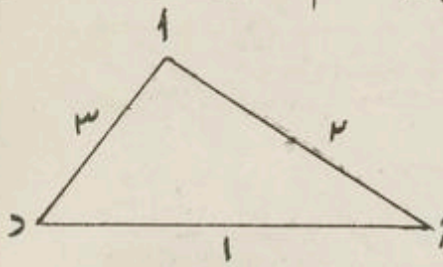
حال ترسیم بعضی مثلثات را در صورتیکه بعضی از اجزاء آن معلوم باشند بیان می کنیم -

همواره سه زاویه مثلث را به سه حروف ا و د و ج تعیین می کنیم و اضلاع آن را بواسطه اعداد ۱ و ۲ و ۳

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 222 of 326

نمائش میدهیم زاویه ۱ مقابل به ضلع ۱ و زاویهٔ د مقابل به ضلع ۲ و زاویهٔ ج مقابل به ضلع (۳) است (س ۱۸۴)

۲۵۰- مسئله - مثلثی رسم کنید که یک ضلعش معلوم باشد.



س ۱۸۴

این مسئله دارای عده لایتناهی جواب است زیرا ج که می توان هر نقطه در خارج خط مفروض فرض کرده از آن نقطه به طرفین آن خط وصل کنیم.

۲۵۱- مسئله - مثلثی رسم کنید که یک زاویه اش معلوم باشد

این مسئله نیز مانند مسئله سابقا دارای عدّه لانتناهی جواب است زیرا که کافی است اضلاع زاویهٔ مفروض را بواسطهٔ خطی قطع کنیم تا مثلث مطلوب حاصل شود.

۲۵۲- مسئله - مثلثی رسم کنید که دو زاویه اش

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 223 of 326

معلوم باشد۔

سابقاً این مسئله را در ع۲۳۸ حل کردیم هرگاه مجموع دو زاویهٔ مفروض از دو قائمه کمتر باشد این مسئله همواره ممکن است و دارای عده لاینتاهی میباشد۔

۲۵۳- مسئله - مثلثی رسم کنید که دو ضلعش معلوم باشد۔

برای حل این مسئلهٔ زاویهٔ غیر معلومی رسم کرده از اضلاع آن بقدر دو ضلع مفروض جدا کرده بهم وصل میکنیم این مسئله نیز دارای لاتیناهی جواب است زیرا که زاویه مذکور را به میل خود می توانیم تغییر دهیم۔

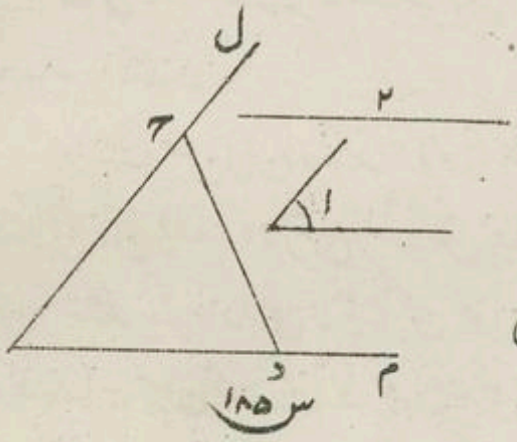
۲۵۴- مثلثی رسم کنید که یک ضلع و یک زاویه اش در دست باشد۔

ضلع مفروضه ممکن است مجاور یا مقابل زاویه مفروضه باشد۔

اولاً- ضلع مفروضه مجاور به زاویهٔ مفروضه است

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 224 of 326

مثلاً فرض می کنیم زاویۂ و ضلع ۲ در دست باشد۔
(س ۱۸۵) زاویۂ ل ام را مساوی با زاویۂ ا رسم کرده از یک
ضلع آن مثلاً از ضلع ل ل طولی مساوی ضلع ۲ جدا کرده از نقطه
ج بیک نقطه نامعین ضلع ا م وصل می کنیم مثلث ا د ج
مثلث مطلوب است



این مسئله نیز عدۂ لا
یتناهی جواب قبول
میکند۔
ثانیاً۔ ضلع مفروض
مقابل به زاویه
مفروضه است۔
فرض می کنیم زاویه ج و ضلع ۲ در دست باشد۔
زاویه مانند د بقسمی اختیار می کنیم که د + ج از دو قائمه
کوچک تر باشد پس سه زاویۂ مثلث بدست می آید بعدها
خواهیم که هرگاه از مثلثی سه زاویۂ و یک ضلع معلوم باشد فقط

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 225 of 326

یک مثلّث جواب آنست -

چون زاویۂ د را بمیل خود انتخاب کردیم پس این مسئله نیز دارای عدہ لاینتاہی جواب می باشد -

۲۵۵ - مسئلہ - مثلثی رسم کنید کہ سہ زاویہ اش معلوم است -

این مسئلہ مانند مسئلہ ۲۵۲ است فقط باید مجموع سہ زاویہ مساوی دو قائمہ باشد واگر دو زاویہ ہم معلوم باشد زاویۂ سیّم را حساب می کنیم این مسئلہ ہم دارائی عدہ لاینتاہی جواب است -

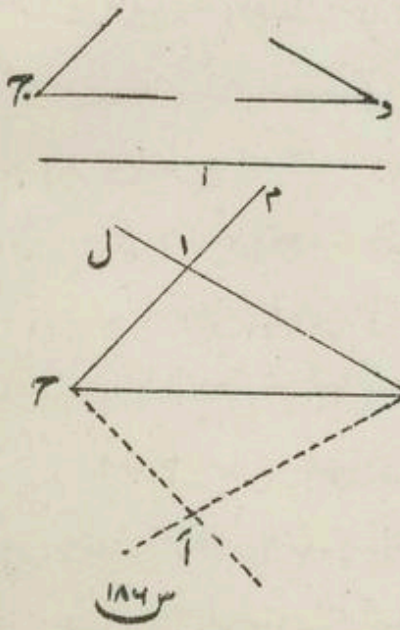
۲۵۶ - خلاصہ - ہرگاہ یک جزء یا دو جزء یا سہ زاویہ مثلثی معلوم باشد عدہ لاینتاہی مثلثات میتوان یافت کہ شامل آنہا باشند -

۲۵۷ - حال شروع مے کنیم بحل مسائلی کہ در آنہا سہ جزء مثلّث معلوم باشد بشرط آنکہ اقلاً یکی از آن سہ جزء ضلع باشد و معلوم می کنیم کہ بغیر از یک مسئلہ ہمیشہ جواب مسئلہ

یکی خواهد بود -

۲۵۷- مسئله- مثلثی رسم کنید که یک ضلع و دو زاویه اش معلوم باشد -

چون دو زاویه مثلث معلوم است پس بسهولت زاویه سیم نیز معلوم میشود پس فرض می کنیم که ضلع او دو زاویهٔ مجاورهٔ اش یعنی د و ج معلوم باشند واضح است که باید مجموع این دو زاویه از دو قائمه کمتر باشد خطی مانند د ج مساوی با ضلع مفروض رسم و (س ۱۸۶) بعد زاویه م ج د را مساوی با زاویه ج و زاویه ل د ج را مساوی با زاویه ج رسم می نمائیم ولی این دو زاویه را در یک طرف ضلع د ج رسم مے کنیم



س ۱۸۶

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 227 of 326

دو خط ج م و د ل یک دیگر را در نقطهٔ ا قطع میکنند (ع ۱۸۸)
و مثلث ا د ج مثلّث مطلوب است می توانیم دو زاویه
را در طرف دیگر خط ج د رسم کنیم آن وقت مثلث ا د ج بدست
می آید که شکل متناظرهٔ مثلّث ا ج د است۔
پس می بینیم که این مسئله فقط دارائی یک جواب است۔

۲۵۸ - حالت اوّل تساوی دو مثلّث - از روے
مسئله فوق معلوم می شود هرگاه مثلث دیگری مانند ع ص ف
داشته باشیم که در آن ضلع ع ص مساوی با ضلع د ج و ع̂
= د̂ و ص̂ = ج̂ باشد و آن مثلث را بر داشته
روی یکی از این دو مثلث مساوی قرار دهیم بر آن منطبق
گردیده با آن مساوی می شود.
پس می گوئیم۔
قضیّه - هرگاه دو زاویه و ضلع بینهما از مثلثی
مساوی باشد با دو زاویه و ضلع بینهما از مثلث دیگر
آن دو مثلث مساویند۔

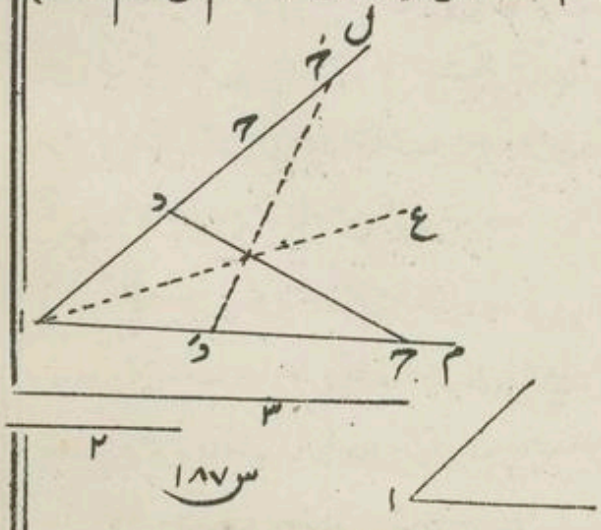
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 228 of 326

۲۵۹- مسئله- از مثلثی دو ضلع و یک زاویه معلوم است آن را رسم کنید -

زاویه مفروضه ممکن است بین دو ضلع یا مقابل بیکی از آنها باشد این حالت اخیر را در آخر این فصل بیان می کنیم-

پس فرض می کنیم ۲ و ۳ دو ضلع مفروض و ا زاویهٔ مفروضه باشد -

زاویهٔ مانند ل ا م مساوی با زاویه ا رسم می کنیم (س ۱۸۷) و از ضلع ا ل بقدر ضلع ۲ و از ضلع ا م نیز بقدر ضلع ۳ جدا نموده دو نقطه د و ج را بهم وصل میکنیم مثلث ا د ج مثلث مطلوب است



س ۱۸۷

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 229 of 326

ممکن است بقدر ضلع ۳ از ضلع ۱ ل و بقدر ضلع ۲ از ضلع ۱ م جدا نمائیم آن وقت مثلث ا د ج بدست می آید ولی نقاط ج و جَ و د و دَ نسبت به منصف الزاویه ا ع متناظره اند (دو مثلث متساوی الساقین ا ج جَ و ا د دَ) پس دو مثلث ا د ج و ا دَ جَ نیز باهم متناظره و متساویند پس معلوم شد که این مسئله بیش از یک جواب قبول نمیکند۔

۲۶۰- حالت دوم تساوی دو مثلث۔ از حل مسئله فوق معلوم شد که هرگاه دو مثلث داشته باشیم که در دو ضلع و زاویه بینهما باهم مساوی باشند اگر آن دو مثلث را بر روی هم قرار دهیم بطور ختم بر روی هم خواهند افتاد یا بلکه این مساوی اند۔ پس می گوئیم۔

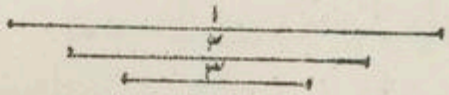
قضیه- هرگاه دو ضلع و زاویه بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو ضلع و زاویه بینهما از مثلث دیگر آن دو مثلث باهم مساویند۔

۲۶۱- سه ضلع مثلثی معلوم است میخواهیم

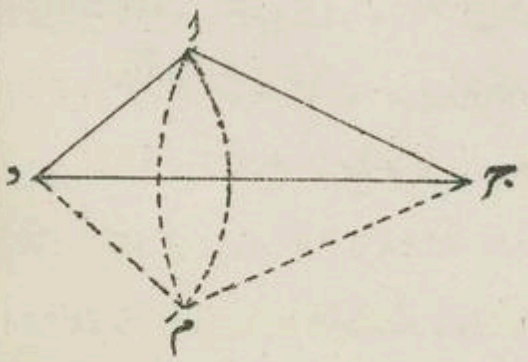
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 230 of 326

آن را رسم کنیم -

فرض می کنیم ۱ و ۲ و ۳ سه ضلع مثلث مطلوب باشند اگر آنها غیر مساوی هستند فرض می کنیم ضلع ۱ از همه بزرگتر و ضلع ۲ متوسط و ضلع ۳ از همه کوچک تر است اگر دو ضلع باهم مساوی هستند ضلع ۱ بزرگتر بین ضلع یا یکی از دو ضلع بزرگتر است (س ۱۸۸) خطی مانند د ج مساوی با ضلع



۱ رسم کرده بعد نقطهٔ ج را مرکز قرار داده بشعاعی مساوی با ضلع ۲ دائره رسم می کنیم آنگاه نقطه د را مرکز قرار داده بشعاع ضلع ۳ دائرهٔ دیگری رسم می کنیم اگر این دو دائره یک دیگر را قطع کنند



محل تقاطع آنها دو نقطهٔ متناظرهٔ ا و اَ خواهد بود که نسبت بخط

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 231 of 326

ج د متناظره اند پس دو مثلث ا ج د و ا' ج د که بدست آمده باهم مساویند و مسئله بیش از یک جواب ندارد .

۲۶۲ - حالت سیم تساوی دو مثلث - اگر و مسئلهٔ فوق خط دیگری مانند ج' د' رسم کرده مثلث را بر آن بنا می کنیم بعد این مثلث را برداشته بر روی مثلث ا ج د قرار میدهیم بقسمی که ضلع د' ج' بر روی د ج واقع شود یقین داریم که رأس ا' نیز بر روی ا واقع شده این دو مثلث مساوی می گردند پس می گوئیم :-

قضیه - هر گاه سه ضلع مثلثی نظیر به نظیر مساوی با سه ضلع مثلث دیگر باشد آن دو مثلث مساویند

۲۶۳ - تبصره - مسائلی که از ع ۲۵۷ تا حال حل کردیم بما نشان می دهد که اگر سه جزء مثلث که خوب انتخاب شده باشند در دست داشته باشیم مثلث خوب بر ما معلوم می شود و سایر اجزاء آن بدست می آید زیرا که می توانیم مثلث را رسم نمائیم .

پس واضح است که برای ترسیم مثلثی داشتن چهار جزء آن

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 232 of 326

درست بی فائده است و اگر آنها را بطور نامعین انتخاب کنیم ممکن است مسئله غیر ممکن شود زیرا که با سه جزء آن می توانیم مثلث را رسم کنیم و ممکن است جزء چهارم مفروض جزئی از مثلث مرسوم نباشد .

نیز واضح است که مفروض بودن سه زاویه برای ترسیم مثلث کافی نیست زیرا که از معلوم بودن دوتای آنها سیمی خودش بدست می آید پس لازم است که اقلاً یکی از سه جزء مفروض ضلع باشد پس .

۲۶۴ - خلاصه - سه جز که همه زاویه نباشند مثلثی را تعیین می کنند و ممکن نیست مثلثی رسم کرد که بیش از سه جزء آن مفروض باشد و حتماً باید اقلاً یکی ازان سه جزء ضلع باشد .

۲۶۵ - شرائط امکان مسئله ۲۶۱ - برای آنکه دو دائره در نقطهٔ ایک دیگر را قطع کنند (س ۱۸۸) لازم و کافی است که فاصلهٔ دو مرکز آنها بین مجموع و تفاضل دو شعاع

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 233 of 326

باشد.

پس لازم است چنین داشته باشیم.

$$۲-۳ < ۱ < ۲+۳$$

(در اینجا مقصود از اعداد اضلاع مفروضه است)

۲ کوچک تر یا اکثراً مساوی با است (ابتدائی ۲۶۲ء) پس ۳-۲ حتماً کوچک تر از ۱ می باشد و فقط ۳+۲ > ۱ باقی می ماند.

پس معلوم شد که هرگاه مجموع دو ضلع اصغر بزرگتر باشد از ضلع اعظم مسئله همواره ممکن است و مثلث بدون این شرط وجود نخواهد داشت.

چون ضلع اعظم کوچک تر از مجموع دو ضلع اصغر است. پس بطریق اولی ضلعی که بزرگترین ضلع مثلث نباشد از مجموع دو ضلع دیگر کوچک تر خواهد بود.

پس چنین بیان می کنیم.

قضیه - هر ضلع مثلث کوچکتر است از مجموع

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 234 of 326

دو ضلع دیگر.

۲۶۶- **بیان دیگر**- می توان مطلب فوق را بطور دیگر بیان نمود.

سابقاً چنین داشتیم ۳ + ۲ > ۱

چون از طرفین این نامساوی ضلع ۲ را تفریق کنیم چنین می شود

۳ > ۲ — ۱

و چون از طرفین همان نامساوی ضلع ۳ را نقصان کنیم چنین می شود

۲ > ۳ — ۱

و چون این دو نامساوی را بر نامساوی بدیهی

۱ > ۳ — ۲

ملحق کنیم قضیهٔ ذیل نتیجه می شود.

قضیه- هر ضلع مثلث بزرگتر است از تفاضل دو ضلع دیگر.

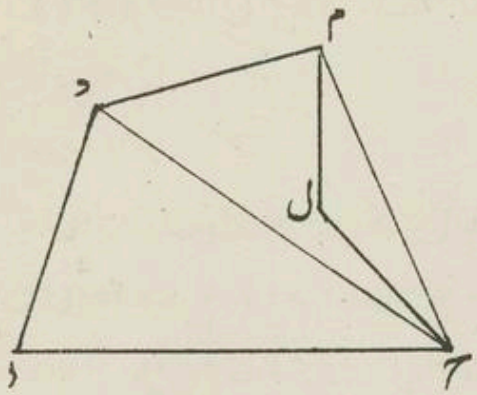
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 235 of 326

۲۶۷ - نتائج قضیه ۲۶۵ - قطعهٔ خط ا ج و نقطهٔ

د را در خارج آن
فرض می کنیم (س ۱۸۹)
چنین خواهیم داشت

د ج + د ا > ج ا

حال نقطهٔ دیگری مانند
م فرض می کنیم مثلث
ج د م بدست می آید
که در آن



س ۱۸۹

ج م + د > ج د

پس بر طریق اولی

ج م + م د + د ا > ج ا

حال اگر نقطهٔ دیگری مانند ل فرض کنیم از مثلث م ل ج
چنین نتیجه می شود

ج ل + ل م > م ج.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 236 of 326

پس به طریق اولی

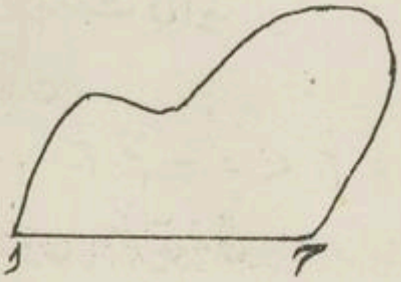
و ذ + د م + ل م + ج ح > ا

وقس علی هذا

پس میگوئیم

قضیّه - هر ضلع هر کثیر الاضلاع کوچک تر است از مجموع تمام اضلاع دیگر آن .

۲۶۸ - این نتیجه با نتیجهٔ عملی اینکه هر خط مستقیم اقصر راهی است از نقطه بنقطهٔ دیگر موافق است .



س ۱۹۰

اگر نخی را که غیر قابل انبساط باشد برداشته دو سر آنرا در دو نقطهٔ ا و ج قرار دهیم (س ۱۹۰) نخ ما بشکل یک قوسی می شود که ا ج وتر آن است طول قوس همان طول قطعه نخ ما است . درصورتی که آن را کاملاً از دو طرف کشیده باز کنیم واضح است

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 237 of 326

که طول این نخ بزرگتر از طول ا ج می باشد .

پس

هر قوس منحنی از وتری که دو انتهایش را بهم وصل می کند بزرگتر است .

۲- ترسیم مثلثات قائم الزّاویه

۲۶۹ - ترسیماتی را که سابقاً درباب مثلث ذکر کردیم در صورتی که یک زاویهٔ آن هم قائمه باشد صدق می کند فقط در مثلث قائم الزاویهٔ هرگاه یکی از دو زاویهٔ حادّه معلوم باشد دو زاویهٔ دیگر مثلث بدست می آید حال بعضی مطالبی که ترسیم مثلث قائم الزاویه را ساده و آسان میکند بیان می کنیم .

۲۷۰ - مسئله - از مثلث قائم الزّاویهٔ یک ضلع و یک زاویهٔ حاده معلوم است میخواهیم آن را رسم کنیم .

سه زاویهٔ مثلث معلوم است پس این مسئله مانند مسئله

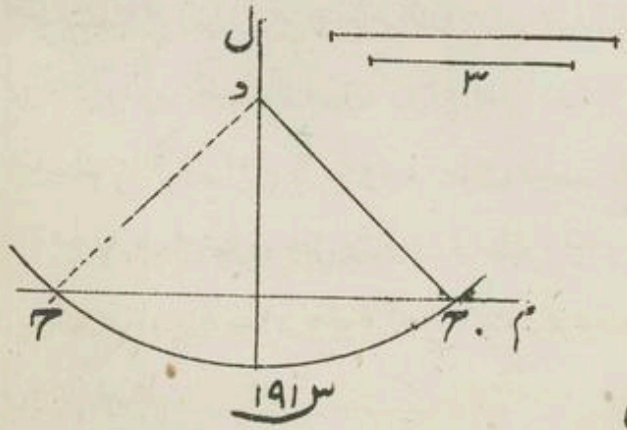
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 238 of 326

ع ۲۵۸ است که سابقاً حل کردیم فقط یک جواب دارد .

اگر ضلع مفروض وتر باشد همان طور که در ع ۲۵۸ و ع ۲۶۰ و ع ۲۶۲ بیان کردیم به نتیجهٔ ذیل می رسیم .

قضیه - حالت اوّل دو مثلث قائم الزّاویه - هر گاه دو مثلّث قائم الزاویه در وتر و یک زاویه حاده مساوی باشند آن دو مثلّث مساویند .

۲۷۱ - مسئله - از مثلث قائم الزاویه دو ضلع معلوم است آن را رسم کنید .



اگر دو ضلع مفروض اضلاع زاویه قائمه باشند آن را در ع ۲۵۹ حل کرده ایم پس فرض می کنیم که دو ضلع مفروض یکی وتر و دیگری یکی از دو ضلع مجاور بزاویهٔ

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 239 of 326

قائمه باشند (س۱۹۰) زاویهٔ قائمهٔ مانند ل ا م رسم مے کنیم (س۱۹۰)
بعد از نقطهٔ ا در روی ل ا قطعه خط ا د را مساوی ضلع مفروض
۳ جدا می نمائیم بعد نقطه د را مرکز قرار داده بشعاعی برابر
وتر مفروض دائره رسم مے کنیم تا خط ا م را در دو نقطه
ج و جَ قطع کند پس مثلث د ا ج و ا جَ جوابهاے مسئله
اند ولی چون خود این دو مثلث نسبت به ا د متناظر اند مساویند
ومسئله بیش از یک جواب ندارد بشرط آنکه وتر بزرگتر از دو ضلع دیگر
باشد بدلائلے که سابقاً مذکور داشتم چنین بیان می کنیم .

قضیه - حالت دوم تساوی مثلثهای قائم الزاویه
هر گاه در دو مثلث قائم الزاویه وتر و یک ضلع
مساوی باشند آن دو مثلث مساویند .

۲۷۲ - در حقیقت در مسئله سابق مثلثی رسم کردیم که در آن
دو ضلع و زاویهٔ مقابل بیکے از آن ها معلوم بوده است و این حالت
مخصوصی از مسئله ۲۵۹ است که حالا بتفصیل بیان مے کنیم .
فقط این نکته را متذکر می شویم که در صورتیکه زاویهٔ مفروضه

هندسه مسطحه فارسی کمیسیون کاتب

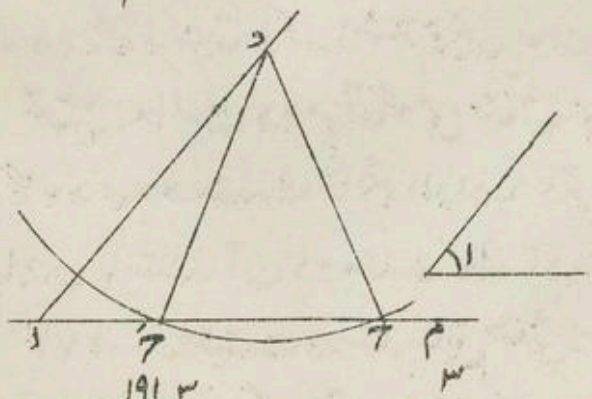
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 240 of 326

قائمه باشد اگر ضلع ۳ کوچک تر از ضلع ا باشد مسئله یک جواب دارد
واگر ضلع ۳ مساوی یا بزرگتر از ضلع ا باشد محال است .

۲۷۳ - مثلثی رسم کنید که دو ضلع و زاویه
مقابل به یکی از آنها در دست باشد .

فرض می کنیم دو ضلع ا و ۳ و زاویهٔ ا در دست است
(س ۱۹۱)

زاویه مانند ا م مساوی با زاویهٔ مفروضه رسم کرده از یکی از
اضلاع آن مثلاً
از ضلع اول قطعه
خط ا د را مساوی
با ضلع ۳ جدا
کرده نقطهٔ د را
مرکز قرار داده



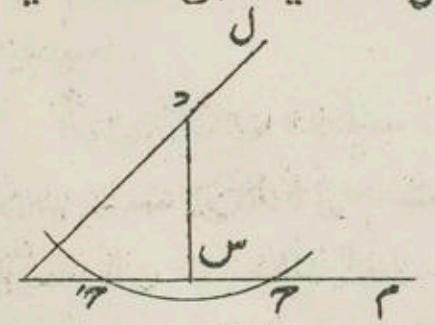
س ۱۹۱

بشعاعی مساوی با ضلع ا دائره رسم می کنیم تا خط ا م را در نقطهٔ ج
قطع کند مثلث د ج ا جواب مسئله است در س ۱۹۱ دائرهٔ

مرسومہ خط م ل را در نقطہ دیگری ہم مانند جَ قطع کردہ است
و مثلث و جَ ل نیز یک جواب مسئلہ است .

۲۸۴ - بحث - حال تحقیق می کنیم درچہ شرائطی
مسئلہ ممکن است و جواب ہای ممکنہ را نیز پیدا می نمائیم.
برائے یافتن رأس ج لازم است کہ دائرہ مرسومہ خط
ل م را قطع کند و نیز محل تقاطع آنہا در طرف ل م باشد نہ
در امتداد آن زیرا کہ آن وقت زاویہ مثلث مکمل زاویہ مفروضہ
خواہد گردید .

اگر مثلث قائمہ باشد اہمیتی ندارد زیرا کہ آن وقت زاویہ
مثلث با مکملش مساویند



س ۱۹۲

دراین حال اگر شعاع دائرہ از
فاصلہ نقطۂ د تا خط ل م بزرگتر
یا مساوی آن باشد ل م را
قطع خواہند کرد (س ۱۹۲)
پس باید چنین داشتہ باشیم - س د ≤ ضلع ا اگرچہ س د

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 242 of 326

برو معلوم نیست ولی بدست آوردن آن را سابقاً خوانده ایم و فوراً تعیین می کنیم نقطهٔ ج و ج نسبت بنقطهٔ س متناظره اند برای تعیین آنکه آن دو نقطهٔ روی ام می باشند یا نه باید دو حالت را ملاحظه کنیم بنابر آنکه نقطه س روی خود ام یا روی امتداد آن باشد.

حالتِ اوّل - نقطه س روی خط ام است - در این حالت زاویهٔ ا حاوه است (س ۱۹۲) نقطه ح که در روی س م است همیشه برای ما مناسب است و جواب ممکنی بما میدهد.

اگر س ج از س ا کوچک تر باشد نقطهٔ ج هم بما جوابی می دهد برای این کار کافی است که خط مائل د ج کوچک تر باشد از مایل د ا (ع ۱۶۷) یا بعبارة اخری

ضلع ۳ > ضلع ۱

حال در جدول ذیل آنچه را گفتیم خلاصه می کنیم.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 243 of 326

جواب ندارد — س د > ا ضلع

دو جواب (ج و ج) — ۳ ضلع > ا ضلع > س د } زاویهٔ ا حاده است

یک جواب (فقط ج) — ا ضلع > ۲ ضلع

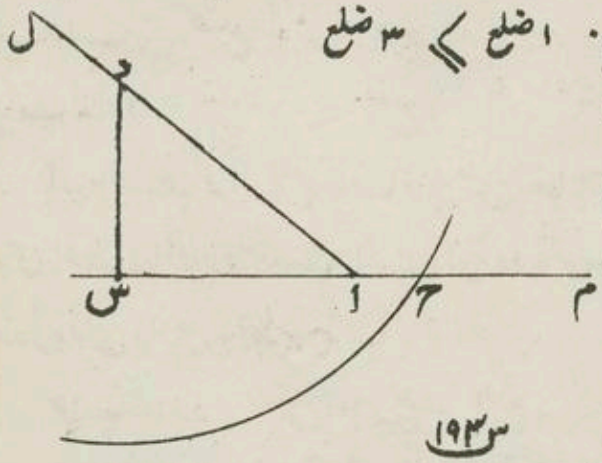
باید دانست که اگر ضلع ا مساوی دس باشد دائره در نقطهٔ س بر خط ا م مماس شده فقط مسئله یک جواب قبول می کند و آن هم یک مثلث قائم الزاویه است .

ونیز اگر ضلع ا مساوی ضلع ۳ باشد نقطه ج روی ا افتاده مثلث ثانی از بین می رود پس می توانیم خط سیم جدول فوق را چنین بنویسیم . ا ضلع ≥ ۳ ضلع

یک جواب

حالتِ دوم

نقطه س روی امتداد خط ا م است .



س ۱۹۳

درین حالت

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 244 of 326

زاویۂ مفروضہ منفرجہ است (س ۱۹۳)

درین وقت نقطۂ ج ہرگز مناسب نیست و نقطہ ج نیز مناسب نخواہد بود مگر آنکہ س ج بزرگتر از س ا باشد.

بعبارت اخری ا د < د ج یا ۳ ضلع < ضلع ۱

از طرف دیگر اگر این شرط موجود باشد ضلع ا بزرگتر از د س مے شود زیرا کہ ضلع ۲ بزرگتر ازان می باشد.

حال آنچہ را کہ در حالت دوم گفتیم در جدول ذیل خلاصہ می کنیم.

یک جواب	ضلع ۳ < ضلع ۱	زاویہ امنفرجہ است
جواب ندارد	ضلع ۳ > ضلع ۱	

باید دانست کہ اگر ضلع ۱ مساوی ضلع ۳ باشد نقطہ ج بر روی نقطہ ا افتادہ مثلث از بین می رود پس می توانیم خط دوم جدول فوق را چنین بنویسیم.

جواب ندارد ضلع ۲ ≦ ضلع ۱

۲۷۵ - خلاصہ - حال خلاصہ آنچہ کہ در نمرۂ سابق ذکر

کردیم با آنچه در ع ۲۷۲ بدست آوردیم درجه رول ذیل مجدداً می نویسیم .

(۱) جواب ندارد	دس > ضلع ۱	زاویه ا حاده است
(۲) یک جواب	دس = ضلع ۱	
(۳) دو جواب	ضلع ۳ > ضلع ۱ > دس	
(۴) یک جواب	ضلع ۱ ≥ ضلع ۳	
(۵) یک جواب	ضلع ۱ > ضلع ۲	زاویهٔ ا قائمه است
(۶) جواب ندارد	ضلع ۱ ≤ ضلع ۲	
(۷) یک جواب	ضلع ۲ > ضلع ۱	زاویهٔ ا منفرجه است
(۸) جواب ندارد	ضلع ۲ ≤ ضلع ۱	

تمام جدول فوق را می توان چنین بیان کرد .

هرچه باشد مقدار زاویهٔ ا اگر ضلع ۲ کوچک تر از ضلع ۱ باشد مسئله همواره ممکن است دیک جواب قبول می کند. (خط ۴ و ۵ و ۷) .

درحالت خط سیم فقط مسئله دو جواب قبول می کند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 246 of 326

بالآخر درصورتے کہ ضلع ۱ مساوی ضلع ۲ باشد اگر زاویۂ احاوہ است مسئلہ دارائے یک جواب است ۔

یک جواب ضلع ۱ > ضلع ۲

دو جواب ضلع ۲ > ضلع ۱ > دس

یک جواب ضلع ۱ = ضلع ۲ − ضلع ۱ = دس

} زاویۂ احاوہ است

درسایر حالات جواب ندارد

مسائل

۳۵ ۔ قوسی با وترش مفروض است قوس را مضاعف می کنیم معین کنید کہ وترش ہم مضاعف می شود یا نہ ؟ و از مضاعف آن بزرگتر است یا کوچک تر ۔

۳۶ ۔ از مثلث متساوی الساقینی ضلع واقع بین زوایا ے مساویہ وارتفاعی کہ بران ضلع فرود می آید معلوم است

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 247 of 326

آن را رسم کنید .

۳۷ - محور تناظر هر قطعه خط ا ج سطح را بدو قسمت می کند یکی آنکه شامل ا و دیگری آنکه شامل ج است حال مقایسه کنید

۳۸ فواصل هر نقطه ازین دو سطح را تا دو نقطه ا و ج .

در دو مثلث دو ضلع نظر بنظیر باهم مساویند ولی دو زاویهٔ حادثه بین آنها باهم مساوی نیستند دو ضلع سیم را با هم مقایسه کنید .

۳۹ - مثلث متساوی الاضلاع ا ج د مفروض است در روی سه ضلع آن طول د ل = ج ن = ا م را جدا می کنیم حال شکل مثلث م ن ل را تحقیق کنید .

۴۰ - خطی مانند م ل و دو نقطه مانند ا و د در دو طرف آن مفروض است نقطه مانند ج روی آن پیدا کنید که مجموع د ج + ج ا تا حد امکان کوچک تر باشد .

۴۱ - مانند مسئله سابق فقط دو نقطه ا و ج در یک طرف خط م ل هستند (بحالت سابق رجوع کنید)

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 248 of 326

۴۲- با معلومات مسئله ۴۰ نقطهٔ ج را روی م ل چنان تعیین کنید که تفاضل م و م د که امکان بزرگتر شود.

۴۳- مانند مسئله سابق نقط دو نقطه ا و د در یک طرف خط م ل مفروض اند.

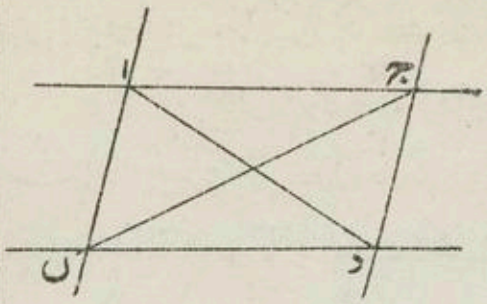
فصل دهم

متوازی الاضلاعها

۱- متوازی الاضلاع بطور عموم

۲۷۶- دو خط متوازی ا ج و ب د را فرض کرده آنها را و خط متوازی ان و ج د قطع می کنیم (س ۱۹۴) شکلی که حاصل می شود یک چهار ضلعی است که اضلاعش دو بدو با هم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 249 of 326



س ۱۹۴

موازیند پس.

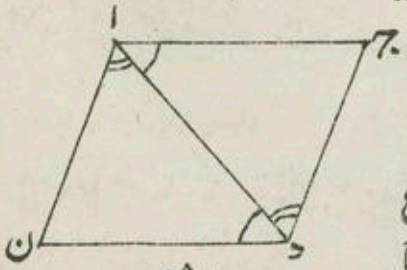
متوازی الاضلاع یک چهار ضلعی است که اضلاع آن دو بدو باهم موازیند.

از روی شکل ظاهر است که متوازی الاضلاع کثیر الاضلاع محدب است.

قطر عبارت از خطی است که دو راس غیر مجاور را بهم وصل کند.

هر متوازی الاضلاع دارای دو قطر است یکی ا د و دیگری ن ج (س ۱۹۴).

۲۷۷ - مسئله - زوایای یک متوازی الاضلاع را باهم مقایسه کنید.



س ۱۹۵

از روی س ۱۹۳ واضح است که چون هر دو زاویه مقابل کثیر الاضلاع باهم موازی و در خلاف جهت یک دیگر

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 250 of 326

اندپس باهم مساویند بنابرین $\hat{د} = \hat{ا}$ و $\hat{ن} = \hat{ج}$

۲۴۸ - بالعکس هرگاه در ذوالاربعة اضلاع محدبی چنین داشته باشیم: $\hat{د} = \hat{ا}$ و $\hat{ج} = \hat{ن}$ مجموع چهار زاویه آن مساوی با چهار زاویه قائمه است (ع ۲۴۵)

پس $\hat{ن} + \hat{ا}$ که نصف آن ست مساوی با ۲ زاویهٔ قائمه است.

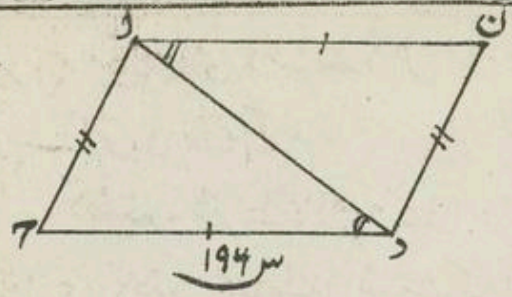
از روی قضیهٔ ع ۱۸۶ بخوبی واضح مے شود که ان و ج د باهم موازیند.

بهمین دلیل ا ج و د ن نیز باهم موازی می باشند پس می توانیم بگوئیم.

قضیه - برای آنکه یك چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد لازم و کافی است که زوایای مقابل آن دو بدو باهم مساوی باشند.

۲۷۹ مسئله - اضلاع یك متوازی الاضلاع را باهم مقایسه کنید.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 251 of 326



س ۱۹۶

متوازی الاضلاع ا ج د ن مفروض است (س ۱۹۵) قطر ا د را رسم می کنیم متوازی الاضلاع بدل بدو مثلث مے شود که باهم مساویند زیرا که در ضلع ا د مشترک اند و دو زاویه ج ا د و ا د ن چون باهم متبادله داخله اند مساویند و بهمین دلیل دو زاویهٔ ن ا د و ج د ا نیز باهم مساوی می باشند پس اضلاع مقابل آنها نیز مساویند یعنی ا ن = ج د و ا ج = د ن .

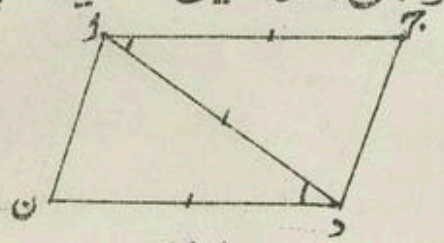
۲۸۰ – بالعکس فرض می کنیم که ذو اربعة اضلاع محدّبی اضلاع مقابل دو بدو مساوی باشند قطر ا د را رسم می کنیم (س ۱۹۶) سه ضلع مثلث ا د ن و ا د ج باهم مساویند پس این دو مثلّث باهم مساوی میگردند از آنها لازم می آید که دو زاویه ج د ا و د ا ن باهم مساوی باشند پس دو ضلع ا ج و د ن باهم موازیند و بهمین دلیل دو ضلع دیگر ج د و ا ن

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 252 of 326

نیز باهم موازی می باشند و شکل مفروض متوازی الاضلاع است پس می توانیم بگوئیم .

قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه یك چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد آنست که اضلاع مقابل آن دو بدو باهم مساوی باشند .

۲۸۱ - مسئله - در ذوار بعه اضلاع محدبی دو ضلع مقابل باهم مساوی و موازی اند تحقیق کنید چه شکل است .



س ۱۹۷

ذوار بعة الاع محدب ا ج د ن مفروض است که در آن دو ضلع ا ج و د ن باهم موازی و مساویند (س ۱۹۷) قطر ا د را رسم می کنیم دو مثلث ا د ج و ا د ن باهم مساویند زیرا که دو ضلع ا ج و د ن بنا بر فرض مساویند و در ضلع ا د نیز مشترکند و دو زاویه ج ا د و ا د ن چون متبادلهٔ داخله اند مساویند

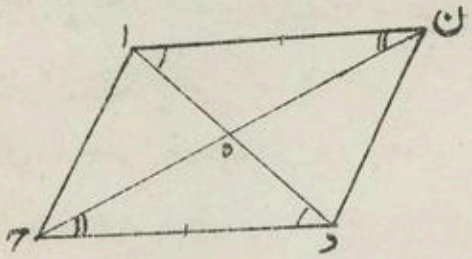
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 253 of 326

پس این دو مثلث مساوی میگردند و دو ضلع ج د و ا ن نیز باهم مساوی می گردند و شکل مفروض متوازی الاضلاع است.

پس میتوانیم بگوئیم.

قضیه - هر گاه در ذوار بعة اضلاع محدّبی دو ضلع مقابل باهم مساوی و موازی باشند آن شکل متوازی الاضلاع است.

۲۸۲ - مسئله - خواص نقطهٔ مشترکه دو قطر را تحقیق کنید.



س ۱۹۸

متوازی الاضلاع ا ج د ن مفروض است دو قطر ا د و ج ن یک دیگر را در نقطه ه قطع میکنند

(س ۱۹۸) از توازی اضلاع دو زاویهٔ ا ن ج و ن ج د چون متبادله داخله اند باهم مساویند و بهمین دلیل دو زاویه ا د ج و د ا ن نیز باهم مساویند میباشند از طرف دیگر دو ضلع ا ن

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 254 of 326

و د ج نیز باهم مساویند پس دو مثلث ه ا ن و ه ج د باهم مساوی می گردند و ازان چنین نتیجه مے شود.

ده = ا ه و ن ه = ج ه

پس نقطهٔ ه وسط هر دو قطر است و مے توانیم بگوئیم:

قضیّه - دو قطر هر متوازی الاضلاع در وسط یکدیگر را قطع می کنند.

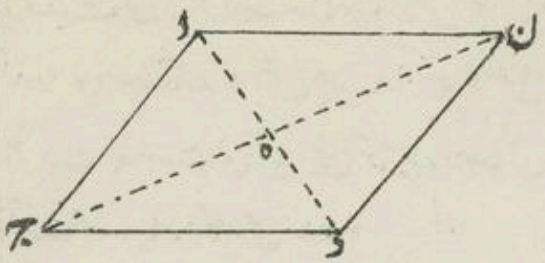
۲۸۳ - مرکز متوازی الاضلاع - از روی قضیّه فوق می گوئیم چون دو نقطه ج و ن بیک فاصله اند از ه و نقطه ا و د نیز از آن نقطه بیک فاصله اند پس نقطهٔ ه مرکز تناظر متوازی الاضلاع است و می توانیم بگوئیم.

قضیّه - هر متوازی الاضلاع یك مرکز تناظر قبول میکند و آن نقطهٔ مشترکهٔ دو قطر آنست.

۲۸۴ - **مسئله** - عکس قضیهٔ فوق را تحقیق کنید.

اگر ذوالاربعة اضلاعی دارای یک مرکز تناظره باشد برای ترسیم آن فقط دو راس ا و ج و مرکز تناظره کافی است زیرا که

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 255 of 326



س ۱۹۹

دو رأس دیگر آن نسبت به نقطهٔ ه متناظره اند. (س ۱۹۹) حال اگر ذو اربعهٔ اضلاع محدّب ا ج د ن را بدقت امتحان کنیم می بینیم که دو خط ا ج و د ن نسبت بنقطهٔ ه متناظره اند- پس باهم مساوی و موازیند پس شکل مفروض متوازی الاضلاع است و می توانیم بگوئیم.

قضیّهٔ- هر ذو اربعهٔ اضلاع محدّبی که دارای یك مرکز تناظر باشد متوازی الاضلاع است.

۲۸۵ - **تعیین متوازی الاضلاع** - از آنچه سابقاً گفتیم معلوم میشود که هرگاه از متوازی الاضلاع دو ضلع و زاویه بین آنها در دست باشد می توان آن متوازی الاضلاع را ترسیم نمود.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 256 of 326

باید ملتفت بود که اگر نقطه متناظرهٔ راس ج از مثلث ا د ج را نسبت به نقطهٔ ه وسط قاعده اش پیدا کنیم (س۱۹۹) شکل متوازی الاضلاع ا ج د ن بدست می آید این ترسیم در مسائل مربوط به میانه ہائے مثلث بسیار بکار می رود۔

۲۔ متوازی الاضلاعہای مخصوصہ

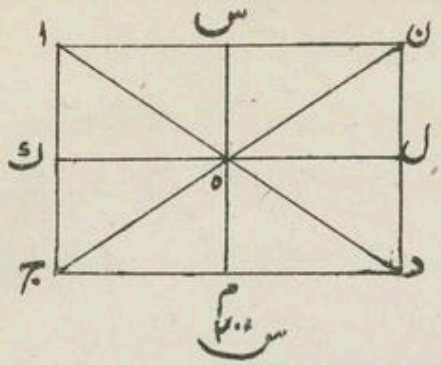
۲۸۶۔ مستطیل۔ ہرگاہ یکی از زوایای متوازی الاضلاعی قائمہ بشود از اوئیہ مقابل آن ہم قائمہ مے شود اما دو زاویہ دیگر کہ آنہا نیز باہم مساویند و مجموع شان دو قائمہ است ہر دو قائمہ می گردند پس چہار زاویہ متوازی الاضلاع قائمہ است۔

تعریف۔ مُربّع مستطیل متوازی الاضلاعی است کہ تمام زوایای آن قائمہ است۔

۲۸۷۔ تناظر مستطیل۔ مربع مستطیل ا ج د ن مفروض است (س۲۰۰)

دو نقطۂ ک و ل وسط دو ضلع مقابل ا ج د ن درا

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 257 of 326



ملاحظه می کنیم و قطعه خط ا ك و ن ل باهم مساویند زیرا که هر کدام نصف یکی از دو ضلع مساوی مستطیل اند

پس شکل ا ك ل ن متوازی الاضلاع است (زیرا که دو ضلع آن باهم موازی و مساویند) که دران زاویهٔ ا قائمه است پس تمام زوایای آن قائمه است و ك ل بر ن د و ا ج عمود است.

پس نقاط ا و ج و د و ن نسبت به ك ل متناظر اند و این خط اخیر محور تناظر مستطیل می باشد.

حال فرض می کنیم م و س وسط دو ضلع دیگر ا ن و ج د باشند به همین طریق ثابت می کنیم که خط م س محور تناظر دیگر مستطیل می باشد.

این دو محور برهم عمودند زیرا که هر کدام بر دو ضلع مقابل مستطیل

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 258 of 326

عمودند و هر کدام نیز با دو ضلع مقابل موازیند.

فرض می کنیم ه محل تقاطع دو محور تناظر باشد از آن نقطه بنقاط ا و ج و د و ن وصل می کنیم منصف زاویه ج ه ا خط ه ك است (ع ۱۳۹) و همچنین منصف زاویهٔ ا ه ن خط ه س می باشد چون این دو منصف الزاویه برهم عمودند. پس مجموع دو زاویه ج ه ا و ا ه ن دو قائمه است و چون این دو زاویه مجاوره اند پس اضلاع خارجی آنها بر استقامت یک خطند و نقطهٔ ه بر روی قطر ج ن است و بهمین طریق ثابت می کنیم که نقطهٔ ه بر روی قطر ا و نیز می باشد پس این نقطه مرکز تناظر مستطیل است (ع ۲۸۳) و می توانیم بگوئیم:

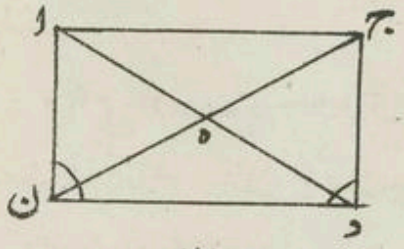
قضیه - هر مستطیل دارای دو محور تناظر است که بر اضلاع آن عمود میباشند و هر دو از مرکز آن میگذرند.

۲۸۸ - بسهولت بدو شکل می توان ثابت نمود که

هرگاه ذو اربعة اضلاعی دو محور تناظر عمود برهم قبول کند بقسمیکه هیچیک از رؤس روی این محورها نباشد آن شکل مستطیل است .

۲۸۹ - تساوی اقطار - از قضیهٔ ع۲۸۷ چنین نتیجه می شود که دو قطر مربع مستطیل باهم مساویند زیرا که نسبت به هریک از دو محور متناظره اند .

حال دو خط غیرمعین رسم می کنیم که یک دیگر را در نقطهٔ ه قطع کنند (س۲۰۱) بعد چهار فاصله مساوی ه ج ، ه ن و ه د و ه ا را جدا می کنیم - شکل ا ج د ن متوازی الاضلاع است (ع۲۸۴) .



س۲۰۱

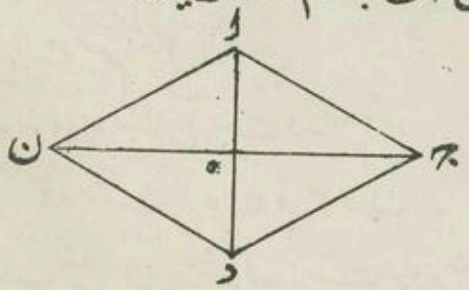
دو مثلث ا د ن و ج د ن را ملاحظه می کنیم در این دو مثلث ضلع ن د مشترک است و دو ضلع ج ن و ا د بنابر فرض نیز مساویند و دو ضلع ا ن و ج ن نیز چون اضلاع

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 260 of 326

مقابل متوازی الاضلاع اند مساوی اند پس این دو مثلث مساوی هستند و دو زاویهٔ ا ن د و ج د ن که مقابل یا قطار اند مساوی می گردند و چون این دو زاویه کمل یک دیگر ند پس هر دو قائمه اند و متوازی الاضلاع مستطیل است و میتوانیم بگوئیم.

قضیه - برای آنکه متوازی الاضلاعی مستطیل باشد لازم و کافی است که قطرین آن باهم مساوی باشند.

۲۹۰ - نوری - نوری یا معین متوازی الاضلاعی است که تمام اضلاع آن باهم مساویند.



س ۲۰۲

فرض می کنیم ا ج د ن یک لوزی باشد (س ۲۰۲) می بینیم که دو نقطه ج د ن نسبت به دو نقطه ا و د بیک فاصله

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 261 of 326

اندپس ج ن برنقطه ه وسط ا د عمود است (ع ۱۶۹)
و این نقطه ه وسط ج ن نیز می باشد (ع ۲۸۲) پس دو نقطه
ا و د نسبت به ج ن متناظر اند و همچنین ج و ن نسبت
به ا متناظر می باشند و می توانیم بگوئیم.

قضیه - هر لوزی دو محور تناظر عمود بر هم
قبول می کند که دو قطر آن می باشند.

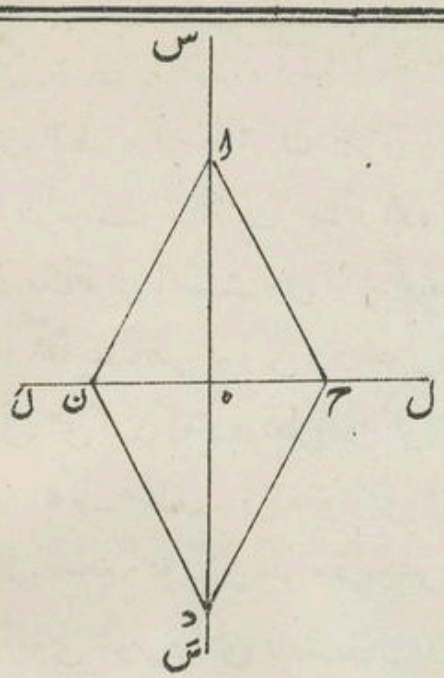
۲۹۱ - مسئله - از متوازی الاضلاعی دو محور
تناظر عمود بر یکدیگر مفروض است و رؤس آن
در روی محورها می باشد آن را رسم کنید.

دو محور تناظر س ه سَ و ل ه لَ مفروض است.
(س ۲۳) رأسی مانند ا در روی ه س نشان می کنیم رأس
مقابل آن حتماً نقطهٔ د خواهد بود بقسمی که

ده = اه

بعد رأس دیگری مانند ج روی ه ل اختیار مینمائیم
رأس مقابل بآن حتماً نقطه ن خواهد بود بقسمی که

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 262 of 326



س ۲۰۳

ن ه = ح ه

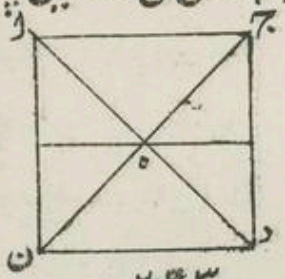
حال نقاط ا و ن و د و ج را بهم وصل می کنیم تا متوازی الاضلاع مطلوب حاصل شود که مرکز آن نقطهٔ ه می باشد و بواسطهٔ تناظر اضلاع آن باهم مساویند و شکل مرسوم لوزی است و می توانیم بگوئیم.

قضیه - هرگاه متوازی الاضلاعی دو محور تناظر عمود برهم قبول کند که دو قطر آن هم باشند آن شکل لوزی است.

۲۹۲ - مربع - مربع متوازی الاضلاعی است که زوایای آن قائمه و اضلاعش باهم مساویند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 263 of 326

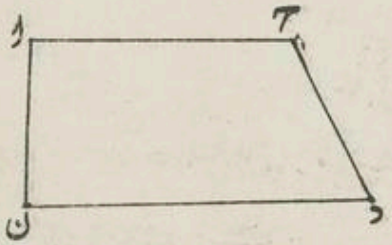
پس در مُربّع خواص مستطیل و لوزی هر دو جمع شده است (س ۲۰۴) بنا براین مربع دارای چهار محور تناظر است دو قطر آن و دو خطی که اوساط اضلاع مقابل را بهم وصل می کند این چهار خط در نقطه ه مرکز مُربع یک دگر را قطع کرده هشت زاویه مساوی که هر کدام ۴۵° است تشکیل میدهند.



س ۲۰۴

۳۹۳- ذو ذنقه- ذو ذنقه ذو اربعه اضلاع محدّبی است که فقط دو ضلع آن موازیند.

مثلاً ا ج د ن یک ذو ذنقه است (س ۲۰۵) که در آن دو ضلع ا ج د ن د باهم موازیند و این دو ضلع موازی را قاعدتین ذو ذنقه می گوئیم -

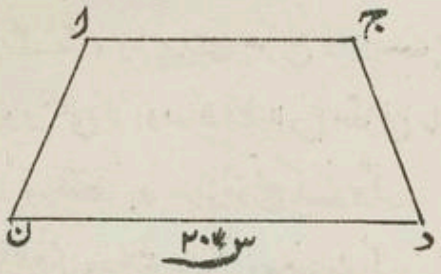


س ۲۰۵

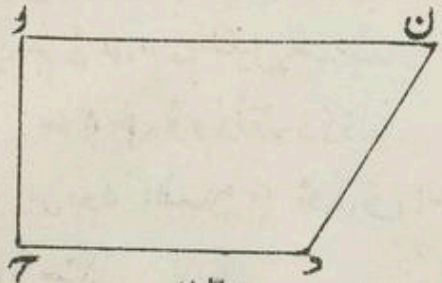
قاعدتین ذو ذنقه باهم غیر مساویند و الا متوازی الاضلاع

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 264 of 326

می شود ذو ذنقه را متساوی الساقین می گویند درصورتے که دو ضلع غیر موازی آن باهم مساوی باشند (س۲۰۶) ذو ذنقه را قائم الزاویه میخوانند درصورتیکه دو زاویه آن قائمه باشد (س۲۰۷) -



س۲۰۶



س۲۰۷

مسائل

۴۴ - متوازی الاضلاعی رسم کنید که ازان اضلاع و یکی از دو قطر در دست است -

۴۵ - از متوازی الاضلاعی دو قطر و یکی از اضلاع معلوم است آن را رسم کنید -

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 265 of 326

۴۶ - چهار ضلعی را که از تقاطع چهار منصف الزاویه متوازی الاضلاع حاصل می شود تحقیق کنید -

۴۷ - وسط دو ضلع مقابل متوازی الاضلاعی را بهم وصل می کنیم چه شکلی حاصل می شود -

۴۸ - در چه شرائطی رؤس متوازی الاضلاعی روی محیط دائره واقع می شوند ؟

۴۹ - در چه شرائطی منصف زوایای متوازی الاضلاع با اقطار آن بر روی هم می افتند -

۵۰ - در چه شرائطی رؤس ذو ذنقه روی محیط دائره واقع می گردند -

۵۱ - هرگاه از یکی رؤس ذو ذنقه خطی بموازات ضلعی که قاعده نباشد رسم کنیم مثلثی با متوازی الاضلاعی حاصل می شود ازین رو ذو ذنقه رسم کنید که چهار ضلعش در دست است -

۵۲ - مربع ا ج د ن مفروض است در روی اضلاع آن چهار قطعه خط ا ه = ل ح = د م = ن ل را جدا کرده بهم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 266 of 326

وصل می کنیم حال شکل حادثه را تحقیق کنید -

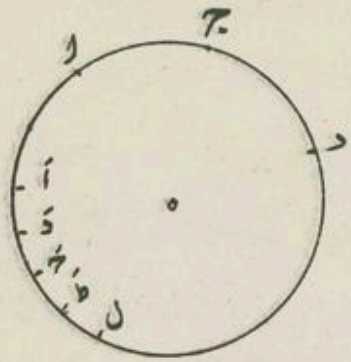
فصل یازدهم

اندازهٔ قسی - اندازهٔ زوایا - ذوالاربعة الاضلاع های محاطے

۲۹۴ - اجزاء و اضعاف قسی - دائره مانند و قوسی مانند ا ج روی آن فرض می کنیم (س ۲۰۸) واضح است که قوس ا ج مجموع دو قوس ا د و د ج است ازین مطلب چنین معلوم می شود که برای جمع کردن دو یا چندین قوس یک دائره کافی است که آنها را نوک بنوک پهلوی یک دیگر قرار دهیم و همچنین قوس د ج تفاضل دو قوس ا ج و ا د

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 267 of 326

می باشد -



اگر چهار قوس مساوی اَ دَ
و دَ جَ و جَ طَ و طَ لَ را
نوک بنوک پهلوی هم قرار
دهیم مے گوئیم که قوس اَ لَ
چهار برابر قوس اَ دَ یا قوس
اَ دَ رُبع قوس اَلَ می باشد -

س ۲۰۸

ازآنچه گفتیم اضعاف واجزاء قوس معلوم شد فقط باید
دانست که مطالب فوق فقط درقوس های یك دائره
صدق می کند -

۲۹۵ - اندازهٔ قوسها - برای اندازه گرفتن قسے آنهارا
باقوس دیگری که برای واحد انتخاب کرده اند مقایسه می
کنند -

قوسی از هر دائره که برای واحد انتخاب شده باشد فقط
برای اندازه قوس های بکار می رود که از همان دائره باشند -

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 268 of 326

قوس ہا را مانند خط صحیح اندازہ می گیرند یعنی مثلاً مے گویند کہ اندازۂ فلاں قوس ۷ ۱ است در صورتیکہ شامل ۷ واحد قوس باشد -

وہمچنیں اگر ثلث واحد قوس ۱۱ مرتبہ در قوس اندازہ گرفتنی نگنجد اندازۂ آن قوس چنیں مے شود $\frac{11}{3}$ وغیرہ -

پس اندازہ گرفتن ہر قوس عبارت است از یافتن عددی کہ تعیین می کند چند مرتبہ واحد قوس یا اجزاء آن دران قوس می گنجد -

۲۹۶ - واحد قوس - سابقاً دیدیم (ع ۸۹) کہ زوایاے مرکزی مساوی از دائرہ قوس ہاے مساوی جدا می کنند و بالعکس قوس ہاے مساوی ہر دائرہ مقابل با زوایاے مرکزی مساوی است و نیز سابقاً چنین تعریف کردیم قوس یک درجہ قوسی است کہ مقابل بزاویہ مرکزی یک درجہ باشد و این قوس معین نیست مگر آنکہ شعاع دائرہ معلوم باشد (ع ۹۳) -

من بعد در تمام مطالبی کہ ذکر می کنیم فرض می کنیم کہ قوسہا

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 269 of 326

متعلق بیک دائره اند بنابرین می توانیم بگوئیم قوس یک درجه یا یک دقیقه یا یک ثانیه مقصود بآن آنست که قسّی مزبوره بواسطهٔ زاویهٔ مرکزی یک درجه و یک دقیقه و یک ثانیه از دائره جدا شده اند -

ازین قراری که گذاشتیم یک زاویه مرکزی که ۱۳ً ۱۲َ ۷۵° باشد قوسی از دائره جدا می کنند مساوی با ۱۳ً ۱۲َ ۷۵° پس می توانیم چنین بیان کنیم -

چون واحد قوس را قوسی انتخاب کردیم که بواسطه زاویه مرکزی یک درجه جدا شده باشد پس تمام زوایای مرکزی را باهمان اعدادی اندازه می گیریم که قوس های مقابل بانها و اندازه گرفته ایم -

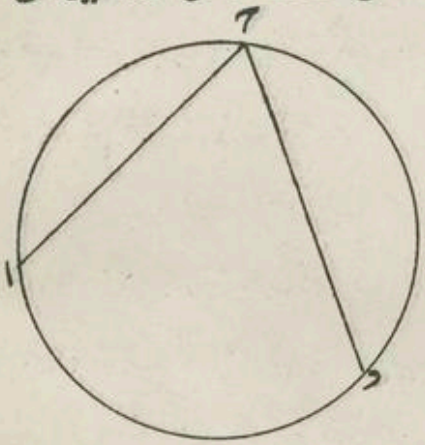
باین طریق بجاے اندازه گرفتن قوس می توان زاویه مرکزی مقابل آنرا اندازه گرفت -

۲۹۷ - آنچه را گفتیم راجع بزوایائی بود که رأس شان روی

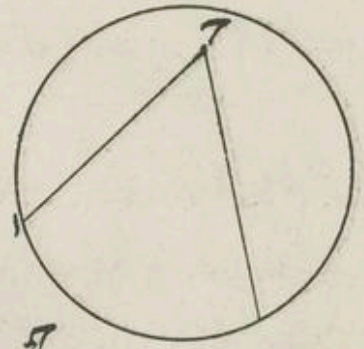
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 270 of 326

مرکز دائره و اضلاع شان اشعهٔ دائره بود حال بعضی زوایای دیگر را که راس شان روی مرکز دائره نیست و اضلاع شان دائره را قطع می کنند تحصیل می کنیم -

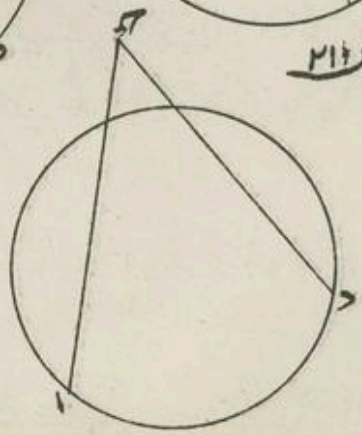
۲۹۸ - **تعاریف** - ممکن است راس زاویهٔ روی محیط دائره باشد آن وقت اضلاعش اوتار دائره می گردند این نوع



س ۲۱۱



س ۲۱۰



س ۲۱۲

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 271 of 326

زاویه را زَاوِیهٔ مُحَاطِی می گویند مثلاً در س۲۰۹ زاویهٔ ا ج د یک زاویه محاطی است -

ممکن است راس زاویه درون دائره باشد آن وقت اضلاع آن دو قطعه از اوتار دائره هستند چنین زاویه زاویهٔ داخلی می گویند -

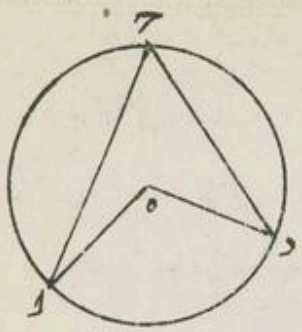
مثلاً در س۲۱۰ زاویه ا ج د یک زاویه داخلی است بالآخره ممکن است که راس زاویه در خارج دائره باشد آن وقت اضلاع آن اوتاری هستند که امتداد داده شده اند چنین زاویه را زاویه خارجی میخوانند -

مثلاً در س۲۱۱ زاویه ا ج د یک زاویهٔ خارجی است.

۲۹۹ - زوایای محاطی - اگر ا ج د زاویه باشد محاطی (س۲۱۲) از زاویه قوسی جدا می کند که مقابل با یک زاویه مرکزی ا د ه است -

بدواً ملاحظه می کنیم که قوس ا د ممکن است از نیم دائره بزرگتر باشد آن وقت زاویه مرکزی ا ه د بزرگ تر از ۱۸۰

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 272 of 326

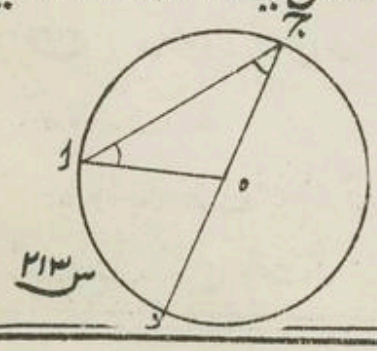


س ۲۱۲

درجه است هرگاه زاویه محاطی
در دست باشد زاویه مرکزی مقابل
آنرا بسهولت می توان بدست
آورده چون اندازه گرفتن زاویه
مرکزی بسیار آسان است بنا براین
اندازهٔ زاویهٔ محاطی را نیز بواسطه آن معلوم می کنیم -

۳۰۰ - مسئله - زاویهٔ محاطی را با زاویه مرکزی
مقابلش مقایسه کنید -

ابتدا فرض می کنیم یکی از اضلاع زاویه قطر دائره باشد (س ۲۱۳)
از نقطه ا به ه وصل می کنیم مثلث ا ج ه متساوی الساقین
است زیرا که دو ضلع ه ج و ه ا دو شعاع یک دائره اند و زاویه
مرکزی ا ه د زاویه خارجی مثلث
است و مساوی است با مجموع
دو زاویه داخلی غیر مجاور مثلث یعنی
زاویهٔ ا و ج و چون این دو زاویه

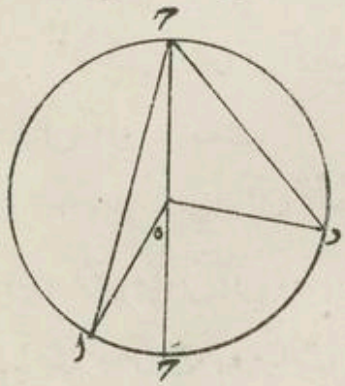


س ۲۱۳

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 273 of 326

خودشان باهم مساویند پس زاویه ج مساوی نصف زاویهٔ مرکزی مقابلش یعنی ه می باشد -

۳۰۱ - حال فرض می کنیم که زاویه محاطی مفروض در دو طرف قطری که از رأس زاویه گذشته است واقع شده باشد - (س۲۱۴) از نقطه ج به مرکزه وصل کرده امتداد میدهیم تا محیط دائره را در نقطهٔ ج قطع کند زاویه ا ح د مساوی با مجموع دو زاویه ا ح ج َ و ج َ ح د وچون این دو مرتباً با نصف

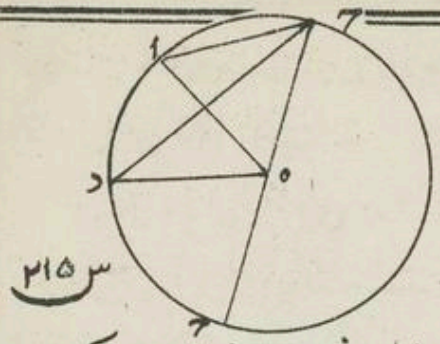


س۲۱۴

دو زاویهٔ مرکزی ا ه ج َ و ح َ ه د مساوی می باشند پس زاویهٔ ا ح د که مجموع آنها است مساوی بانصف زاویهٔ مرکزی ا ه د می باشد -

اگر دو ضلع زاویه دریک طرف قطری باشند که از رأس زاویهٔ گذشته است (س۲۱۵) مانند مطلب سابق اثبات می کنیم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 274 of 326

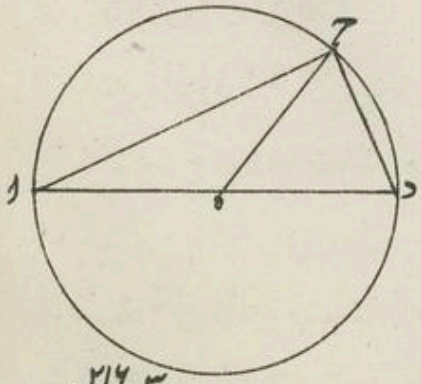


س ۲۱۵

فقط در اینجا زاویه مفروضه مساوی باتفاضل دو زاویه است پس از آنچه گفتیم چنین نتیجه می گیریم -

قضیّه - هر زاویه محاطی نصف زاویه مرکزی مقابل آن است .

۳۰۲ - **حالت مخصوص** - هرگاه زاویه محاطی قائمه باشد - زاویهٔ مرکزی مقابل آن ۱۸۰ درجه است یعنی وتر ا د قطر دائره می باشد (س ۲۱۶) و مثلث ا ج د قائم الزاویه است و می توانیم اثبات کنیم که -



س ۲۱۶

اولاً - مرکز دائره محیط بر مثلث قائم الزاویهٔ وسط وتر میباشد .

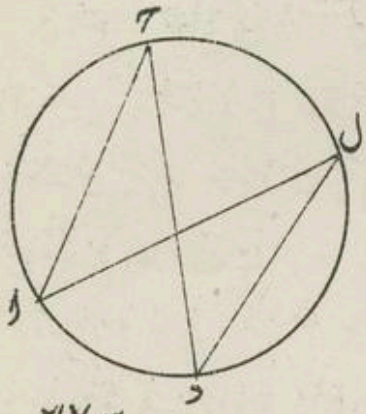
ثانیاً - در مثلّث قائم الزاویه میانهٔ که بوسط وتر

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 275 of 326

وصل میشود مساوی با نصف وتر است .

اثبات عکس این مطلب اخیر را بعهده متعلمین واگذار میکنیم

۳۰۳ - از قضیّه ۳۰۱ معلوم می شود که هرگاه چندین زاویه یک قوس از دائره جدا کنند یا یک دیگر مساویند مثلاً دو زاویهٔ ا ج د و ا ل د باهم مساویند زیرا که هر دو یک قوس ا د را از دائره جدا می کنند (س ۲۱۷)



س ۲۱۷

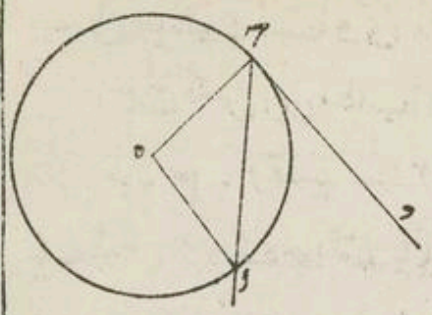
بنا براین هرگاه نقطه ج یعنی راس زاویه تغییر کند مقدار زاویهٔ تغییر نمی کند بشرط آنکه دو نقطه ا و د ثابت باشند -

۳۰۴ - زاویهٔ محاطی مخصوصه

زاویهٔ ا ج د را ملاحظه میکنیم (س ۲۱۸) که یک ضلع آن ا ج وتر دائره و ضلع دیگر ح د مماس بر دائره است زاویه ا ج د محاطی مخصوصی است که قوس مقابلش ا ج است که در درون زاویه واقع شده است اگر ضلع ا ح قطر دائره باشد زاویه ا ج د قائمه خواهد بود (س ۲۱۹) و در اینجا هم معلوم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 276 of 326

است که زاویهٔ مرکزی ا ه ج معادل ۱۸۰ درجه است -

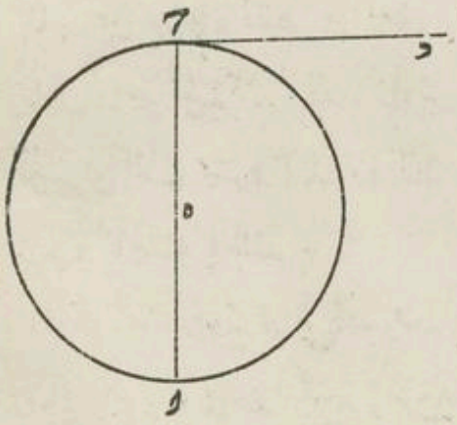


س ۲۱۸

حال به س ۲۱۸ برگردیده مانند ع ۳۰۱ اثبات میکنیم که زاویه ا ج د نصف زاویهٔ مرکزی ا د ج میباشد -

۳۰۵ - زوایای داخلی -

دو قوس دائره مانند ا ج و اَ جَ را ملاحظه می کنیم که بر روی هم واقع نشده اند (س ۲۲۰) -

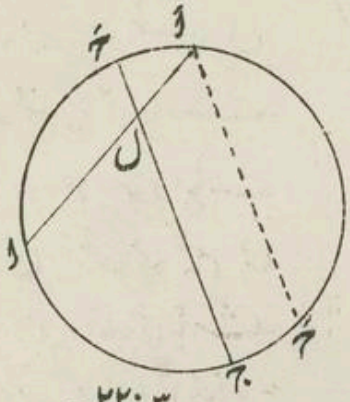


س ۲۱۹

اگر از ا به اَ و از ج به جَ وصل کنیم یک زاویه داخلی تشکیل می دهند که با زاویه مقابلش دو قوس ا ج و اَ جَ را از دائره جدا می نمایند. اگر این دو قوس در دست باشند رسم کردن و اندازه گرفتن زاویهٔ ل بسیار آسان است -

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 277 of 326

۳۰۶ - مسئله - یک زاویه داخلی را با زوایای مرکزی و محاطی که همان قوس را از دائره جدا مینمایند مقایسه کنید.



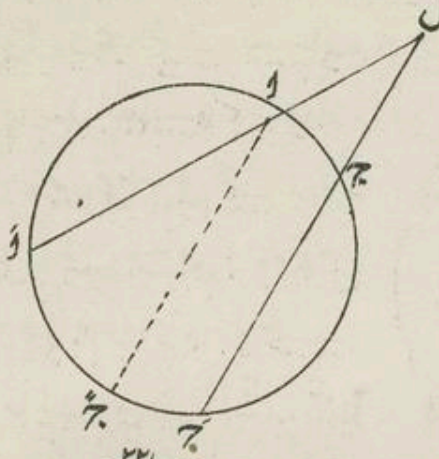
س ۲۲۰

فرض می کنیم ل یک زاویهٔ داخلی باشد (س ۲۲۰) که دو قوس ا ج و آ' ج' را از دائره جدا می نمائید برای اندازه گرفتن آن زاویه کافی است که زاویهٔ محاطی مساویش را اندازه بگیریم از نقطه آ وتر آ ج' را بموازات ج ج' رسم می کنیم زاویهٔ آ مساوی با زاویهٔ ل است حال میگوئیم اندازهٔ زاویهٔ آ نصف قوس ا ج' است ولی این قوس مجموع دو قوس ا ج و ج ج' می باشد (۲۹۴) پس می توانیم بگوئیم -

قضیه - هر زاویهٔ داخلی مساوی است با نصف مجموع دو زاویهٔ مرکزی که همان قوسها را از دائره جدا میکنند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 278 of 326

۳۰۷ - هرگاه دو قوس ا ج و اَ جَ بدرجه و دقیقه و ثانیه اندازه گرفته شده باشند اندازه زاویهٔ داخلی ل نصف مجموع آنها است.



س ۲۲۱

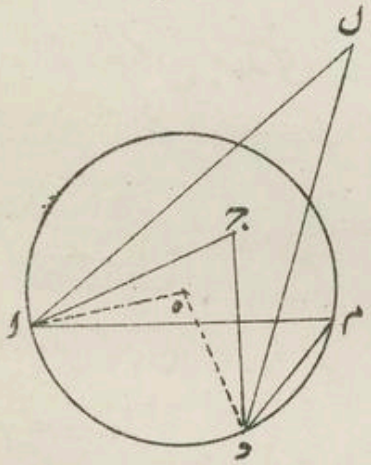
۳۰۸ - زوایای خارجی - فرض می کنیم ل یک زاویه خارجی باشد (س ۲۲۱) از نقطه و خط ا جَ را بموازات ج جَ رسم می کنیم زاویه محاطی و تشکیل می شود که مساوی با زاویه ل است اندازه زاویهٔ انصف اندازه زاویهٔ مرکزی است که مقابل به قوس ا جَ باشد ولی این قوس مساوی است با تفاضل دو قوس ا ج و اَ جَ است (زیرا که ا ج = جَ جَ) پس می توانیم بگوئیم -

قضیه - هر زاویهٔ خارجی مساوی است با نصف تفاضل دو زاویهٔ مرکزی که همان قوسها را از دائره

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 279 of 326

جدا میکنند .

۳۰۸ - تبصره - هرگاه دو قوس اندازه ا ج و ا د ج به درجه دقیقه و ثانیه معلوم باشد اندازهٔ زاویهٔ ل نصف تفاضل آنها است و این مسئله همواره ثابت است ولوای که یکی از اضلاع مماس بر دائره باشد -



س ۲۲۳

۳۰۹ - تبصره -

هرگاه قوس ا د را (س ۲۲۲) با سه زاویه ل و ح و م ملاحظه کنیم که یکی خارجی و دیگرے داخلی و سیمی محاطی باشد و هر سه یک قوس ا د را از دائره جدا کرده و در یک طرف قوس ا د واقع شده باشند - واضح است که زاویهٔ ج از م بزرگتر و زاویهٔ م از ل بزرگ تر می باشد زیرا که زاویهٔ م نصف زاویه مرکزی ا ه د است و

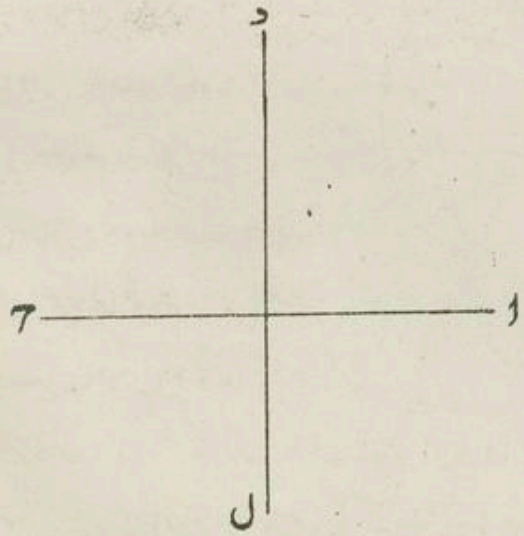
http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 280 of 326

زاویهٔ ج از این نصف بزرگتر و زاویهٔ ل ازین نصف کوچک تر است -

قوس مقابل بزاویه مفروضه

۳۱۰- مکان هندسی - مکان هندسی عبارت است از تمام نقاطی از سطح که دارای یك خاصیت معیّن باشند .

مثلاً سابقاً (ع ۱۶۹) چنین بیان کردیم محرر تناظر هر قطعهٔ خط مکان هندسی نقاطی است که از دو طرف آن بیك فاصله باشند (س ۲۲۳)



س ۲۲۴

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 281 of 326

مطلب فوق بما چنین می فهماند که :-

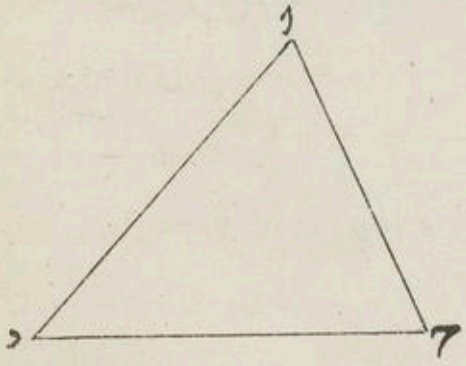
اَوّلاً - هر نقطه که از طرفین خط مفروض بیک فاصله باشند روی محور تناظر واقعند -

ثانیاً - هر نقطه از این محور تناظر بیک فاصله است از طرفین خط مفروض .

ونیز

هر دائره مکان هندسی نقاطی است که بیك فاصله باشند از یك نقطه مفروضند .

۳۱۱ - **تعریف** - هرگاه زاویهٔ ا از مثلثی مساوی باشد بازاویهٔ مفروضه مانند ه درین وقت مے گویند که از نقطه ا خط د ج بزاویه ه دیده مے شود (س ۲۲۴) -



س ۲۲۴

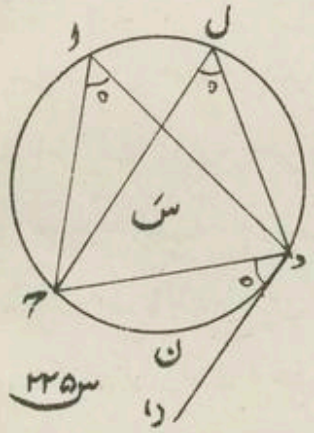
۳۱۲ - **مسئله** - معلوم کنید مکان هندسی نقاط

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 282 of 326

را که از آنجا خط مفروضی بزاویه مفروضه دیده شود.

این مسئله بواسطهٔ مسئله ۳۰۳ بر ما واضح می گردد -

فرض می کنیم که ه زاویهٔ مفروضه و ح د قطعه خط مفروضه باشد مثلثی رسم می کنیم که در آن زاویه ا مقابل بضلع د ح مساوی با زاویهٔ مفروضه ه باشد (س ۲۲۵) نقطه ا یکی از نقاط مکان هندسی است حال دائره س را بر مثلث ا ح د محیط می کنیم می دانیم که هر نقطه از قوس ح ا د مانند ل فرض کنیم زاویهٔ ل نیز مساوی با زاویهٔ مفروضه ه خواهد شد -



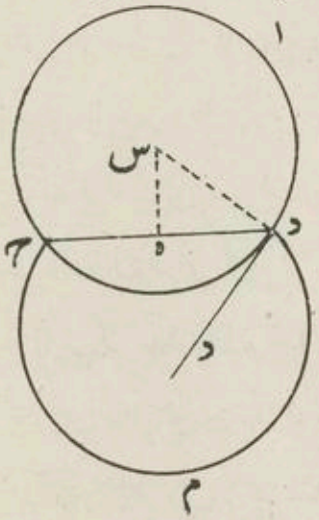
س ۲۲۵

ولی اگر نقطه مانند ن روی قوس ح د ن بگیریم زاویهٔ ن مساوی با زاویهٔ مفروضه ه نخواهد گردید زیرا که همان قوس را از دائره جدا نمیکند حال طریق ساختن دائره محیطی مثلث را بیان می کنیم و ملاحظه می نمائیم که اگر از نقطهٔ د خط د ل را

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 283 of 326

بر دائره مماس کنیم زاویهٔ ج د ك نیز مساوی با زاویهٔ مفروضه ه
است (ع ۳۰۴)

۳۱۳ - از د زاویهٔ ك د ج را مساوی با زاویه مفروضه
رسم می کنیم (س ۲۲۴) دائرهٔ مطلوبه در نقطه د بر خط د ك
مماس است و از نقطه ا نیز خواهد
گذشت مرکز دائرهٔ که از نقطهٔ
د و ج بگذرد روی خطی واقع
است که بر وسط د ج عمود
باشد و نیز برای آنکه دائره
بر خط د ك مماس باشد -
باید که بر روی عمودی که از نقطهٔ
د بر د ك خارج مے شود -



س ۲۲۶

واقع شود و این دو خط در نقطه س یک دیگر را قطع می کنند
پس نقطه س مرکز و س د شعاع دائره است حال دائره
مطلوبه را رسم می کنیم فقط قوس د ا ج که برای اندازه گرفتن

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 284 of 326

زاویهٔ ج د ك بکار می رود برای ما مناسب است -

از طرف دیگر چون می توانیم زاویه ج د ك را در طرف دیگر ح د رسم کنیم ازان قوس ح م د نتیجه می شود که متناظره ج و د و جواب دیگر مسئله می باشد -

۳۱۴ - پس مکان هندسی مطلوب دو قوس ج و د و ح م د می باشد و از روی تبصره ۳۰۹ معلوم مے شود که ممکن نیست نقطه دیگری جزء مکان هندسی مطلوب باشد زیرا که اگر نقطه مانند ل فرض کنیم که روی دو قوس مزبور نباشد زاویه حاصله یا بزرگتر یا کوچک تر از زاویه مطلوبه خواهد گرد -

در این حال می گویند که دو قوس مزبور قابل زاویهٔ ه میباشد -

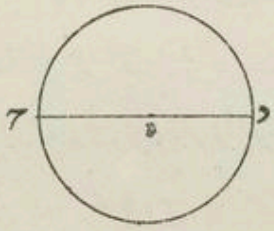
از آنچه گفتیم چنین نتیجه مے گیریم -

قضیه - مکان هندسی نقاطی که از انها قطعه خط مفروضی بزاویهٔ مفروضه دیده شود دو قوس دائره ایست که نسبت به آن قطعه خط متناظر و قابل زاویه مفروضه اند .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 285 of 326

۳۱۵ - حالت مخصوص - زاویه ه قائمه است -

اگر به س۲۲۵ مراجعه کنیم می بینیم در حالتیکه زاویهٔ مفروضه قائمه باشد قوس ج د نیم دائره است و مکان هندسی مطلوب دائره است که بقطر ج د باشد (س۲۲۷)



س۲۲۷

دو قوسی که از این قطر حاصل می شود نسبت به اول متناظر اند و مکان هندسی مطلوب می باشند پس می گوئیم -

قضیه - مکان هندسی نقاطی که از آنها قطعه خط مفروضی بزاویهٔ قائمه دیده شود دائرهٔ ایست که قطرش قطعه خط مفروض باشد.

چهار ضلعیهای محاطی

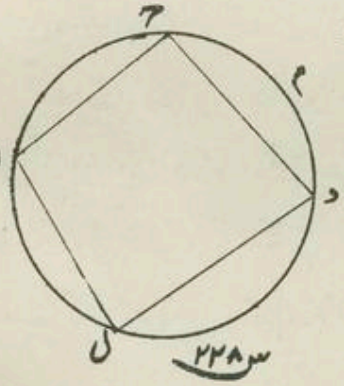
۳۱۶ - ذو اربعة اضلاع را در صورتی میگویند محاطی است که رؤسش روی محیط دائره باشند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 286 of 326

می دانیم که هرگاه چهار نقطه نامعین فرض کنیم ممکن است روی محیط یک دائره واقع نشوند پس معلوم می شود که هر چهار ضلعی نامعینی ممکن است در دائره محاط نگردد -

۳۱۷- تحقیق کنید در چه شرائطی ذو اربعة اضلاعی محاطی است .

دائره رسم کرده روی آن چهار نقطه ا و ح و د و ل را نشان می کنیم (س ۲۲۸)



س ۲۲۸

حال این هر یک از نقاط را به نقاط مجاور خود بواسطهٔ قطعه خطهای مستقیمه وصل می نمائیم بدین طریق ذو اربعة اضلاع ا ح د ل بدست می آید که قابل محاط شدن در دائره است -

اندازه زاویهٔ د مساوی است با اندازهٔ نصف قوس ح ا ل و اندازهٔ زاویهٔ مقابل بآن یعنی ا مساوی به اندازهٔ

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 287 of 326

نصف قوس ح د ل است چون مجموع این دو قوس تمام دائره
یا ۳۶۰ درجه است پس مجموع دو زاویهٔ د و ا مساوی ۱۸۰
درجه یا دو قائمه است و بهمین دلیل مجموع دو زاویه دیگر ج
د ل مساوی با ۱۸۰ درجه می باشد پس در هر ذو اربعة الاضلاع
محاطی زوایای مقابل مکمل یک دیگرند۔

۳۱۸ - حال به بینیم آیا همین شرط برای محاطی بودن
ذو اربعة اضلاع کافی است یا نه پس فرض می کنیم ذو اربعة اضلاع
ا ح د ل در دست باشد که در آن دو زاویه ا و د مکمل یک
دیگرند پس مجموع دو زاویه دیگر د و قائمه است زیرا که مجموع
زوایای هر چهار ضلعی مساوی با چهار قائمه است (ع ۲۴۵)
حال دائره رسم می کنیم که بر سر نقطه ا و ح و د بگذرد میگوئیم
آن دائره بر نقطهٔ ل نیز خواهد گذشت زیرا که زاویه ل مکمل
زاویهٔ ج است و اگر نقطهٔ ل در خارج یا در درون دائره واقع
شود آن وقت زاویه ل از مکمل زاویهٔ ج کوچک تر یا بزرگ تر
خواهد گردید پس حتماً نقطهٔ ل روی دائره است و شرط مزبور

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 288 of 326

کافی است -

پس از آنچه گفتیم چنین نتیجه می گیریم -

قضیّه - شرط لازم و کافی برای آنکه یک چهار ضلعی محدّب محاطی باشد آنست که در آن زوایای مقابل مکمّل یکدیگر باشند

مسائل

۵۲ - یک زاویهٔ محاطی در دست است منصف آن را رسم کنید -

۵۳ - مثلثی رسم کنید که در آن یک میانه منصف الزاویه هم باشد و معین کنید آن چه مثلثی است -

۵۴ - از مثلّث زوایا و شعاع دائره محیطی معلوم است آنرا رسم کنید -

۵۵ - از مثلثی شعاع دائره محیطی و یک ضلع و یک زاویه معلوم است آن را رسم کنید و ثابت کنید که ممکن نیست

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 289 of 326

ضلع مفروض مقابل بزاویه مفروضه باشد -

۵۶ - مثلثی رسم کنید که یک ضلع آن معلوم است و دو زاویه مجاور آن ضلع یکی سه برابر دیگری است -

۵۷ - از مثلثی یک ضلع و زاویهٔ مقابل بآن و ارتفاعی که بآن فرود می آید معلوم است آن را رسم کنید -

۵۸ - از مثلثی یک ضلع و زاویهٔ مقابل بآن و مجموع دو ضلع دیگر معلوم است آنرا رسم کنید -

۵۹ - از مثلثی یک ضلع و زاویهٔ مقابل بآن و تفاضل دو ضلع دیگر معلوم است آنرا رسم کنید -

۶۰ - دو نقطه روی دائره مفروض است از آن دو نقطه دو وتر موازی رسم کنید که تفاضل آن ها مساوی با طول مفروضی باشد -

۶۱ - مانند مسئله سابق فقط بجای تفاضل مجموع مفروض است -

۶۲ - اما ممکن است دائره رسم کرد که بر چهار ضلع متوازی الاضلاعی

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 290 of 326

مماس باشد -

۶۳ - کدام اند ذو اربعة اضلاعهائی که در آن ها دو زاویه مقابل قائمه اند و یک قطر از وسط قطر دیگر میگذرد -

۶۴ - دو دائره یک دیگر را در دو نقطه ا و ح قطع می کنند از نقطه ا قاطع د ا ل را رسم می کنیم حال زوایای مثلث ح د ل را تحقیق کنید -

۶۵ - دو دائره برهم در نقطه ا مماس اند ازان نقطه دو قاطع ح ا حَ و د ا دَ را رسم مے کنیم ر ح و د روی یک دائره اند، حال دو وتر د ح و دَ ح را تحقیق کنید -

۶۶ - هرگاه میانهٔ مثلثی نصف ضلعی باشد که از وسط آن خارج شده آن مثلث قائم الزاویه است حال معین کنید آن مثلث چگونه است اگر میانه از نصف ضلع مزبور کوچکتر یا بزرگ تر باشد -

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 291 of 326

فصل دوازدهم

مسائل راجعه بخطوط مماس بر دائره و دوائر مماس بر خطوط مستقیمه

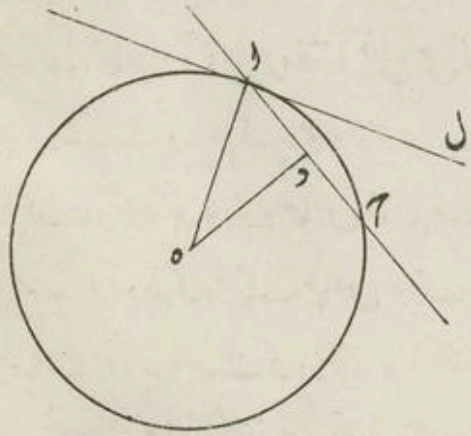
۳۱۹ - سابقاً در عـــ دیدیم بر خطی که بر انتهای شعاع دائره عمود باشد آن را فقط قطع می کند و آنرا مماس نامیدیم و نیز در عـــ دیدیم که هرگاه وتری به توازی خودش تغییر محل پیدا کند بالآخره بر دائره مماس خواهد شد و بالآخره در عـــ دیدیم هر زاویه که از یک مماس و یک وتر تشکیل شود اندازه آن مانند زاویه است که از دو وتر تشکیل شده باشد -

۳۲۰ - مماس آخرین حد وتر است - فرض می کنیم ه یک دائره و ا ح خط قاطعی از آن باشد (س ۲۲۹) و نیز فرض

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 292 of 326

می کنیم نقطه ا ثابت بوده نقطه ج روی محیط دائره حرکت کرده بنقطه ا نزدیک شود در این حالت خط ا ج بدور نقطه ا میگردد .

وقتی که نقطه ج روی نقطه ا بیاید بدواً نمیدانیم خط قاطع چه طور شده است ولی اگر ملاحظه کنیم که این خط همواره عمود است برخط ه د که از مرکز به وسطش وصل شده است می بینیم که هرگاه نقطه ج روی نقطه ا بیاید نقطه د نیز روی همان نقطه خواهد آمد و خط ا ج در نقطهٔ ا برخط ا ه که شعاع دائره است عمود می باشد بنا براین مماس بر دائره است .



س ۲۲۹

در این وقت میگویند که هرگاه نقطه ج روی نقطهٔ ا بیاید قاطع ا ج به ا آخرین حدّ خود رسیده است پس می گوئیم -

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 293 of 326

خط مماس در یك نقطه بر دائره آخرین حدّ قاطعی است که این نقطه را به نقطه دیگری از دائره وصل نماید وقتیکه نقطه اخیر بر روی نقطه اوّل بیفتد .

مسائل راجع به مماس های دائره

۳۲۱ - تبصره - خاصیت اصلی خط مماس بر دائره آن است که با دائره فقط در یک نقطه اشتراک داشته باشد و آن نقطهٔ را نقطهٔ مماس دائره با خط می نامند .

۳۲۲ - مسئله - از نقطه مفروضی خطّی بر دائره مماس کنید .

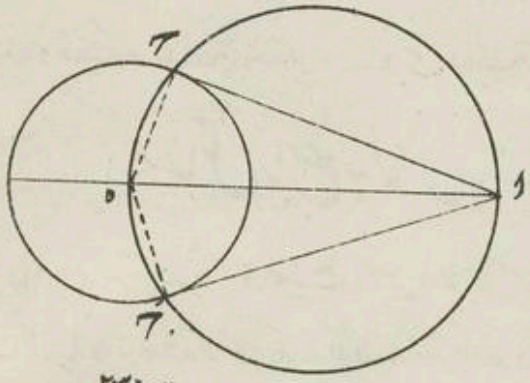
می دانیم که غیر از نقطه تماس تمام نقاط خط مماس در خارج دائره واقع می گردد پس اگر نقطه مفروضه در درون دائره باشد مسئله هرگز ممکن نیست .

از طرف دیگر هرگاه نقطه مفروضه روی دائره باشد مسئله بسیار آسان است زیرا که مماس مطلوب عمود است بر انتهای

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 294 of 326

شعاعی که ازان نقطه بمرکز دائره وصل شده باشد -

پس فرض میکنیم نقطهٔ ا در خارج دائره ه باشد -



س ۲۳۰

(س ۲۳۰) بدواً ملاحظه میکنیم که قطر ه ا محور تناظری برای تمام شکل است پس

هر جوابے پیدا کنیم جواب دیگری متناظر اوّلی نیز بدست خواهد آمد اگر نقطه ج نقطه تماس مجهول باشد خط ا ج بر ه ج عمود است و زاویه ا ج ه قائمه است و نقطه ج روی دائره است که بقطر ا ه باشد یعنی یکی از نقاط مکان هندسی است که ازان خط ه ا به زاویهٔ قائمه دیده می شود (ع ۳۱۵) و چون این دائره مفروضه را در دو نقطه ج و جَ قطع میکند پس دو خط ا ج و ا جَ دو جواب مسئله است -

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 295 of 326

بواسطه تناظر دو مماس ا ج و ا جَ تساوی های ذیل نتیجه مے شود.

ه ا جَ = ه ا ح جَ ه ا = ح ه ا جَ ا = ا ح

پس چنین بیان میکنیم.

قضیّه - از هر نقطهٔ واقعه در خارج دائره همواره میتوان بران دائره دو مماس رسم نمود دو قطعه خطی که بین دو نقطه تمّاس و نقطهٔ مفروضه واقع اند باهم مساویند.

خطّی که نقطهٔ مفروضه را بمرکز دائره وصل میکند منصف زاویه ایست که از تقاطع دو مماس تشکیل میشود و همچنین منصف زاویهٔ ایست که از دو شعاع دو نقطه تماس حاصل می گردد.

۳۲۳ - مسئله - بر دائرهٔ مماسی موازی با خطّ مفروضی رسم کنید.

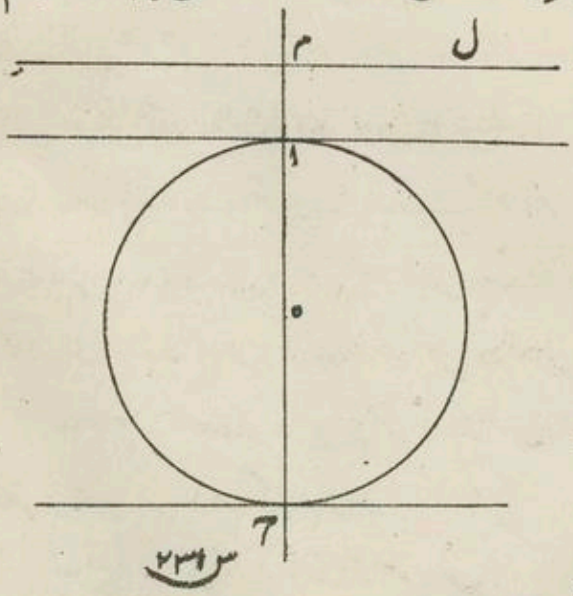
س ۳۳۱ دائرهٔ ه و خط مفروض ل را نشان می دهد بدوزً

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 296 of 326

ملاحظه میکنیم که قطره م عمود بر ل محور تناظر مفروضات مسئله است و علاوه بر این خطوطی که با آن موازی باشند بر شعاع های که قطر ا ح از آن ها تشکیل شده عمود می باشند۔

قطر ا ح دائره را در دو نقطه ا و ح قطع می کند و دو مماسی که ازین دو نقطه بر دائره رسم شوند جوابهای مسئله اند این مسئله همواره ممکن است و دو جواب قبول میکند پس مے گوئیم ۔

قضیه ۔ همواره ممکن است دو مماس بر دائره رسم نمود که موازی با خط مفروضی باشند و دو نقطه تماس محل تقاطع دائره است با قطری که بر خط مفروض عمود باشند ۔



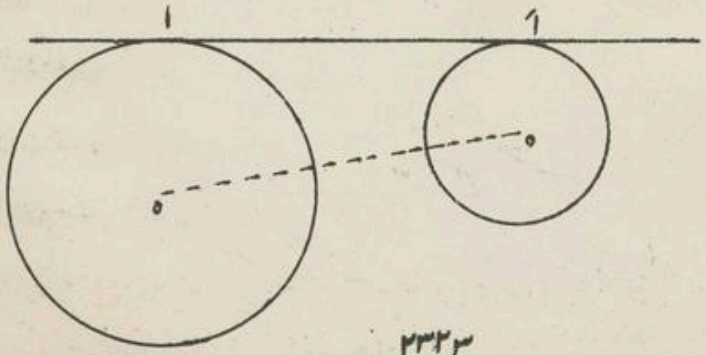
س ۲۳۱

مسئله ۳۲۴

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 297 of 326

بر دو دائره مفروضه مماس مشترکی رسم کنید.

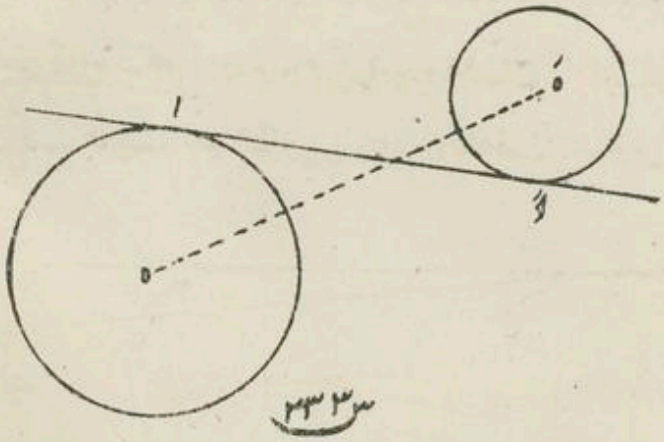
بدو ۱ شکلی که از تماس یک خط و دو دائره بدست می آید ملاحظه می کنیم پس دائرهٔ مانند ه رسم کرده و بر یک نقطه از آن مانند ا خطی مماس می کنیم س۲۳۲ بعد در روی این مماس نقطه دیگری مانند ا انتخاب نموده ازان نقطه دائره ه را بر آن مماس می کنیم در این حال س۲۳۲ یا س۲۳۳ بدست می آید بنا بر آنکه دائرهٔ ثانی را در یک طرف خط ا ا یا در طرف دیگر آن رسم کرده باشیم در حالت اول (س۲۳۲) دو دائره در یک طرف خط مماس اند این خط را مماس مشترک خارجی



س۲۳۲

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 298 of 326

بینامند۔ دراین حالت ممکن است دو دائره یک دیگر را هم قطع بنمایند در حالت ثانی س۲۳۳ دو دائره در دو طرف خط مماسند این خط را مماس مشترك خارجی می گویند در این حالت ملاحظه مے کنیم که دو دائره مفروضه ممکن نیست نقطه مشترکی غیر از نقطه اَ که بر روی نقطه ا بیفتد داشته باشند در این وقت آنها باهم مماس خارجی می گردند۔



س۲۳۳

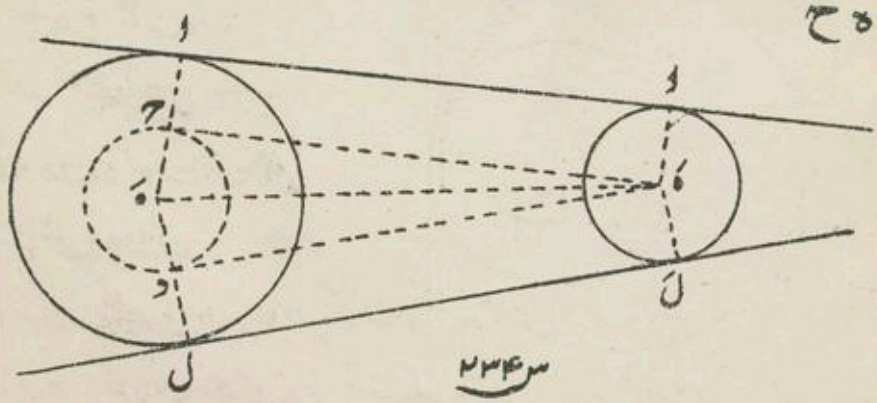
بالآخره در هر دو شکل می بینیم که خط ه هَ یعنی قطر مشترک دو دائره محور تناظر دو دائره است بنابر این هر مماس که رسم کنیم مماس دیگری نیز ممکن است رسم نمود که نسبت به ه هَ متناظر مماس اول باشد۔

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 299 of 326

۳۲۵ - دو اصطلاح مماس خارجی و داخلی بسبب آن است که در حالت اوّل مماس مرسوم خارج خط المرکزین ه هَ می باشد و در حالتِ ثانی آن را قطع می نماید.

۳۲۶ - خلاصه - برای دو دائره دو نوع مماس مشترک است و هر یک از انها دو تا است که نسبت به خط المرکزین باهم متناظر اند.

۳۲۷ - مماس های خارجی - دو دائره ه و هَ مفروض است (س ۲۳۴) دائره بمرکز ه و بشعاعی برابر با تفاضل دو شعاع دو دائره مفروضه رسم می کنیم آن وقت از ه دو خط ه ح



س ۲۳۴

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 300 of 326

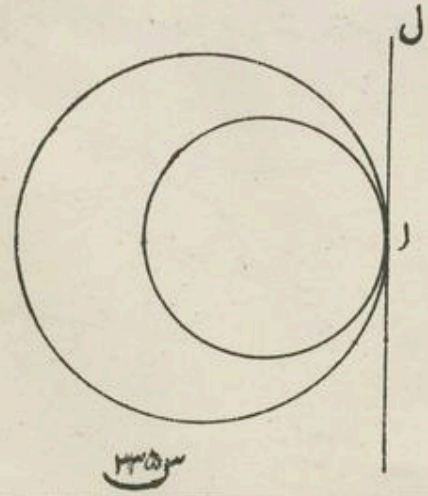
ه ح و ه د را بران مماس می نمائیم حال از مرکز ه به نقطهٔ ح و د وصل نموده امتداد می دهیم تا دائره ه را در دو نقطهٔ ا و ل قطع کند و همچنین دو شعاع هَ اَ و هَ لَ عمود بر هَ ج و هَ د دو نقطه اَ و لَ را بما دهد ا را به اَ و ل را به لَ وصل میکنیم این دو خط دو مماس مطلوب اند زیرا که بر انتهای دو شعاع عمودند.

۳۲۸ - بحث - ترسیم سابق هرگز ممکن نیست مگر آنکه نقطه ه خارج دائرهٔ باشد که بمرکز ه و شعاعی برابر با تفاضل دو شعاع رسم شده باشد پس باید چنین داشته باشیم (دو شعاع ا ع و ع فرض می کنیم)

ع - ع ∠ هَ ه

بنابراین ممکن است که دو دائره داخلی باشند (۲۱۳)

هرگاه ه هَ مساوی با ع - ع باشد دو دائره

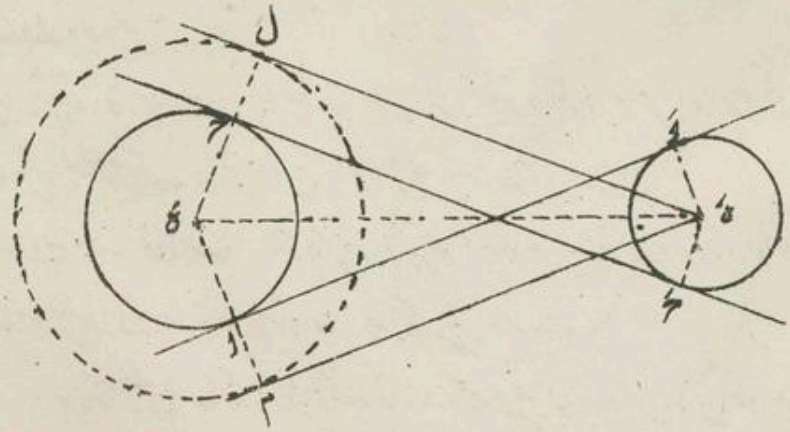


س ۳۳۵

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 301 of 326

از داخل باهم مماس می گردند (س۲۳۵) و خط ل ا مماس مشترک آنها است دو شعاع دائره مساوی باشند مسئله خیلی آسان میشود ماحل آنرا بعهده شاگردان واگذار می کنیم .

۳۲۹ - مماسها مشترک داخلی - دو دائره ه و ه َ مفروض است (س۲۳۶) بمرکز ه و شعاعی مساوی ا ع + ع دائره رسم می کنیم بعد از نقطه ه َ دو مماس ه َ ل و ه م را براین دائره رسم می نمائیم و از نقطه ه به دو نقطه تماس ل و م وصل می نمائیم دو نقطه ح و ا بدست می آید حال ه َ ا َ را بر ه م و ه َ ج َ را بر ه َ ل



س۲۳۶

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 302 of 326

عمود می نمائیم دو نقطه دیگر ا و ج بدست می آید از ا به اَ و از ج جَ وصل می نمائیم دو خط ح جَ و ا اَ دو مماس مطلوب است زیرا که بر انتهای دو شعاع عمودند.

۳۳۰ - بحث - ترسیم فوق ممکن نیست مگر آنکه نقطهٔ هَ خارج دائرهٔ باشد که بمرکز و بشعاع عَ + ع رسم شده باشد. پس باید چنین داشته باشیم.

ع + ع < هَ ه

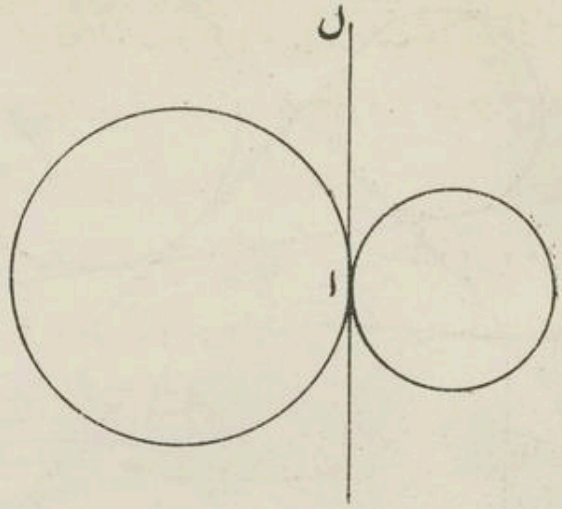
بنابراین دو دائره مفروضه باید خارج هم باشند. (۲۱۳).

اگر هَ مساوی باعَ + ع باشد دو دائره مماس خارجند و مماس مشترک داخلی آن ها واضح است (۲۳۷)

۳۳۱ - خلاصه - از آنچه دیدیم معلوم مے شود که عدّه مماسها بسته وضع دو دائره نسبت به یکدیگر است.

و ما نتائجی را که سابقاً بدست آوردیم در جدول ذیل خلاصه می کنیم.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 303 of 326



س ۲۳۷

دو دائره خارجی .. .. .. ۴ مماس مشترک (دو خارجی دو داخلی)

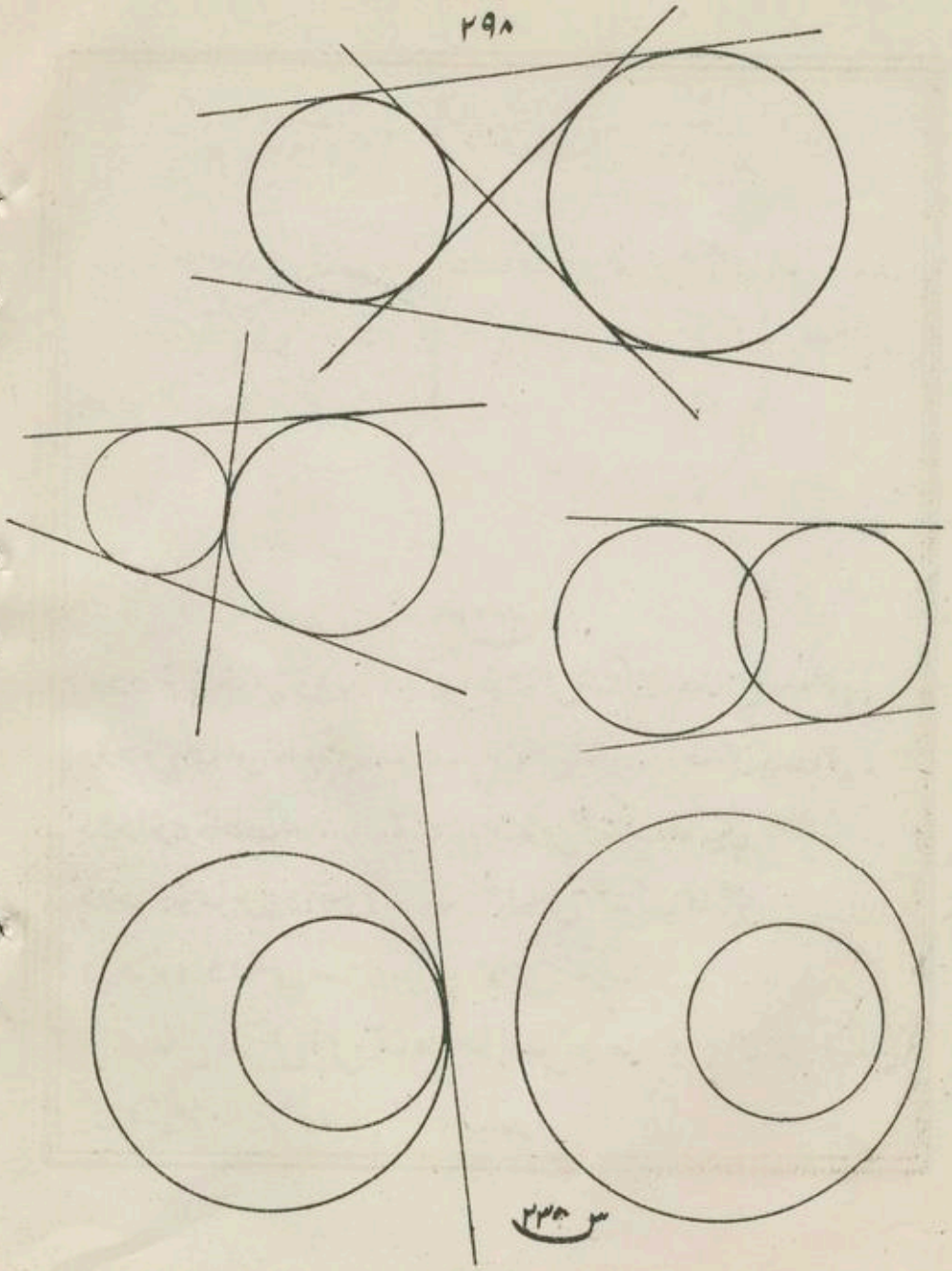
دو دائره مماس خارجی .. .. ۳ مماس مشترک (دو خارجی یک داخلی)

دو دائره قاطعه .. .. .. ۲ مماس مشترک خارجی

دو دائره مماس داخلی .. .. ۱ مماس مشترک خارجی

دو دائره داخلی .. .. .. مماس مشترک ندارد

حال در شکل ذیل تمام مطالب خلاصهٔ فوق الذکر را نشان می دهیم .

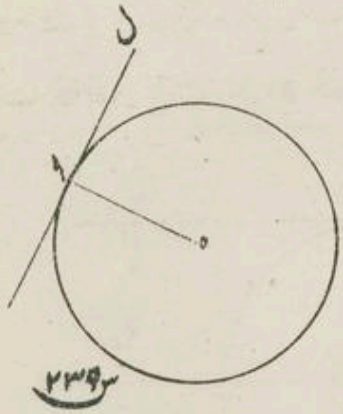


http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 305 of 326

۲ - دوائر مماس بر خطوط مستقیمه

۳۳۲ - مسئله - برخط مفروضی دائرهٔ مماس کنید.

سابقاً این مسئله را در ضمن مسائل دیگر حل کرده ایم حال هم مجدداً تکرار می کنیم نقطه مانند ه در خارج خط ل فرض کرده از ان نقطه ه ا را بر ل عمود میکنیم دائرهٔ که بشعاع ه ا رسم شود. مماس مطلوب است وچون نقطه ه را بمیل خود می توانیم تغییر دهیم



س ۲۳۹

پس این مسئله عدّه لایتناهی جواب قبول می کند.

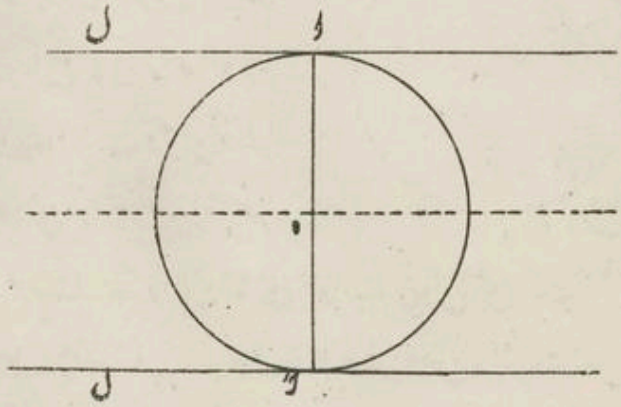
۳۳۳ - مسئله - بر دو خط مفروض دائره مماس کنید.

سابقاً چنین مسئله را در ۳۲۲ و ۳۲۳ دیده ایم پس دو حالت باید تشخیص داد یکی آنکه دو خط مفروض باهم موازی باشند و دیگری آنکه باهم موازی نباشند.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 306 of 326

حالت اوّل ـ دو خط مفروض با هم موازیند .

میدانیم (ص ۳۲۳) که نقطه تماس دائره مطلوبه با دو خط موازی دو انتهای یک قطره دائره است پس اگر خط ا ا' را بر دو خط ل و ل' عمود کنیم قطر دائره مطلوب بدست می آید (س ۲۴۰) نقطه ه وسط ا ا' مرکز دائره مطلوبه است و چون این نقطه همیشه باید بیک فاصله باشد از دو خط ل و ل پس . بر روی



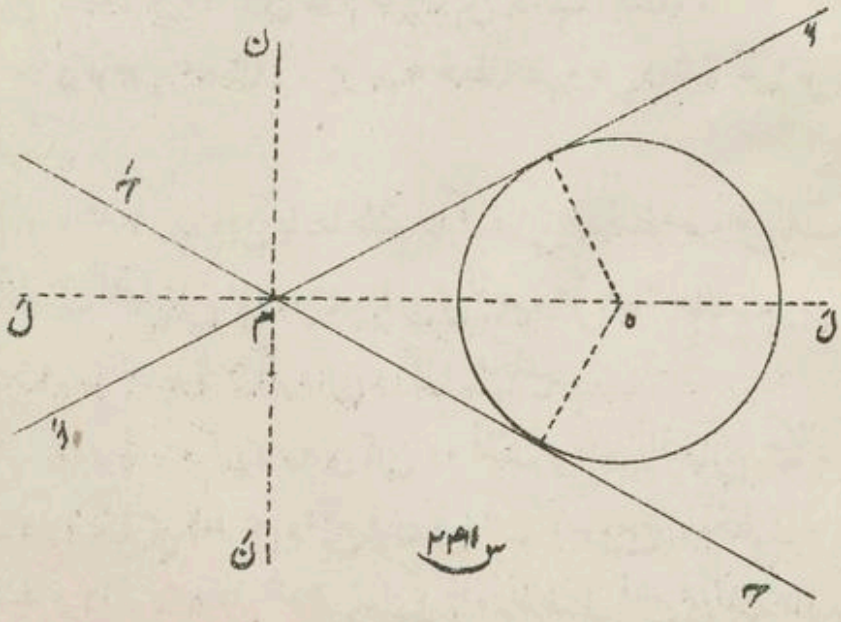
س ۲۴۰

خطی است که از نقطهٔ ه بموازات ل و ل رسم شود پس معلوم میشود که هر نقطه از خط م را مرکز قرار دهیم جوابی بدست می آید تمام

این دوائر با هم مساوی اند پس عدّه جواب های این مسئله هم لاتتناهی است ولی نقطهٔ ه را باید فقط در روی خط م انتخاب شود.

۳۳۴ - حالت دوّم - دو خط مفروض یکدیگر را قطع میکنند.

س ۲۴۱ از روی مسئله ۳۲۲ خطی که نقطهٔ مشترک دو مماس را به مرکز دائره وصل نماید منصف زاویهٔ حادثه از دو مماس است پس



س ۲۴۱

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 308 of 326

معلوم مے شود کہ مرکز دائرہ مطلوبہ روی یکی از منصفہای چہار زاویہ ایست کہ از دو مماس حاصل می شود پس دو خط ل م لَ و ن م نَ را برہم عمود می کنیم کہ منصف این زوایا باشند پس ہر نقطۂ مانند م کہ روی یکی از این چہار منصف الزاویۂ بگیریم چون بیک فاصلہ است ازان دو خط پس مرکز دائرہ مطلوب است و چون نقطۂ م را بمیل خود انتخاب کردیم پس این مسئلہ نیز دارای عدّہ لایتناہی جواب است .

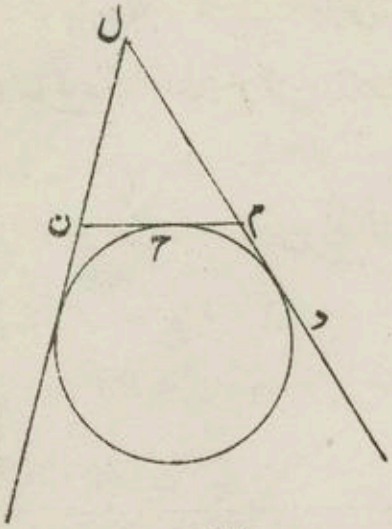
۳۳۵ - مسئلہ - بر سہ خط مفروض دائرۂ مماس کنید .

ما فقط در این جا حالتے را کہ دران سہ خط مفروض یک مثلث تشکیل می دہند بیان می کنیم و حلّ سائر حالات این مسئلہ را بعہدۂ شاگردان واگذار میکنیم .

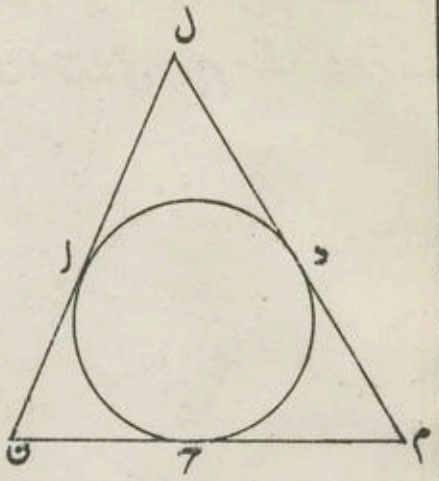
دائرۂ رسم کردہ روی آن دو نقطہ و و د را نشان مے کنیم کہ در انتہای قطری واقع نشدہ باشند (س ۲۴۲) دو خطی کہ در نقطہ بر دائرہ مماس شوند ہم دیگر را در نقطۂ ل قطع می کنند حال

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 309 of 326

نقطهٔ دیگری مانند ج اختیار نمود مماس م ن را هم رسم مینمائیم.
بنابر آنکه نقطهٔ ج روی قوس اوّل یا دوم اد باشد دو شکل



س ۲۴۲



س ۲۴۳

س ۲۴۳ س ۲۴۴ بدست می آید و مثلث م ن ل را تشکیل می دهند.

در س ۲۴۲ می گویند که دائره محاط در مثلث ل م ن است و در س ۲۴۳ می گویند دائره مماس در زاویهٔ ل می باشد.

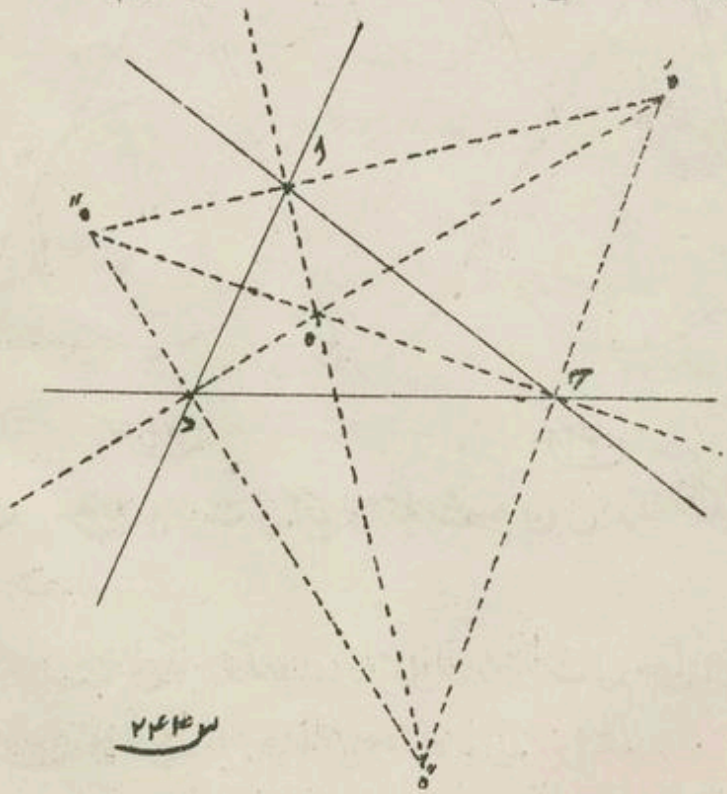
پس معلوم میشود که هرگاه دائره داشته باشیم همواره میتوانیم

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 310 of 326

یک دائره از داخل و سه دائره از خارج بر آن مماس کنیم زیرا که در هر زاویه ممکن است یک دائره مماس شود.

۳۳۶ - مراکز دوائر مثلث ادج مفروض است -

(س ۲۴۴) اضلاع آن از دو جهت امتدادمی دهیم مرکز دائرهٔ



س ۲۴۴

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 311 of 326

که بر ا د د ح مماس باشد روی یکی از دو منصف زاویهٔ د واقع است و یکی از این منصف الزوایا منصف زاویهٔ داخلی مثلث است و دیگری را منصف خارجی مے گویند.

و همچنین دائره که بر ا ح و ح د مماس باشد روی یکی از دو منصف زاویهٔ ح واقع است پس مرکز دائره مطلوبه روی منصف زاویهٔ د و همچنین روی منصف زاویهٔ ج است و ما حالات ممکنه را بتفصیل بیان می کنیم.

۳۳۷ - منصف های داخلی - دو منصف داخلی دو زاویهٔ د و ج در نقطهٔ ه یک دیگر را قطع مے کنند که از سه ضلع مثلث بیک فاصله است پس بر روی منصف زاویه ا نیز واقع می باشد و چون در داخل مثلث است پس بر روی منصف داخلی زاویهٔ ا واقع است پس می گوئیم.

قضیه - سه منصف زوایای داخلی مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند که مرکز دائرهٔ محاطی مثلث است.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 312 of 326

۳۳۸ - یک منصّف داخلی و یک منصّف خارجی -

مثلاً منصّف داخلی زاویۂ د و منصف خارجی زاویۂ ج را ملاحظه میکنیم که یک دیگر را در نقطۂ ہ قطع می کنند بدواً می گوئیم که نقطۂ ہ همواره در زاویه داخلی د واقع است نه در زاویۂ متقابل بر آن زیراکه زاویه ج د ہ مساوی است با $\frac{\hat{د}}{۲}$

و زاویۂ د ج ہ مساوی است با $\frac{\hat{ج}}{۲} + ۹۰^\circ$

وچون این دو زاویه را با هم جمع کنیم چنین مے شود:-

$$۹۰^\circ + \frac{\hat{د} + \hat{ج}}{۲}$$

ولی چون $\hat{د} + \hat{ج}$ از ۱۸۰° کمتر است پس حاصل جمع فوق از ۱۸۰ درجه کمتر باشد و از روی مطلب اقلیدس دو منصف الزاویۂ مفروضه در آن طرف ح د که مثلث واقع شده یک دیگر را قطع می کنند.

پس معلوم شد که نقطۂ ہ مرکز دائره ایست که در زاویۂ د محاط شده باشد وچون این نقطه از سه ضلع مثلث بیک فاصله است پس روی منصف زاویۂ ا نیز واقع می باشد.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 313 of 326

و بهمین طریق ثابت می کنیم که نقطهٔ ہ″ روی منصف داخلی زاویهٔ ج و منصف هاے خارجی دو زاویهٔ ا و د می باشد.

۳۳۹ - دو منصف خارجی - دو منصف ح ہ″ و د ہ″ را ملاحظه می کنیم بدواً مانند نمرهٔ سابق ثابت می کنیم که نقطهٔ ہ″ ممکن نیست در زاویهٔ متقابل براس زاویهٔ ا از مثلث باشد

زاویهٔ ح د ہ″ مساوی است با $\frac{\hat{د}}{۲} - ۹۰^\circ$

و زاویهٔ د ح ہ″ مساوی است با $\frac{\hat{ح}}{۲} - ۹۰^\circ$

و چون این دو زاویهٔ را با هم جمع کنیم چنین مے شود

$$\frac{\hat{ح} + \hat{د}}{۲} - ۱۸۰^\circ$$

پس مجموع این دو زاویهٔ از ۱۸۰° کمتر است و از روی مطلب اقلیدس نقطه ہ″ در همان طرف ضلع د ح واقع است که مثلّث مفروض رسم گردیده است.

از آنچه گفتیم چنین نتیجه مے شود که نقطهٔ ہ″ مرکز دائرهٔ ایست که در زاویهٔ ا محاط شده باشد.

ولی چون نقطهٔ ہ″ از سه ضلع مثلث بیک فاصله است

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 314 of 326

پس روی منصّف زاویهٔ ا نیز واقع است ازین نمره و نمرهٔ سابق مجموعاً چنین نتیجه گیریم .

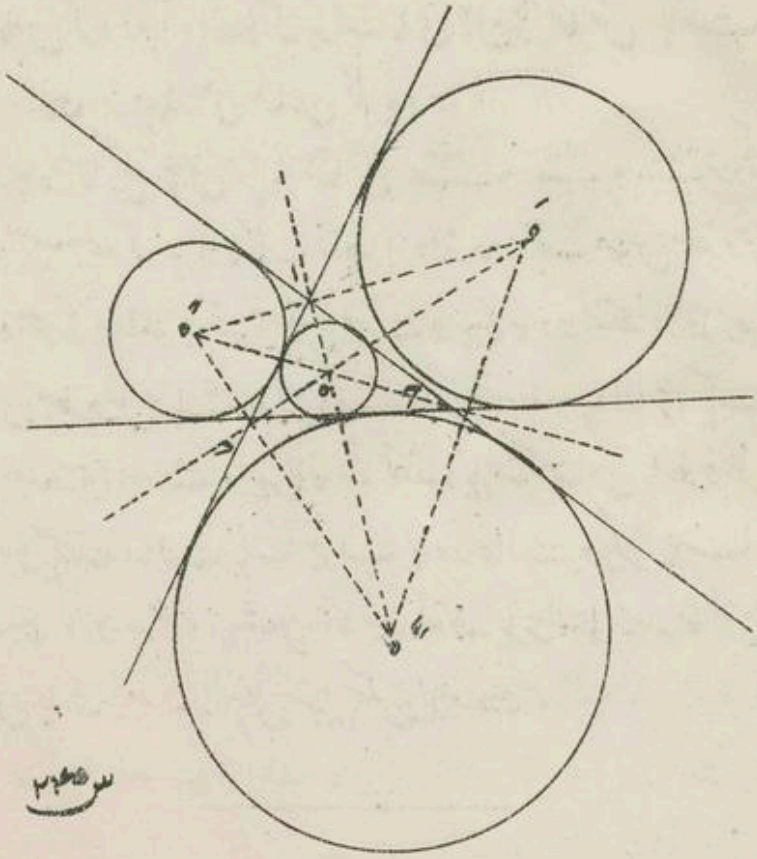
قضیّه - دو منصّف خارجی بایك منصّف داخلی مثلّث یکدیگر را در یك نقطه قطع میکنند که مرکز یك دائره محاطی است .

۳۴۰ - ترسیم عملی - از آنچه مذکور شد آسان ترین وسیله برای ترسیم دوائر محاطی مثلّث آن است که سه منصف خارجی آن را رسم کنیم تا مثلّث ه ه ه تشکیل شود و بعد از سه رأس این مثلّث به رؤس مثلّث مفروض وصل می نمائیم که منصف زوایای داخلی مثلّث می گردند و یک دیگر را در نقطهٔ ه قطع می نمایند .

چون مرکز دوائر معلوم شد برای یافتن شعاع دائره از مرکز عمودی بر یکی از اضلاع فرود می آوریم عمود مرسوم شعاع دائرهٔ محاطی مطلوب است س ۲۴۵ ترسیم عملی فوق را نشان می دهد .

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 315 of 326

۳۴۱ - تبصره - در مثلّث ه ه‍ً ه‍ً (س ۳۴۴) سه خط ه د و ه‍ً ح و ه‍ً ا سه از شعاع مثلّث می باشند و یک دیگر را در یک نقطه ه قطع می نمایند بعدها ازین خاصیّت



س ۳۴۵

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 316 of 326

استفاده می کنیم.

۳۴۲ - تبصره - حل مسائل فوق معلوم می کنید که اگر بیش از سه خط مفروض باشد غالباً ممکن نیست دائره بر تمام آنها مماس کرد زیرا دائرهٔ که بر سه تای آن ها مماس باشد ممکن است بر چهارمی مماس نگردد.

هرگاه نتائج فوق را با نتائج ۱۹۸ و ۱۹۹ و ۲۰۰ نزدیک کنیم می بینیم که هرگاه یک نقطه از دائره یا یک مماس مفروض باشد دائرهٔ مطلوبه غیر معیّن است و هرگاه دو نقطه از دائره یا دو مماس مفروض باشد مرکز دائره دائرهٔ مطلوبه دارای یک مکان هندسی است و هرگاه سه نقطه یا سه مماس مفروض باشد در یک حالت یک جواب و در حالت دیگر چهار جواب دارد و هرگاه بیش از سه نقطه یا بیشتر از سه مماس مفروض باشد مسئله بکلّی غیر ممکن است.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 317 of 326

مسائل

۶۷- دائره بر سه خط مماس کنید که دوتای آنها باهم موازی باشند.

۶۸ - از مثلثی شعاع دائرهٔ محاطی و دو زاویه معلوم است آنرا رسم کنید.

۶۹ - از مثلثی شعاع دائرهٔ محاطی و یک زاویه و یک ضلع مجاور بآن زاویه معلوم است آنرا رسم کنید.

۷۰ - در مثلث ا ج د دائره محاطی سه ضلع مثلث را در نقاط ل و م و ن قطع می کند فرض می کنیم ۲ق = ا د + د ج + ا ج طول قطعات خط ا ل و ج م و د ن را حساب کنید.

۷۱ - در همان مثلث دائرهٔ محاطی خارجی بر زاویهٔ ا دو ضلع این زاویه را در دو نقطهٔ مَ و نَ قطع میکند طول اَنَ و اَمَ

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 318 of 326

را حساب کنید.

۷۲ در مثلث قائم الزّاویه طول شعاع دائرهٔ محاطی داخلی و محاطی خارجی بر زاویهٔ قائمه را از روی اضلاع مثلث حساب کنید.

۷۳ - مثلثی رسم کنید که محیط زوایای آن در دست باشد.

۷۴ - دائره بشعاع مفروضی رسم کنید که از نقطهٔ مفروضه عبور کند و بر خط مفروضی مماس باشد.

۷۵ - دائره بشعاع مفروضی رسم کنید که بر دو خط مفروض مماس باشد.

۷۶ - دائره بشعاع مفروضی رسم کنید که بر یک خط مفروض و یک دائرهٔ مفروضه مماس باشد.

۷۷ - دائره بشعاع مفروضی رسم کنید که بر یک خط مفروض و یک دائرهٔ مفروضه مماس باشد.

۷۸ - دو دائره ه و ه مفروض است که در نقطه ا باهم مماس اند خط ل در نقطهٔ ج بر دائره ه مماس است خط ا ج

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 319 of 326

دائره ه را در نقطهٔ د قطع می کند وضع دو شعاع ه ح و ه د را نسبت به خط ل معلوم کنید.

۷۹ - دائره رسم کنید که مماس باشد بر دائرهٔ مفروضه و خط مفروضی در نقطهٔ معیّنی (از روی مسئله سابق)

۸۰ - دائرهٔ رسم کنید که مماس باشد بر خط مفروضی و دائرهٔ مفروضهٔ در نقطه معینی (مانند مسئله سابق)

۸۱ - از مثلثی زاویهٔ ا و ضلع مقابل بآن و شعاع دائرهٔ مماس خارجی بر زاویهٔ ا در دست است آن را رسم کنید (از روی مسئله ۷۰ و بعد از آن).

۸۲ - معین کنید کدامند خطوطی که فاصلهٔ دو نقطهٔ مفروضه تا آنها مساوی باشد.

۸۳ - از نقطهٔ مفروضه خطی رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروضه بیک فاصله باشد.

۸۴ - خطی رسم کنید که از سه نقطه مفروضه بیک فاصله باشد.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 320 of 326

۸۵- قسمتی از یک مماس متحرک که بین دو مماس ثابت باشد همیشه از مرکز بیک زاویهٔ ثابت مساوی دیده می شود.

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 325 of 326

http://hdl.handle.net/2333.1/xksn03dm Image 326 of 326